D. MANGERON • N. IRIMICIUC

Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie

Mecanica rigidului

I 173127

EDITURA TEHNICĂ

Scanned with CamScanner

242/28

478648

DUMITRU MANGERON * NICOLAIE IRIMICIUC

MECANICA RIGIDELOR CU APLICAŢII IN INGINERIE

Volumul I

MECANICA RIGIDULUI

Scanned with CamScanner

Acest volum tratează aspectele teoretice, completate cu aplicaţii, ale cinematicii şi dinamicii solidului rigid.

Cuprins: Vectori alunecători şi legaţi. Cinematica mişcării absolute a solidului rigid. Cinematica mişcării compuse a rigidului. Probleme generale ale dinamicii rigidului. Dinamica mişcării absolute a solidului rigid. Dinamica mişcării relative a solidului rigid.

Lucrarea se adresează mecanicienilor, tuturor inginerilor şi subinginerilor, precum şi studenţilor şi cadrelor didactice din învăţămîntul superior tehnic.

Scanned with CamScanner

PREFAȚĂ

Prezenta lucrare, rod al unei munci de peste un sfert de veac dedicate adaptării disciplinei de mecanică la necesitățile tehnicii, ar putea fi caracterizată, după părerea autorilor, prin deplina concordanță între forma de prezentare a conținutului acestei discipline și natura proceselor ce trebuie modelate matematic în practica inginerească.

Construcția scheletului disciplinei de mecanică, prezentat în lucrare, a avut în vedere următoarele obiective principale:

— modelarea și axiomatizarea disciplinei în totală concordanță cu cerințele mecanicii tehnice;

— selectarea, completarea și reorganizarea materialului informațional după un criteriu unic, acela al eficienței maxime a procesului de instruire a tehnicienilor cu înaltă calificare.

Realizarea primului obiectiv a fost posibilă prin adoptarea următoarelor idei călăuzitoare:

— înlocuirea modelului mecanic punctual cu modelul rigidului, ultimul reflectînd mult mai fidel realitatea întîlnită în practica inginerească;

— reconsiderarea axiomelor mecanicii clasice, atît în sensul reformulării lor la nivelul maselor elementare — de altfel, singurele formulări riguros științifice —, cît și în sensul reducerii numărului lor la un număr minim de axiome independente;

— adoptarea de noi definiții, în concordanță cu realitatea fizică modelată și cu semnificațiile atribuite curent în practică, pentru principalele noțiuni ale mecanicii, între acestea figurînd și noțiunea de „punct material";

— deducerea teoremelor fundamentale și stabilirea formelor ecuațiilor dinamicii pe baza noului model mecanic adoptat și în conformitate cu noua formă de axiomatizare a disciplinei.

Adoptarea unui alt număr de patru idei fundamentale a făcut posibilă realizarea și a celui de-al doilea obiectiv:

— renunțarea la metoda inductivă în favoarea celei deductive, considerată de autori ca unică modalitate de investigație capabilă să permită abordarea în mod unitar a diverselor aspecte particulare ale proceselor mecanice și stabilirea generalizărilor impuse de actualul stadiu de dezvoltare a disciplinei;

Scanned with CamScanner

— înlocuirea ordinii clasice de prezentare a problemelor, care respectă succesiunea cronologică a apariţiilor şi rezolvărilor lor, cu o nouă ordonare a materialului informaţional, impusă de necesitatea unei resistematizări bazate pe înlănţuirea logică a deducţiilor şi concluziilor;

— alegerea instrumentului matematic în funcţie de posibilităţile de descriere cît mai fidelă a evoluţiei proceselor modelate, cu introducerea —acolo unde se consideră necesar — şi a unor metode folosite în tehnica modernă de calcul, dar cu evitarea sistematică a oricărui spectacol matematic steril;

— ilustrarea fiecărui grup de probleme teoretice prezentate în lucrare cu aplicaţii concrete, aceste aplicaţii, similare celora care sînt — sau ar putea fi — întîlnite în practica inginerească, putînd servi şi ca modele de rezolvare a unor probleme tehnice.

Este indiscutabil că unei asemenea restructurări a unei discipline clasice, cum este mecanica, i se vor putea aduce continuu îmbunătăţiri, atît în conţinut, cît şi în formă. Unele din aceste îmbunătăţiri au şi putut fi efectuate, în urma preţioaselor sugestii şi observaţii făcute de către acad. prof. ing. Ştefan Bălan, acad. prof. dr. doc. Radu Voinea, prof. dr. doc. Gh. Buzdugan, prof. em. dr. doc. Gh. Silaş ş.a., cărora autorii le adresează şi pe această cale, calde mulţumiri.

Exprimîndu-şi speranţa de a putea aduce şi în viitor noi îmbunătăţiri lucrării, pe baza sugestiilor pe care le vor primi atît din partea specialiştilor din învăţămîntul superior, cît şi din partea tehnicienilor din producţie care o vor folosi, tuturor celor care vor binevoi să li se adreseze în acest sens, le mulţumesc cu anticipaţie, asigurîndu-i de întreaga lor recunoştinţă,

Autorii

Scanned with CamScanner

CUPRINS

Introducere 9

Partea întîi: TEORIA ECHIVALENȚEI SISTEMELOR VECTORIALE MECANICE 13

Capitolul I: **Echivalența sistemelor vectoriale mecanice** 13

§ 1. Modelarea matematică a operațiilor cu mărimi vectoriale mecanice . . . 13
1.1. Reprezentarea matematică a mărimilor mecanice 13
1.2. Operații cu vectori 27
1.3. Echivalența sistemelor vectoriale mecanice 70

Partea a doua: CINEMATICA ȘI DINAMICA RIGIDULUI 99

Capitolul II: **Cinematica mișcării absolute a rigidului** 99

§ 2. Cinematica mișcării absolute a punctului. 99
2.1. Noțiuni fundamentale în cinematica punctului 99
2.2. Problemele cinematicii punctului 108
§ 3. Cinematica mișcării absolute generale a rigidului 133
3.1. Parametrii de poziție ai rigidului în mișcare generală . . . 133
3.2. Parametrii cinematici ai mișcării generale a rigidului. 146
3.3. Problemele cinematicii rigidului 151
3.4. Proprietăți ale mișcării generale a rigidului 156
§ 4. Cinematica unor cazuri particulare de mișcări absolute ale rigidului . . 165
4.1. Cinematica mișcării de translație a rigidului 167
4.2. Cinematica mișcării de rotație în jurul unei axe fixe a rigidului . 171
4.3. Cinematica mișcării în jurul unui punct fix a rigidului 177
4.4. Cinematica mișcării plan-paralele a rigidului. 183
4.5. Cinematica mișcării elicoidale a rigidului 203

Capitolul III: **Cinematica mișcării compuse a rigidului** 209

§ 5. Problemele cinematicii mișcării compuse a rigidului 209
5.1. Cinematica mișcării compuse generale a rigidului 210
5.2. Cinematica unor cazuri particulare de mișcări compuse ale rigidului 222

Capitolul IV: **Dinamica mișcării absolute a rigidului** 233

§ 6. Probleme generale ale dinamicii rigidului 233
6.1. Caracteristicile inerțiale ale rigidului 233
6.2. Caracteristicile cinetice ale rigidului în mișcare generală 280
6.3. Caracteristicile dinamice ale mișcării generale a rigidului 289
§ 7. Dinamica mișcării absolute generale a rigidului 352
7.1. Teoremele fundamentale ale dinamicii rigidului 352
7.2. Problemele și ecuațiile dinamicii rigidului. 370
7.3. Problemele și ecuațiile staticii rigidului 379
§ 8. Dinamica unor cazuri particulare de mișcări absolute ale rigidului . . 384
8.1. Dinamica mișcării de translație 385

Scanned with CamScanner

8.2. Dinamica mişcării de rotaţie în jurul unei axe fixe 393
8.3. Dinamica mişcării în jurul unui punct fix, a unui rigid 409
8.4. Dinamica mişcării plan-paralele 423
8.5. Dinamica mişcării elicoidale a rigidului 436

§ 9. Dinamica punctului material 442
9.1. Utilizarea, în tehnică, a noţiunii de „punct material" 442
9.2. Dinamica mişcării absolute generale a punctului material 447
9.3. Dinamica unor cazuri particulare de mişcări absolute ale punctului material 456

Capitolul V: **Dinamica mişcării relative a rigidului** 486

§ 10. Dinamica mişcării relative a rigidului şi a punctului material 486
10.1. Relaţii generale în dinamica mişcării relative a rigidului . . . 486
10.2. Problemele şi ecuaţiile dinamicii mişcării relative a rigidului 490
10.3. Echilibrul relativ al rigidului 494
10.4. Dinamica unor cazuri particulare de mişcări relative ale rigidului 496

Scanned with CamScanner

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI

INTRODUCERE

Disciplina întitulată „MECANICA" studiază cele mai simple forme de mișcare a materiei, adică mișcările mecanice, sau simplele schimbări de poziție ale corpurilor, care nu afectează structura fizico-chimică a acestora.

În dezvoltarea ei, mecanica a plecat de la ipoteze luate din realitatea fizică, și-a consolidat concluziile teoretice la care a ajuns pe parcurs prin confruntarea lor cu rezultatele cercetărilor experimentale efectuate asupra fenomenelor mecanice și a folosit aceste rezultate, prin intermediul diverselor ramuri de mecanică aplicată, în domeniul tehnicii, ceea ce a făcut ca această disciplină să capete un puternic caracter fizic.

În același timp, prin metodele de cercetare folosite, proprii disciplinelor matematice, cu ajutorul cărora — pornind de la un număr restrîns de axiome și noțiuni fundamentale și utilizînd un bogat și variat instrument matematic — și-a construit întregul edificiu al disciplinei, mecanica a căpătat și o structură pronunțat matematică, constituind chiar, deseori, un puternic stimulent în dezvoltarea științelor matematice. Întrevăzînd, prin geniul său creator, rolul viitor al mecanicii în dezvoltarea gîndirii matematice, Leonardo da Vinci i-a dat chiar denumirea de „poezie a matematicilor".

Modelul mecanic adoptat în prezenta expunere a disciplinei de mecanică este „rigidul", reprezentînd o idealizare a corpurilor solide foarte puțin deformabile întîlnite în aplicațiile practice curente.

După aspectele urmărite în studiul mișcărilor rigidelor, este posibilă următoarea diviziune a mecanicii:

CINEMATICA, în care se studiază aspectele pur geometrice ale mișcărilor mecanice, adică diversele variații posibile ale stărilor de mișcare ale corpurilor, fără să se justifice și modul de apariție a acestor variații.

DINAMICA, în care se studiază mișcările corpurilor sub toate aspectele, justificîndu-se apariția variațiilor stărilor de mișcare prin existența interacțiunilor între corpuri.

Un caz particular al dinamicii îl constituie STATICA, în care se stabilesc condițiile pe care trebuie să le îndeplinească solicitările aplicate corpurilor, pentru ca acestea să-și păstreze starea de repaus.

Scanned with CamScanner

În ceea ce privește metoda de prezentare a conținutului disciplinei, se face precizarea că a fost adoptată metoda vectorială, datorită următoarelor două argumente importante:

1°. Majoritatea covîrșitoare a mărimilor fizice cu care lucrează mecanica au caracter vectorial, fiind reprezentabile prin vectori, fie liberi, fie legați, fie — cel mai adesea — alunecători.

2°. Metoda vectorială prezintă unele avantaje incontestabile asupra altor metode, între acestea putînd fi menționate:

— reprezentarea unitară și concretă a mărimilor și fenomenelor mecanice studiate cu ajutorul ecuațiilor vectoriale;

— modelarea matematică a proceselor mecanice prin relații mult mai simple, mai ușor de mînuit și chiar de reținut;

— posibilitatea de generalizare a unor rezultate și concluzii similare, evitîndu-se repetările inutile de demonstrații identice.

Din acest motiv s-a considerat util să se preceadă expunerea conținutului propriu-zis al disciplinei de mecanică cu o prezentare sumară, fără demonstrații, a principalelor elemente de calcul vectorial, prezentare inclusă într-un capitol introductiv tratînd problemele de echivalență a sistemelor vectoriale mecanice.

Noțiunile utilizate sînt definite pe măsura introducerii lor în expunere, la începutul fiecărui capitol în care apar ele pentru prima dată.

În legătură cu modul de organizare a materialului informațional, se precizează că întreg conținutul lucrării este prezentat în două volume, fiecare din ele cuprinzînd cîte două părți și anume:

Vol. I: MECANICA RIGIDULUI, cu următoarele două părți:

Partea întîi: *Teoria echivalenței sistemelor vectoriale mecanice*, în care se justifică procedeul de modelare matematică a operațiilor efectuate, pe baza legilor fizice, determinate, între mărimile vectoriale mecanice, precum și procedeele de înlocuire, unul prin altul, a două ansambluri de mărimi vectoriale de aceeași natură fizică;

Partea a doua: *Cinematica și dinamica rigidului*, în care se studiază, sub toate aspectele, mișcarea unui singur solid rigid — inclusiv starea particulară de repaus a sa —, în ipoteza că această mișcare nu influențează mișcările corpurilor din mediul înconjurător, cu care rigidul considerat se găsește în interacțiune.

Vol. II. MECANICA SISTEMELOR DE RIGIDE, cu părțile:

Partea a treia: *Cinematica și dinamica sistemelor mecanice*, în care se studiază transmisiile de mișcări și de solicitări între elementele unui ansamblu de rigide în interacțiune reciprocă, ultimele fiind luate în considerație și în cazul particular al ansamblurilor de rigide în stare de repaus.

Scanned with CamScanner

Partea a patra: *Probleme speciale ale mecanicii tehnice*, în care se extinde teoria expusă în primele trei părţi la studierea unor probleme mai complexe ale mecanicii, interesînd în mod deosebit practica inginerească, cum sînt: mecanica maşinilor simple, mecanica ciocnirilor, mecanica sistemelor cu un număr infinit de grade de libertate, mecanica corpurilor cu mase variabile.

Se mai face menţiunea că studiul cinematic şi dinamic al mişcării unui rigid va fi efectuat în două ipoteze distincte de lucru:

— în cazul mişcării rigidului în raport cu un sistem de referinţă — de regulă un sistem cartezian triortogonal drept *Oxyz* — considerat fix în spaţiu, deplasarea corpului fiind numită, în această situaţie, *mişcare absolută*;

— în cazul mişcării rigidului în raport cu un sistem de referinţă aflat la rîndul său în mişcare în spaţiu, deplasarea corpului în raport cu acest reper fiind numită *mişcare relativă*.

Alte precizări privind modul de organizare a materialului vor mai fi făcute pe parcursul expunerii.

În ceea ce priveşte bibliografia folosită la redactarea prezentei lucrări, ea va fi prezentată la sfîrşitul celui de-al doilea volum.

Scanned with CamScanner

Partea întîi

TEORIA ECHIVALENȚEI SISTEMELOR VECTORIALE MECANICE

Capitolul I

ECHIVALENȚA SISTEMELOR VECTORIALE MECANICE

§ 1. Modelarea matematică a operațiilor cu mărimi vectoriale mecanice

1.1. *Reprezentarea matematică a mărimilor mecanice*

Mărimile fizice cu care operează disciplina de mecanică sînt fie *mărimi scalare*, caracterizate numai prin *valoare*, fie — și aceasta în marea majoritate a cazurilor — *mărimi vectoriale*, caracterizate prin *intensitate*, *direcție*, *sens* și *punct de aplicație*.

Aprecierea unei mărimi scalare s se face prin compararea ei cu o mărime de aceeași natură fizică, aleasă în mod convențional ca *unitate de măsură a mărimii* s și notată cu simbolul [u.m.(s)], rezultatul acestei comparări fiind un număr real $N_s \in R$, exprimînd raportul valorilor celor două mărimi; cunoașterea acestui raport permite să se exprime *modulul mărimii scalare* s, notat cu simbolul $|s|$ și definit prin relația

$$|s| = |N_s| \cdot [\text{u.m.}(s)] \tag{1.1}$$

respectiv *valoarea algebrică a mărimii* s, notată chiar cu simbolul mărimii și definită prin relația

$$s = N_s \cdot [\text{u.m.}(s)], \tag{1.2}$$

ultima noțiune fiind introdusă pentru aprecierea mărimilor scalare care pot evolua cu unul, sau altul, din cele două semne algebrice.

Scanned with CamScanner

Fiecare din mulțimile $\mathcal{S}$ de mărimi mecanice scalare s, de o natură fizică determinată, este caracterizată prin următoarele proprietăți:

— *este prevăzută cu o operație de echivalență*, exprimată prin egalitatea

$$s_1 = s_2 \ , \ (s_1, s_2 \in \mathcal{S}) \tag{1.3}$$

care implică, în baza relației (1.2), satisfacerea condiției

$$N_{s_1} = N_{s_2} \ , \ (N_{s_1}, N_{s_2} \in \mathcal{R}); \tag{1.4}$$

— *este prevăzută cu operația de adunare*, în raport cu care formează un grup abelian, suma

$$s = s_1 + s_2 \ , \ (s_1, \ s_2, \ s \in \mathcal{S}) \tag{1.5}$$

sau, folosind expresiile (1.2)

$$N_s \cdot [\text{u.m.}(s)] = (N_{s_1} + N_{s_2}) \cdot [\text{u.m.}(s)]$$

implicînd satisfacerea egalității

$$N_s = N_{s_1} + N_{s_2}, \ (N_{s_1}, N_{s_2}, N_s \in \mathcal{R}); \tag{1.6}$$

— *este prevăzută cu operația de înmulțire cu un element din mulțimea numerelor reale*, această operație

$$s' = ns \ \ (s, s' \in \mathcal{S}; \ n \in \mathcal{R}) \tag{1.7}$$

transformînd mărimea s într-o altă mărime din aceeași mulțime $\mathcal{S}$, transformarea satisfăcînd condiția

$$N_{s'} \cdot [\text{u.m.}(s)] = nN_s \cdot [\text{u.m.}(s)]$$

adică

$$N_{s'} = nN_s \ \ (N_s, \ N_{s'} \ , \ n \in \mathcal{R}); \tag{1.8}$$

— *este prevăzută cu operația de înmulțire cu elemente din alte mulțimi de mărimi scalare*, de altă natură fizică, această operație

Scanned with CamScanner

stabilind o corespondență univocă, pe baza unei legi fizice determinate, între perechile de mărimi $m \in \mathcal{M}$ și $s \in \mathcal{S}$ și anumite elemente ale unei alte mulțimi de mărimi scalare $l \in \mathcal{L}$;

$$l = m \cdot s. \tag{1.9}$$

Folosind și acum expresiile (1.2) pentru fiecare din mărimi, va rezulta egalitatea

$$N_l \cdot [\text{u.m.}(l)] = (N_m \cdot N_s) \cdot [\text{u.m.}(m)] \cdot [\text{u.m.}(s)].$$

Pe de altă parte, existența legii fizice în baza căreia a fost scrisă operația de înmulțire implică exprimarea unității de măsură a mărimii l ca produs al unităților de măsură ale mărimilor înmulțite, adică satisfacerea egalității

$$[\text{u.m.}(l)] = [\text{u.m.}(m)] \cdot [\text{u.m.}(s)].$$

Rezultă deci relația

$$N_l = N_m N_s, \ (N_l, \ N_m, \ N_s \in \mathcal{R}). \tag{1.10}$$

Relația (1.2), precum și relațiile (1.4), (1.6), (1.8) și (1.10) stabilite cu ajutorul ei, permite să se tragă concluzia că toate operațiile efectuate, pe baza legilor fizice determinate, între mărimile mecanice scalare pot fi reprezentate cu ajutorul operațiilor similare efectuate între elementele reprezentative (N_s, N_m, N_l etc.) din corpul real; această posibilitate de reprezentare justifică, în consecință, extinderea integrală a regulilor algebrei scalare pe corpul real la cazul operațiilor efectuate între mărimile mecanice scalare.

Trecînd la examinarea mărimilor fizice vectoriale ale mecanicii, trebuie de făcut mai întîi observația că și aprecierea unei asemenea mărimi poate fi făcută numai prin compararea ei cu o altă mărime vectorială, de aceeași natură fizică și cu aceeași direcție — nu neapărat și de același sens — această din urmă mărime fiind numită *mărime vectorială unitară*. În urma unei asemenea comparări, o mărime vectorială $\bar{a}$, cu mărimea vectorială unitară $\bar{u}_a$, va putea fi caracterizată prin următoarele patru elemente:

— *Modulul mărimii vectoriale*, notat cu simbolul $|\bar{a}|$ și determinat prin relația

$$|\bar{a}| = |N_a| \cdot [\text{u.m.}(a)], \ (N_a \in \mathcal{R}), \tag{1.11}$$

Scanned with CamScanner

unde $|N_a| \in \mathscr{R}_+$ exprimă rezultatul cantitativ al comparării, iar [u.m.(a)] reprezintă unitatea de măsură a valorii mărimii fizice considerate; modulul mărimii vectoriale va caracteriza *intensitatea* ei.

— *Suportul mărimii vectoriale*, sau *linia de acțiune* a ei, reprezentînd dreapta din spațiu în lungul căreia se exercită, cu intensitate maximă, influența mărimii $\bar{a}$ în desfășurarea procesului mecanic.

— *Valoarea scalară, raportată la mărimea vectorială unitară respectivă, a mărimii vectoriale*, notată cu simbolul a și definită prin relația

$$a = \pm |\bar{a}| = N_a \cdot [\text{u.m.}(a)], \quad (N_a \in \mathscr{R}), \tag{1.12}$$

care va preciza sensul mărimii vectoriale $\bar{a}$, semnul (+) corespunzînd cazului cînd mărimile $\bar{a}$ și $\bar{u}_a$ au același sens, iar semnul (—) în caz contrar.

Mulțimea valorilor scalare a, ale mărimilor vectoriale $\bar{a} \in \overline{\mathscr{A}}$, va fi notată cu simbolul $\mathscr{A}$.

— *Punctul de aplicație al mărimii vectoriale* $\bar{a}$, reprezentat prin punctul din spațiu în care se exercită direct, în procesul mecanic, influența mărimii vectoriale considerate.

În legătură cu posibilitatea de reprezentare matematică a operațiilor care pot fi efectuate, pe bază de legi fizice determinate, între mărimile vectoriale mecanice, trebuie menționat faptul că, analog mulțimii numerelor reale utilizate pentru reprezentarea operațiilor între mărimile scalare fizice, a fost creată și o mulțime, $\overline{\mathscr{V}}$, de mărimi vectoriale adimensionale $\bar{v} \in \overline{\mathscr{V}}$, avînd elementele corpului real ca intensități, ($|\bar{v}| \in \mathscr{R}$), pentru reprezentarea mărimilor fizice vectoriale. Aceste mărimi orientate adimensionale au primit numele de *vectori*, iar în cazul cînd intensitățile lor sînt egale cu unitatea, ei se numesc *versori*.

Prin orientarea sa, un asemenea versor poate caracteriza direcția și sensul unei axe (Δ) din spațiu — adică o dreaptă pe care se alege un sens pozitiv de parcurs, indicat uneori printr-un vîrf de săgeată —, din care motiv se și vorbește curent de *versorul* $\bar{i}_\Delta$ *al axei* (Δ), scriindu-se:

$$\bar{i}_\Delta = \text{vers}(\Delta); \quad (\bar{i}_\Delta \in \overline{\mathscr{V}}; \ |\bar{i}_\Delta| = 1 \in \mathscr{R}). \tag{1.13}$$

Între alte operații, care vor fi definite ulterior, în mulțimea versorilor se introduce și *operația de înmulțire a unui versor* $\bar{i}_\Delta$ *cu*

un scalar $k \in \mathcal{K}$, indiferent de natura fizică a acestuia, operația, tradusă prin relația

$$\bar{k} = k\bar{i}_\Delta, \quad (\bar{i}_\Delta \in \bar{\mathcal{V}}; \ \bar{k} \in \bar{\mathcal{K}}) \tag{1.14}$$

reprezentînd o transformare care pune în corespondență biunivocă elementele mulțimii versorilor cu elementele unei mulțimi de mărimi vectoriale fizice după următoarele axiome:

— modulul vectorului $\bar{k}$ este egal cu modulul scalarului k, vectorul $\bar{k}$ avînd deci dimensiunile fizice ale scalarului k;

— suportul vectorului $\bar{k}$ coincide cu suportul versorului $\bar{i}_\Delta$;

— valoarea scalară a vectorului $\bar{k}$, raportată la versorul $\bar{i}_\Delta$, este egală cu valoarea algebrică a scalarului k;

— punctul de aplicație al vectorului $\bar{k}$ este același ca și al versorului $\bar{i}_\Delta$.

În baza operației definite mai sus, se poate scrie următoarea *expresie a mărimii vectoriale* $\bar{a}$ *în funcție de versorul* $\bar{i}_a$ *al direcției sale*:

$$\boxed{\bar{a} = a\bar{i}_a} \quad (\bar{i}_a \in \bar{\mathcal{V}}_i; \ \bar{a} \in \bar{\mathcal{A}}), \tag{1.15}$$

a fiind *valoarea scalară a mărimii vectoriale* $\bar{a}$ *raportată la versorul* $\bar{i}_a$ *al direcției sale.*

Din studiile efectuate asupra comportării mărimilor mecanice vectoriale rezultă că fiecare mulțime $\bar{\mathcal{A}}$ de mărimi vectoriale, de o anumită natură fizică, este prevăzută cu următoarele operații:

O operație de echivalență, exprimată prin egalitatea

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_2, \quad (\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{\mathcal{A}}) \tag{1.16}$$

care implică, în baza exprimării (1.15), satisfacerea condițiilor

$$a_1 = a_2, \quad (a_1, a_2, \in \mathcal{A}) \tag{1.19}$$

și

$$\bar{i}_{a_1} = \bar{i}_{a_2}, \qquad (\bar{i}_{a_1}, \bar{i}_{a_2} \in \bar{\mathcal{V}}). \tag{1.20}$$

O operație de adunare, în raport cu care mulțimea $\bar{\mathcal{A}}$ formează un grup abelian, exprimată prin relația

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2, \quad (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a} \in \bar{\mathcal{A}}). \tag{1.21}$$

Scanned with CamScanner

Folosind exprimarea (1.15) rezultă egalitatea

$$a\bar{i}_a = a_1\bar{i}_{a_1} + a_2\bar{i}_{a_2},$$

sau încă, ținînd seama și de relația (1.12), se mai poate scrie

$$N_a\bar{i}_a = N_{a_1}\bar{i}_{a_1} + N_{a_2}\bar{i}_{a_2}, \quad (N_{a_1}, N_{a_2}, N_a \in \mathscr{R}). \tag{1.22}$$

O operație de înmulțire cu mărimi scalare, exprimată prin relația

$$\bar{k} = s\bar{a} \quad (s \in \mathscr{S}\,;\ \bar{a} \in \overline{\mathscr{A}}\,;\ \bar{k} \in \overline{\mathscr{K}}) \tag{1.23}$$

care pune în corespondență biunivocă, pe baza unei legi fizice determinate, elemente ale mulțimii $\overline{\mathscr{A}}$ de mărimi vectoriale $\bar{a}$, cu elemente ale unei alte mulțimi de mărimi vectoriale, $\overline{\mathscr{K}}$, de altă natură fizică, cu dimensiunile rezultînd din înmulțirea dimensiunilor fizice ale celor două mărimi între care s-a efectuat produsul.

Folosind și acum exprimarea (1.15) a mărimilor vectoriale, expresiile (1.12) ale valorilor lor scalare, precum și expresia (1.2) a valorii algebrice a mărimii scalare s, rezultă egalitatea

$$N_k\bar{i}_k \cdot [\text{u.m.}(k)] = N_s \cdot N_a \cdot \bar{i}_a \cdot [\text{u.m.}(s)] \cdot [\text{u} \cdot \text{m.}(a)].$$

Existența, la baza operației definiției, a unei legi fizice, implică existența următoarei relații între unitățile de măsură:

$$[\text{u.m.}(k)] = [\text{u.m.}(s)] \cdot [\text{u.m.}(a)]$$

și deci următoarea relație între versori

$$N_k\bar{i}_k = N_s N_a \bar{i}_a \quad \begin{matrix}(\bar{i}_a,\ \bar{i}_k \in \overline{\mathscr{V}}) \\ (N_s, N_a, N_k \in \mathscr{R}).\end{matrix} \tag{1.24}$$

O operație de înmulțire scalară între două elemente aparținînd fie la două mulțimi de mărimi vectoriale de natură fizică distinctă, $\overline{\mathscr{R}}$ și $\overline{\mathscr{A}}$, fie, în particular, aceleiași mulțimi, definită prin relația

$$s = \bar{r}\bar{a} = |\bar{r}|\,|\bar{a}| \cos(\bar{r}, \bar{a}), \quad \begin{matrix}(\bar{r} \in \overline{\mathscr{R}}) \\ (\bar{a} \in \overline{\mathscr{A}}) \\ (s \in \mathscr{S})\end{matrix} \tag{1.25}$$

Scanned with CamScanner

cu

$$((\bar{r}, \bar{a}) \leqslant \pi \text{ rad.})$$

și care pune în corespondență univocă, pe bază de legi fizice determinate, perechi de elemente din mulțimile $\overline{\mathscr{R}}$ și $\overline{\mathscr{A}}$, cu un element al mulțimii $\mathscr{S}$ de mărimi scalare s.

Folosind și acum exprimările (1.15), (1.12) și (1.2) rezultă egalitatea

$$N_s \cdot [\text{u.m.}(s)] = N_r N_a \bar{i}_r \bar{i}_a \cdot [\text{u.m.}(r)] \cdot [\text{u.m.}(a)]$$

și deci, ținînd seama și de condiția

$$[\text{u.m.}\ (s)] = [\text{u.m.}(r)] \cdot [\text{u.m.}(a),$$

justificată de legea fizică aflată la baza definiției operației, se obține următoarea relație între versori:

$$N_s = N_r N_a \bar{i}_r \bar{i}_a \quad \begin{matrix} (\bar{i}_r, \bar{i}_a, \in \overline{\mathscr{V}}) \\ (N_s, N_r, N_a \in R). \end{matrix} \tag{1.26}$$

O operație de înmulțire vectorială între două elemente aparținînd fie la două mulțimi de mărimi vectoriale de natură fizică distinctă, $\overline{\mathscr{R}}$ și $\overline{\mathscr{A}}$, fie chiar aceleași mulțimi, definită prin relația

$$\bar{p} = \bar{r} \times \bar{a} = |\bar{r}|\,|\bar{a}| \sin(\bar{r}, \bar{a}) \cdot \bar{i}_p, \quad \begin{matrix} (\bar{r} \in \overline{\mathscr{R}}); \\ (\bar{a} \in \overline{\mathscr{A}}); \\ (\bar{p} \in \overline{\mathscr{P}}); \\ (\bar{i}_p \in \overline{\mathscr{V}}), \end{matrix} \tag{1.27}$$

$$(\bar{r}, \bar{a}) \leqslant \pi \ (\text{rad}),$$

unde versorul $\bar{i}_p$ al direcției vectorului $\bar{p}$ este determinat după *regula burghiului drept.*

Această ultimă operație pune în corespondență univocă, tot pe baza unei legi fizice determinate, perechi de mărimi vectoriale din mulțimile $\overline{\mathscr{R}}$ și $\overline{\mathscr{A}}$, cu elemente ale unei alte mulțimi de mărimi vectoriale, $\overline{\mathscr{P}}$, de natură fizică distinctă.

Scanned with CamScanner

Folosind și de astă dată exprimările (1.15) și (1.12), rezultă egalitatea

$$N_p \vec{i}_p \cdot [\text{u.m.}(p)] = N_r \cdot N_a \cdot \vec{i}_r \times \vec{i}_a \cdot [\text{u.m.}(r)] \cdot [\text{u.m.}(a)],$$

de unde, ținînd seama de legătura dintre unitățile de măsură

$$[\text{u.m.}(p)] = [\text{u.m.}(r)] \cdot [\text{u.m.}(a)],$$

impusă de legea fizică pe baza căreia se definește operația, se obține relația

$$N_p \vec{i}_p = N_r N_a \cdot \vec{i}_r \times \vec{i}_a, \quad \begin{matrix} (\vec{i}_a, \vec{i}_r, \vec{i}_p \in \overline{\mathscr{V}}) \\ (N_a, N_r, N_p \in \mathscr{R}). \end{matrix} \tag{1.28}$$

Relația (1.15), precum și relațiile (1.20), (1.22), (1.24), (1.26) și (1.28) stabilite pe baza ei, arată că diversele operații care pot fi efectuate, pe bază de legi fizice determinate, între diversele mărimi vectoriale, sau între acestea și mărimi scalare mecanice, pot fi reprezentate matematic prin operații similare efectuate între versorii diferitelor direcții din spațiu.

În scopul unei reprezentări corecte a realității fizice, mulțimea versorilor $\vec{i}_v \in \overline{\mathscr{V}}$ și deci și a tuturor vectorilor

$$\bar{v} = v\vec{i}_v, \qquad (v \in \mathscr{R}; \vec{i}_v, \bar{v} \in \overline{\mathscr{V}})$$

a fost prevăzută cu următoarele operații:

Operația de echivalență, exprimată prin egalitatea

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2, \quad (\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \overline{\mathscr{V}}) \tag{1.29}$$

care implică satisfacerea cel puțin a următoarelor trei condiții:

— egalitatea modulilor vectorilor, $(|\bar{v}_1| = |\bar{v}_2|)$;
— coincidența suporturilor;
— identitatea versorilor $(\vec{i}_{v_1} = \vec{i}_{v_2})$.

Operația de adunare, în raport cu care mulțimea $\overline{\mathscr{V}}$ formează un grup abelian. Această operație, efectuată în punctul comun de aplicație al vectorilor ce se sumează și notată

$$\bar{\mathscr{v}} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2, \quad (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{\mathscr{v}} \in \overline{\mathscr{V}}) \tag{1.30}$$

Scanned with CamScanner

este definită prin *regula paralelogramului* (fig. 1.1, a), extinsă la *regula paralelipipedului* în cazul sumei a trei vectori cu orientări oarecare în spațiu (fig. 1.1, b).

Modul de definire a sumei a trei vectori permite și efectuarea operației inverse, de descompunere a oricărui vector în trei compo-

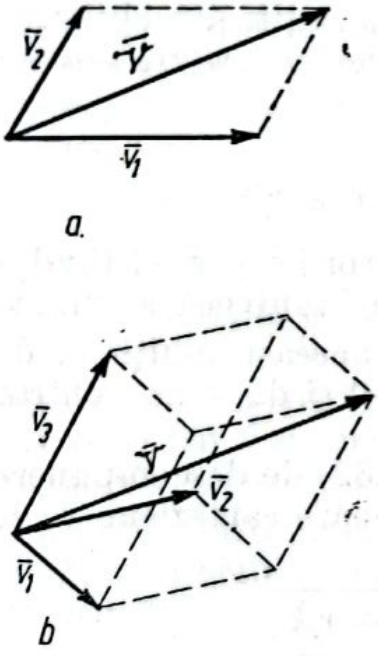


Fig. 1.1.

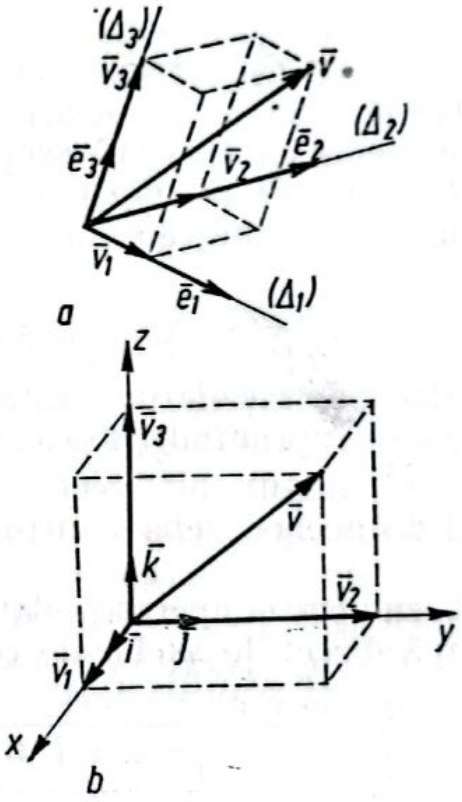


Fig. 1.2.

nente după direcții oarecare în spațiu, determinate prin versorii $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ și $\bar{e}_3$, și trecînd prin punctul de aplicație al vectorului (fig. 1. 2, a); în particular, descompunerea va putea fi efectuată după axele sistemului de referință cartezian triortogonal drept, cu originea considerată în punctul de aplicație al vectorului dat (fig. 1.2, b), ai căror versori sînt notați cu simbolurile

$$\bar{i} = \text{vers}\ (Ox);\ \bar{j} = \text{vers}\ (Oy);\ \bar{k} = \text{vers}\ (Oz). \tag{1.31}$$

Se demonstrează că descompunerea în cele trei componente:

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 \tag{1.32}$$

este unică pentru un sistem dat de trei versori necoplanari.

Scanned with CamScanner

Se va mai observa că în cazul descompunerii vectorului $\bar{v}$ după axele sistemului de referință cartezian triortogonal, valorile scalare ale componentelor vectorului, raportate la versorii axelor, reprezintă *proiecțiile (ortogonale) ale vectorului pe axele de coordonate carteziene*, ele fiind date de relațiile

$$v_x = |\bar{v}| \cos(\bar{v}, \bar{i}); \; v_y = |\bar{v}| \cos(\bar{v}, \bar{j}); \; v_z = |\bar{v}| \cos(\bar{v}_1, \bar{k}). \quad (1.33)$$

Relațiile precedente permit să se tragă concluzia că proiecția unui vector pe o axă va fi pozitivă, sau negativă, după cum unghiul format de vector cu versorul axei este ascuțit, sau obtuz.

— *Operația de înmulțire a vectorilor cu scalari din corpul real*, relația care o definește:

$$\bar{v}' = \lambda \bar{v}, \quad (\lambda \in \mathcal{R}; \; \bar{v}, \bar{v}' \in \overline{\mathcal{V}}) \quad (1.34)$$

numită *relație de coliniaritate* între vectorii $\bar{v}'$ și $\bar{v}$ — λ fiind *factorul de coliniaritate* — exprimînd transformarea biunivocă a unui vector din mulțimea $\overline{\mathcal{V}}$ într-un alt vector din aceeași mulțime, de aceeași direcție și de același sens pentru $\lambda > 0$ și de sens contrar pentru $\lambda < 0$.

În baza acestei operații relația (1.32) de descompunere a unui vector după direcțiile axelor de coordonate carteziene va lua forma

$$\boxed{\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}} \quad (1.34')$$

numită *expresia analitică a vectorului $\bar{v}$ în coordonate carteziene.*

Operațiile introduse pînă acum, precum și observația că în spațiul geometric tridimensional descompunerea unui vector după trei versori cu orientări oarecare în spațiu este univocă, permit să se tragă concluzia că mulțimea vectorilor $\bar{v} \in \overline{\mathcal{V}}$ este organizată ca un *spațiu vectorial tridimensional pe corpul real*, cu *baza* reprezentată prin trei versori cu orientări oarecare în spațiu, aceștia fiind, de regulă, versorii axelor de coordonate carteziene.

— *Operația de înmulțire scalară între vectori*, definită prin relația

$$m = \bar{v}\bar{w} = |\bar{v}| \, |\bar{w}| \cos(\bar{v}, \bar{w}), \; (\bar{v}, \bar{w}, \in \overline{\mathcal{V}}; \; m \in \mathcal{R}), \quad (1.35)$$

care stabilește o corespondență univocă între perechile de elemente ale mulțimii $\overline{\mathcal{V}}$ și elemente ale mulțimii numerelor reale.

Scanned with CamScanner

În cazul coincidenței celor doi vectori care se înmulțesc scalar ($\bar{w} = \bar{v}$), produsul lor va reprezenta pătratul *normei* vectorului, adică

$$m = \bar{v}\bar{v} = \bar{v}^2 = \| \bar{v} \|^2 = | v |^2 = v^2, \tag{1.36}$$

ceea ce înseamnă că prin asocierea și a acestei operații, spațiul vectorial tridimensional $\bar{\mathscr{V}}$ a devenit normat. Avînd în vedere faptul că această normă are și semnificația geometrică de distanță între punctele ce reprezintă extremitățile vectorului, spațiul vectorial considerat este chiar un spațiu metric.

— *Operația de înmulțire vectorială între vectori*, definită prin relația

$$\bar{p} = \bar{v} \times \bar{w} = p\, \bar{i}_p = |\bar{v}|\,|\bar{w}| \sin(\bar{v}, \bar{w})\, \bar{i}_p, \tag{1.37}$$

$$(\bar{v}, \bar{w}) \leqslant \pi \text{ (rad)} \qquad (\bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \bar{i}_p \in \bar{\mathscr{V}})$$

care stabilește o corespondență univocă între o pereche de vectori ai spațiului vectorial $\bar{v}$ și un alt vector al aceluiași spațiu.

Introducerea acestei ultime operații în spațiul vectorial metric $\bar{\mathscr{V}}$ a permis construirea unei algebre vectoriale, de ordinul trei, pe corpul real $\mathscr{R}$, cu tabla de înmulțire definită prin produsele vectoriale dintre versorii bazei:

$$\bar{e}_i \times \bar{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \gamma_{ijk} \bar{e}_k\,, \quad (i,\ j = 1,2,3) \tag{1.38}$$

unde γ_{ijk} sînt *constantele de structură* ale algebrei, relațiile precedente fiind justificate de faptul că fiecare produs vectorial poate fi descompus, la rîndul său, după vectorii bazei.

Prin alegerea versorilor axelor de coordonate carteziene ca elemente ale bazei, ($\bar{e}_1 = \bar{i}$; $\bar{e}_2 = \bar{j}$; $\bar{e}_3 = \bar{k}$), tabela de înmulțire capătă o formă particulară, cu valori particulare ale constantelor de structură, prezentate mai jos;

Tabela de înmulțire

$\bar{e}_i \times \bar{e}_j$	$\bar{e}_1 = \bar{i}$	$\bar{e}_2 = \bar{j}$	$\bar{e}_3 = \bar{k}$
$\bar{e}_1 = \bar{i}$	0	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{e}_2 = \bar{j}$	$-\bar{k}$	0	$\bar{i}$
$\bar{e}_3 = \bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	0

Tabela const. de structură

γ_{ijk}	$\bar{e}_1 = \bar{i}$	$\bar{e}_2 = \bar{j}$	$\bar{e}_3 = \bar{k}$
$\bar{e}_1 = \bar{i}$	0	1	−1
$\bar{e}_2 = \bar{j}$	−1	0	1
$\bar{e}_3 = \bar{k}$	1	−1	0

Scanned with CamScanner

Relațiile stabilite pe parcurs permit să se tragă concluzia că toate operațiunile efectuate între mărimile vectoriale ale mecanicii, sau între acestea și mărimile fizice scalare, vor putea fi reprezentate cu ajutorul algebrei vectoriale de ordinul trei pe corpul real.

În legătură cu corespondența dintre mărimile vectoriale mecanice și elementele spațiului vectorial tridimensional considerat mai sus, mai trebuie examinat un aspect și anume acela al reprezentării geometrice a mărimilor vectoriale prin vectori geometrici, reprezentare folosită curent în ramurile de mecanică aplicată — în deosebi în problemele plane și care constă în următoarele operații :

1°. Reprezentarea domeniului real al spațiului în care evoluează mărimile mecanice — volumele, respectiv ariile, corpurilor care intervin în procesul mecanic studiat — , printr-un domeniu reprezentativ în planul desenului, cu respectarea, în cazul plan, a următoarelor condiții :

— păstrarea nealterată a unghiurilor ;

— reducerea distanțelor într-un raport determinat

$$\sigma_L = \frac{L}{l}\left(\frac{\text{m}}{\text{cm}}\right), \tag{1.39}$$

numit *scară de reprezentare a distanțelor*, L (m) fiind distanța reală reprezentată printr-un segment de lungime egală cu l (cm), (obișnuit, $l=1$ cm). Legătura dintre, o distanță reprezentată, d, și segmentul ei reprezentativ d^r, se exprimă prin relația

$$d = \sigma_L \cdot d^r. \tag{1.40}$$

2°. Reprezentarea sistemului de referință cartezian, invariabil atașat domeniului în care evoluează mărimile vectoriale și la care sînt raportate aceste mărimi, printr-un sistem de referință reprezentativ, a cărui amplasare în desen să reflecte amplasarea reală a primului sistem.

3°. Reprezentarea tuturor mărimilor vectoriale, indiferent de natura lor fizică, prin *vectori geometrici*, adică prin *segmente orientate*, situate pe drepte determinate, adoptîndu-se următoarea convenție de reprezentare :

— Modulul vectorului geometric $\bar{a}^r$, exprimat obișnuit în cm, va preciza modulul mărimii vectoriale reprezentate, $\bar{a}$, în baza unei *scări de reprezentare* definită prin relația

$$\sigma_a = \frac{q_a}{l_a}\left(\frac{[\text{u.m.}(a)]}{\text{cm}}\right), \tag{1.41}$$

Scanned with CamScanner

aceasta însemnînd că un vector geometric de lungime egală cu l_a (cm) — obișnuit, $l_a = 1$(cm) — va reprezenta o mărime vectorială $\bar{a}$ cu modulul egal cu q_a unități; în modul acesta, între modulul $|\bar{a}^r|$ al oricărui vector reprezentativ al unei anumite mărimi vectoriale și între modulul acestei mărimi reprezentate se stabilește relația

$$|\bar{a}| = \sigma_a |\bar{a}^r| ; \tag{1.42}$$

— suportul vectorului geometric $\bar{a}^r$ va reprezenta, în desen (fig. 1.3) linia de acțiune a mărimii vectoriale $\bar{a}$;

— sensul vectorului geometric $\bar{a}^r$ va preciza sensul mărimii vectoriale reprezentate $\bar{a}$;

— punctul B^r de aplicație al vectorului geometric $\bar{a}^r$ va indica poziția în spațiu a punctului de aplicație al mărimii vectoriale reprezentate $\bar{a}$.

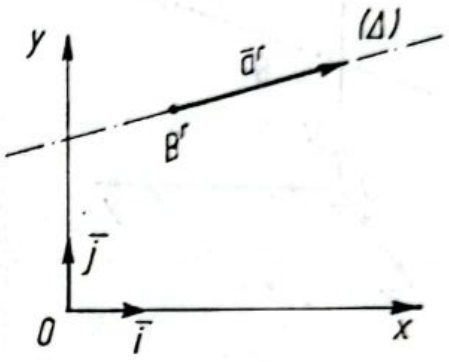


Fig. 1.3.

În baza acestei convenții de reprezentare, precum și în baza modului de definire a operației de înmulțire a unei mărimi vectoriale cu un scalar, se poate scrie următoarea *relație de reprezentare* a unei mărimi vectoriale $\bar{a}$ prin vectorul geometric $\bar{a}^r$:

$$\boxed{\bar{a} = \sigma_a \bar{a}^r} . \tag{1.43}$$

În legătură cu reprezentarea mărimilor vectoriale prin vectori geometrici mai trebuie făcute următoarele precizări:

— În cazul cînd reprezentarea urmărește evidențierea și a aspectelor cantitative, introducerea scărilor de reprezentare este absolut obligatorie:

— În cazurile cînd reprezentările geometrice nu urmăresc decît aspecte calitative, fiind folosite numai pentru a face mai intuitivă prezentarea unui fenomen mecanic, se poate face abstracție de scara de reprezentare, figurîndu-se, în schemele grafice, vectorii reprezentativi astfel încît să respecte direcțiile și sensurile mărimilor reprezentate și cel mult relația de ordine dintre modulii mărimilor de aceeași natură fizică, scriindu-se în acest caz, în dreptul vectorilor reprezentativi, chiar simbolurile mărimilor vectoriale reprezentate (fig. 1.4).

Scanned with CamScanner

Se înțelege că vectorii geometrici reprezentativi vor putea fi exprimați, ca și celelalte mărimi vectoriale, cu ajutorul versorilor din spațiul vectorial $\overline{\mathcal{V}}$; observîndu-se că, în baza convenției de reprezentare adoptate, vectorul reprezentativ $\bar{a}'$ și mărimea vectorială reprezentată $\bar{a}$, trebuie considerați ca avînd același versor ($\dot{i}_{a'} = \dot{i}_a \in \overline{\mathcal{V}}$), se va putea scrie

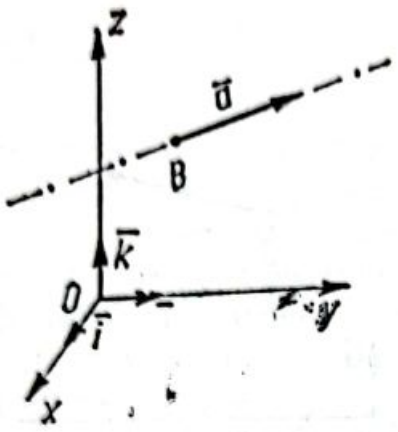


Fig. 1.4.

$$\bar{a}' = a'\dot{i}_a, \quad (\dot{i}_a \in \overline{\mathcal{V}}; \ \bar{a}' \in \overline{\mathcal{V}}_g), \qquad (1.44)$$

unde prin $\overline{\mathcal{V}}_g$ s-a notat mulțimea vectorilor geometrici. Ultima relație arată că și operațiile efectuate între vectorii geometrici reprezentativi vor putea fi reprezentate prin algebra vectorială de ordinul trei pe corpul real.

Tot în legătură cu reprezentarea operațiilor între mărimile vectoriale ale mecanicii cu ajutorul algebrei vectoriale mai trebuie menționat faptul că, în procesele mecanice, într-un domeniu determinat al spațiului pot fi distribuite ansambluri de mărimi vectoriale de diverse naturi fizice, alcătuind sisteme *vectoriale mecanice.*

Reamintind că toate operațiile dintre două mărimi vectoriale —sau dintre o mărime vectorială și o mărime scalară — , precizate la început, au fost definite ca efectuîndu-se în punctul comun de aplicație al celor două mărimi vectoriale — respectiv, în punctul de aplicație al mărimii vectoriale înmulțite cu o mărime scalară —, trebuie de făcut în același timp precizarea că la unele mărimi vectoriale mecanice este posibilă mutarea, în anumite condiții, a punctului de aplicație, în timp ce la altele nu ; în funcție de comportarea lor la schimbarea punctului de aplicație, mărimile vectoriale ale mecanicii pot fi împărțite în trei mari mulțimi, cărora le vor corespunde mulțimi de vectori cu proprietăți similare în ceea ce privește comportarea la schimbarea punctului de aplicație și anume :

— *mulțimea mărimilor vectoriale cu același efect fizic în toate punctele unui domeniu determinat al spațiului* ; această mulțime va fi reprezentată prin *mulțimea vectorilor liberi*, notată cu simbolul $\overline{\mathcal{V}}$ și formată din vectori cărora li se vor putea da orice punct de aplicație în domeniul spațiului în care sînt distribuiți și, în particular, chiar în originea axelor de referință ;

— *mulțimea mărimilor vectoriale cu același efect fizic în toate punctele situate numai pe un segment determinat al liniilor lor de acțiune*; această mulțime va fi studiată cu ajutorul *mulțimii vectorilor alunecători*, notată cu simbolul $\overline{\mathcal{V}}_a$ și formată din vectori cărora li se pot muta punctele de aplicație numai în lungul suporturilor lor;

— *mulțimea mărimilor vectoriale cu efecte fizice strict dependente de pozițiile punctelor de aplicație*; această ultimă mulțime de mărimi vectoriale mecanice va fi studiată cu ajutorul *mulțimii vectorilor legați*, notată cu simbolul $\overline{\mathcal{V}}_l$ și formată din vectori cu punctele de aplicație precis determinate.

Studiul sistemelor vectoriale corespunzătoare celor trei mulțimi distincte de vectori, modelînd matematic comportarea celor trei mulțimi distincte de mărimi vectoriale, va fi efectuat în continuare, defalcat pe următoarele două probleme fundamentale:

— prezentarea operațiilor algebrice introduse în cadrul fiecăreia din cele trei mulțimi de vectori, precum și a unor elemente de analiză vectorială, necesare înțelegerii operațiillor de derivare și integrare în raport cu timpul a mărimilor vectoriale care evoluează în timp;

— prezentarea problemelor de echivalență a sistemelor vectoriale aparținînd fiecăreia din cele trei mulțimi distincte de vectori, modelîndu-se astfel operațiile de înlocuire a unui sistem de mărimi vectoriale de o anumită natură fizică, printr-un alt sistem de mărimi vectoriale, de aceeași natură fizică și echivalent cu primul, adică cu aceeași influență în evoluția proceselor mecanice în care intervin.

1.2. Operații cu vectori

1.2.1. Elemente de algebră și analiza vectorilor liberi

1°. **Parametrii scalari ai unui vector liber.** Relația de echivalență introdusă în mulțimea vectorilor liberi are următoarea formulare:

Doi vectori, $\bar{v}_1$, și $\bar{v}_2$, aparținînd mulțimii vectorilor liberi, sînt echivalenți între ei atunci cînd au:

— același modul;

— suporturi paralele;

— același sens,

relația de echivalență traducîndu-se prin egalitatea

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2, \ (\bar{v}_1, \ \bar{v}_2 \in \mathcal{V}). \tag{1.45}$$

Neprecizarea punctului de aplicație în formularea relației de echivalență arată că operațiile de adunare și înmulțire între vectorii liberi pot fi efectuate în orice punct arbitrar al spațiului.

De asemenea, faptul că punctul de aplicație al unui vector liber poate fi luat oriunde în spațiu, arată cu un asemenea vector, $\bar{v}$, va putea fi considerat complet determinat atunci cînd i se cunoaște modulul său $|\bar{v}|$ și două din cosinusurile lui directoare (cosinusurile unghiurilor $(\bar{v}, \bar{i})$, $(\bar{v}, \bar{j})$ și $(\bar{v}_1, \bar{k})$ formate de vector cu versorii celor trei axe de coordonate carteziene triortogonale), cel de-al treilea cosinus director putînd fi determinat, în funcție de primii doi luați în considerație, din ecuația trigonometrică fundamentală :

$$\cos^2(\bar{v}, \bar{i}) + \cos^2(\bar{v}, \bar{j}) + \cos^2(\bar{v}, \bar{k}) = 1. \tag{1.46}$$

Se va arăta, în continuare, că aceste elemente ale vectorului liber pot fi determinate dacă se cunosc, pe o cale oarecare, cele trei proiecții ale vectorului pe axele de coordonate, v_x, v_y și v_z. Într-adevăr, remarcînd (fig. 1.5), că aceste proiecții au semnificații geometrice de laturi ale paralelipipedului drept format de axele de coordonate ca muchii și cu modulul vectorului $\bar{v}$ ca diagonală corespunzătoare originii axelor, se poate scrie, pe de o parte, cunoscuta relație între diagonală și muchii, adică

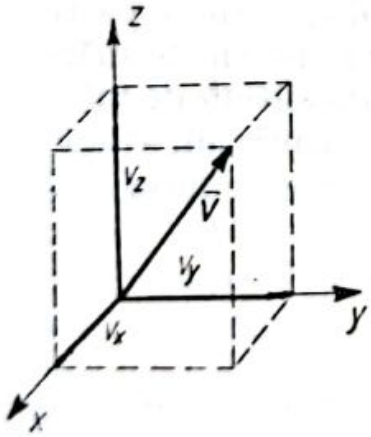


Fig. 1.5.

$$\boxed{|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \tag{1.47}$$

și, pe de altă parte, relațiile

$$\boxed{\cos(\bar{v}, \bar{i}) = \frac{v_x}{|\bar{v}|} \ ; \ \cos(\bar{v}, \bar{j}) = \frac{v_y}{|\bar{v}|} \ ; \ \cos(\bar{v}, \bar{k}) = \frac{v_z}{|\bar{v}|}}, \tag{1.48}$$

deduse din relațiile de definiție ale proiecțiilor vectorului.

Datorită faptului că proiecțiile v_x, v_y și v_z determină complet vectorul liber $\bar{v}$, ele au primit denumirea de *parametri scalari carte-*

zieni ai acestui vector ; această determinare a vectorului liber cu ajutorul parametrilor săi scalari cartezieni se evidențiază scriindu-se

$$\bar{v}\,\{v_x, v_y, v_z\}. \tag{1.49}$$

Cele trei proiecții ale vectorului sînt prezentate uneori sub forma unei matrice coloană, numită *matrice a vectorului liber*, notată cu simbolurile

$$\boxed{\| v \| = \mathbf{v} = \left\| \begin{matrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{matrix} \right\|} \tag{1.50}$$

cu transpusa o matrice linie

$$\boxed{\mathbf{v}^T = \| v_x\ v_y\ v_z \|}. \tag{1.51}$$

Cazul plan — vectorul $\bar{v}$ situat în planul Oxy — va fi caracterizat prin condiția

$$v_z \equiv 0.$$

2 : **Elemente de algebra vectorilor liberi.** Întrucît, în general, elementele de algebra vectorilor liberi sînt cunoscute de la alte discipline (geometria analitică, algebra superioară, fizica generală etc.), în cele ce urmează se va face numai o recapitulare sumară a acestor elemente, enunțîndu-se doar, la fiecare operație, definiția și proprietățile cu care este dotată operația și menționîndu-se, fără nici un fel de demonstrații, expresiile analitice folosite curent în mecanică.

Cei care vor dori să revadă și demonstrațiile, să aprofundeze unele din aspectele prezentate în expunere, sau chiar să studieze aspecte omise în prezenta lucrare, vor putea consulta lucrările de specialitate menționate în bibliografie.

Suma geometrică a unui număr de n vectori. Suma geometrică a vectorilor $\bar{v}_i\,\{v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}\}$, $(i = 1,2,\ldots,n)$, este vectorul

$$\boxed{\bar{\mathcal{V}} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \ldots \bar{v}_i + \ldots + \bar{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i} \tag{1.52}$$

determinat prin *regula poligonului.*

Construcția acestui poligon, începută din orice punct arbitrar al spațiului și, în particular, din originea sistemului de axe de coordonate este arătată în fig. 1.6.

Proprietățile sumei:

— *Comutativitatea termenilor*, ilustrată prin relația

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{v}'_j \qquad (1.53)$$

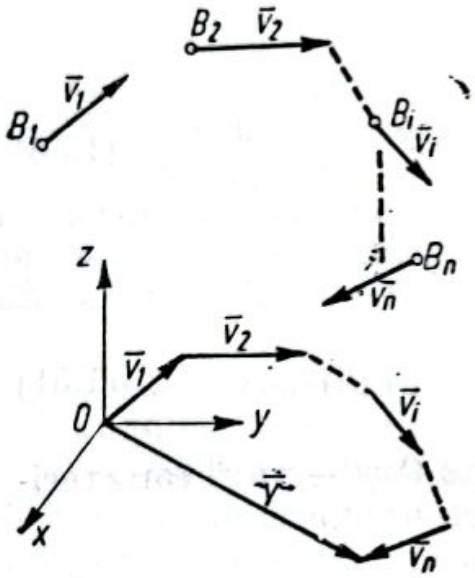


Fig. 1.6.

unde $\bar{v}'_j$, $(j = 1, 2, \ldots n)$ sînt aceeași vectori din prima sumă, dar luați într-o altă ordine, absolut arbitrară (de exemplu $\bar{v}'_1 = \bar{v}_2$, $\bar{v}'_2 = \bar{v}_4$ etc.);

— *asociativitatea termenilor*, exprimată prin relația

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i = \sum_{j=1}^{h} \bar{v}'_j + \sum_{j=h+1}^{h+k} \bar{v}'_j + \sum_{j=h+k+1}^{n} \bar{v}'_j \qquad (1.54)$$

cu h și k numere întregi, satisfăcînd condiția

$$1 < h < k < n$$

și cu vectorii $\bar{v}'_j$ avînd aceleași semnificații ca și la prima proprietate;

— *distributivitatea sumei în raport cu un factor scalar*, tradusă prin relația

$$\mu \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \mu \bar{v}_i, \quad (\mu \in \mathcal{R}). \qquad (1.55)$$

Proprietățile precedente justifică:

— concordanța regulii poligonului cu regula paralelogramului în cazul sumei a doi vectori și cu regula paralelipipedului în cazul sumei a trei vectori;

— exprimarea *condiției de coplanaritate a trei vectori*, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ și $\bar{v}_3$, sub forma

$$\boxed{\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \lambda_3 \bar{v}_3 = 0}, \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathcal{R}) \qquad (1.56)$$

Scanned with CamScanner

sau

$$\boxed{\bar{v}_3 = \mu_1 \bar{v}_1 + \mu_2 \bar{v}_2 ,} \quad \left(\mu_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \; ; \; \mu_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \in \mathcal{R} \; ; \; \lambda_3 \neq 0\right). \tag{1.57}$$

Expresia analitică carteziană a sumei geometrice:
— forma vectorială:

$$\boxed{\bar{\mathfrak{R}} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_{ix}\right)\bar{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} v_{iy}\right)\bar{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} v_{iz}\right)\bar{k}} \; ; \tag{1.58}$$

— forma matriceală:

$$\boxed{\| \bar{\mathfrak{R}} \| = \mathbf{V} = \left\| \begin{matrix} (\sum_i v_{ix}) \\ (\sum_i v_{iy}) \\ (\sum_i v_{iz}) \end{matrix} \right\|} . \tag{1.59}$$

Diferența geometrică a doi vectori. Diferența geometrică dintre doi vectori, $\bar{v}_2 \{v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}\}$ și $\bar{v}_1 \{v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}\}$, este vectorul

$$\boxed{\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1} \tag{1.60}$$

determinat prin *regula triunghiului.*

Construcția diferenței geometrice, efectuată într-un punct arbitrar al spațiului, este arătată în fig. 1.7.

Proprietățile diferenței geometrice:
— distributivitatea în raport cu un factor scalar:

$$\mu(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \mu\bar{v}_2 - \mu\bar{v}_1, \; (\mu \in \mathcal{R}) \; ; \tag{1.61}$$

Expresia analitică carteziană a diferenței geometrice:
— forma vectorială:

$$\boxed{\bar{v} = (v_{2x} - v_{1x})\bar{i} + (v_{2y} - v_{1y})\bar{j} + (v_{2z} - v_{1z})\bar{k}} \; ; \tag{1.62}$$

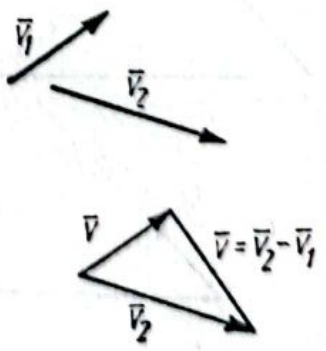


Fig. 1.7.

— *forma matriceală* :

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \left\| \begin{matrix} v_{2x} - v_{1x} \\ v_{2y} - v_{1y} \\ v_{2z} - v_{1z} \end{matrix} \right\|} . \tag{1.63}$$

Produsul scalar între doi vectori. Produsul scalar între doi vectori, $\bar{r}\ \{r_x, r_y, r_z\}$ și $\bar{v}\ \{v_x, v_y, v_z\}$, este mărimea scalară $s \in \mathscr{R}$, definită prin relația

$$\boxed{s = \bar{r}\bar{v} = |\bar{r}|\,|\bar{v}| \cos\,(\bar{r}, \bar{v}) = |\bar{r}|\, v_r = |\bar{v}|\, r_v} \tag{1.64}$$

cu

$$(\bar{r}_1, \bar{v}) \leqslant \pi \text{ (rad)},$$

v_r fiind proiecția ortogonală a vectorului $\bar{v}$ pe vectorul $\bar{r}$, iar r_v proiecția ortogonală a vectorului $\bar{r}$ pe vectorul $\bar{v}$ (fig. 1.8).

Relația de definiție a produsului scalar justifică :

— exprimarea *condiției de ortogonalitate* între doi vectori, $\bar{\omega} \neq 0$ și $\bar{r} \neq 0$, prin relația

$$\boxed{\bar{\omega}\bar{r} = 0}\ ; \tag{1.65}$$

— exprimarea proiecției unui vector $\bar{v}$ pe o axă (Δ) de versor $\bar{i}_\Delta$, prin relația

$$\boxed{v_\Delta = \bar{v}\bar{i}_\Delta = |\bar{v}| \cos\,(\bar{v}, \bar{i}_\Delta)}\ . \tag{1.66}$$

Proprietățile produsului scalar :

— *comutativitatea factorilor*, exprimată prin relația :

$$s = \bar{r}\bar{v} = \bar{v}\bar{r}\ ; \tag{1.67}$$

— *asociativitatea în raport cu un factor scalar*, tradusă prin relațiile :

$$\mu(\bar{r}\bar{v}) = \mu\bar{r}\cdot\bar{v} = \bar{r}\cdot\mu\bar{v}\ , \quad (\mu \in \mathscr{R})\ ; \tag{1.68}$$

— *distributivitatea în raport cu suma geometrică*, ilustrată prin relația

$$\bar{r}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \bar{r}\bar{v}_1 + \bar{r}\bar{v}_2. \tag{1.69}$$

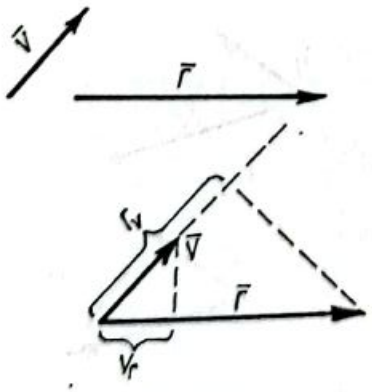


Fig. 1.8.

Scanned with CamScanner

Expresia analitică carteziană a produsului scalar:
— *forma curentă:*

$$\boxed{s = \bar{r}\bar{v} = r_x v_x + r_y v_y + r_z v_z} \; ; \tag{1.70}$$

— *forma matriceală:*

$$\boxed{\mathbf{s} = \mathbf{r}^T\mathbf{v} = \| r_x r_y r_z \| \cdot \left\| \begin{matrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{matrix} \right\|} \tag{1.71}$$

s fiind o matrice cu un singur element, asociată numărului s.

Produsul vectorial între doi vectori. Produsul vectorial între doi vectori, $\bar{r}\ \{r_x, r_y, r_z\}$ și $\bar{v}\ \{v_x, v_y, v_z\}$, este un alt vector $\bar{p}$ determinat prin relația

$$\boxed{\bar{p} = \bar{r} \times \bar{v} = |\bar{r}|\,|\bar{v}| \sin(\bar{r}, \bar{v})\bar{i}_p = p\bar{i}_p} \tag{1.72}$$

cu

$$(\bar{r}, \bar{v}) \leqslant \pi \text{ (rad)}$$

și cu orientarea versorului $\bar{i}_p$ determinată cu ajutorul *regulii burghiului drept.*

Construcția vectorului produs vectorial, efectuată în orice punct arbitrar al spațiului și, în particular, în originea axelor de coordonate, este arătată în fig. 1.9, care ilustrează și modul de aplicare a regulii burghiului drept.

Definiția dată pentru produsul vectorial justifică:

— exprimarea *condiției de coliniaritate* între doi vectori, $\bar{\omega} \neq 0$ și $\bar{r} \neq 0$ și sub forma:

$$\boxed{\bar{\omega} \times \bar{r} = 0} \; ; \tag{1.73}$$

— exprimarea valorii numerice a ariei (A) a paralelogramului format de vectorii $\bar{r}$ și $\bar{v}$, N_A, cu ajutorul modulului produsului lor vectorial;

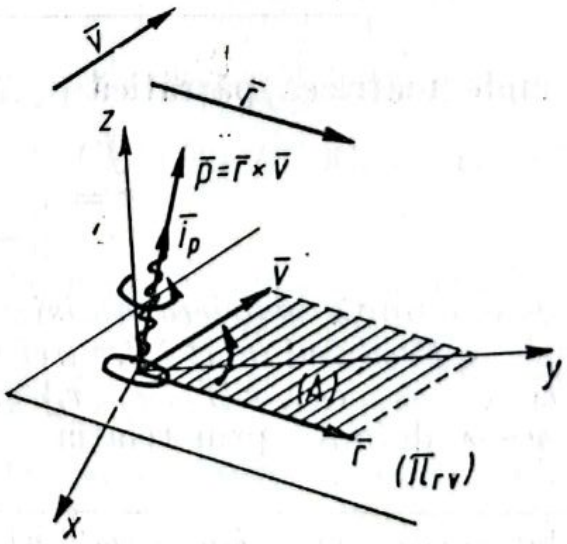


Fig. 1.9.

$$N_A = |\bar{r} \times \bar{v}| = |\bar{r}|\,|\bar{v}| \sin(\bar{r}_1\bar{v}), \quad (N_A \in \mathcal{R}). \tag{1.74}$$

Scanned with CamScanner

Proprietățile produsului vectorial:
— *anticomutativitatea factorilor*, exprimată prin relația

$$\bar{p} = \bar{r} \times \bar{v} = -\bar{v} \times \bar{r}_2; \tag{1.75}$$

— *asociativitatea în raport cu un factor scalar*, exemplificată prin relațiile

$$\mu(\bar{r} \times \bar{v}) = \mu\bar{r} \times \bar{v} = \bar{r} \times \mu\bar{v}, \quad (\mu \in \mathcal{R}); \tag{1.76}$$

— *distributivitatea în raport cu suma geometrică, ilustrată prin relația*

$$\bar{r} \times (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \bar{r} \times \bar{v}_1 + \bar{r} \times \bar{v}_2. \tag{1.77}$$

Expresia analitică carteziană a produsului vectorial:
— *forma vectorială:*

$$\boxed{\bar{p} = \bar{r} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}}; \tag{1.78}$$

— *forma matriceală:*

$$\boxed{\| p \| = \mathrm{p} = \tilde{\mathrm{r}}\mathrm{v} = \begin{Vmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Vmatrix}} \tag{1.79}$$

unde matricea pătratică

$$\tilde{\mathrm{r}} = \begin{Vmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.80}$$

este numită *matricea antisimetrică a vectorului* $\bar{r}$.

Produsul mixt între trei vectori. Produsul mixt între trei vectori $\bar{\omega}\ \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$, $\bar{r}\ \{r_x, r_y, r_z\}$ și $\bar{v}\ \{v_x, v_y, v_z\}$, este mărimea scalară $m \in \mathcal{R}$ definită prin relația

$$\boxed{m = \bar{\omega}(\bar{r} \times \bar{v}) = \bar{\omega}\bar{p} = |\bar{\omega}|\,|\bar{p}| \cos(\bar{\omega},\bar{p}) = |\bar{\omega}|\,|\bar{r}|\,|\bar{v}| \sin(\bar{r},\bar{v}) \cos(\bar{\omega},\bar{p})|} \tag{1.81}$$

Scanned with CamScanner

cu

$$(\bar{r}, \bar{v}) \leqslant \pi \text{ (rad)}; \quad \bar{\omega}, \bar{p} \leqslant \pi \text{ (rad)}.$$

Din modul de definire a acestei operații rezultă că semnul scalarului m este pozitiv, sau negativ, după cum unghiul format de vectorul $\bar{\omega}$ cu vectorul $\bar{p}$ este ascuțit (fig. 1.10) sau obtuz.

Un ansamblu de trei vectori liberi, luați într-o ordine determinată, formează un *triedru drept*, sau un *triedru stîng*, după cum produsul lor mixt, considerat în ordinea menționată, este pozitiv — cazul vectorilor din fig. 1.10 —, sau negativ.

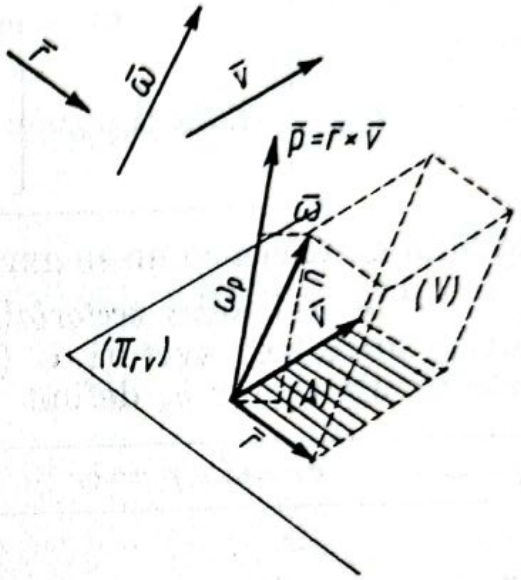


Fig. 1.10.

Relația de definiție a produsului mixt justifică:

— exprimarea *condiției de coplanaritate* a trei vectori $\bar{\omega}$, $\bar{r}$ și $\bar{v}$, prin relația

$$\boxed{\bar{\omega}(\bar{r}\times\bar{v}) = 0}; \qquad (1.82)$$

— exprimarea valorii numerice, N_v, a volumului (V) al paralelipipedului format din trei vectori, $\bar{\omega}$, $\bar{r}$ și $\bar{v}$, prin modulul produsului mixt dintre acești vectori, (fig. 1.10):

$$N_V = |\bar{\omega}(\bar{r}\times\bar{v})| = |\bar{\omega}|\cdot|\bar{p}|\,|\cos(\bar{\omega},\bar{p})| = |\bar{p}|\,|\omega_p| = N_A\cdot h$$
$$(N_V, N_A, h \in \mathscr{R}). \qquad (1.83)$$

Proprietățile produsului mixt:

— *comutativitatea ciclică a factorilor*, exprimată prin relațiile

$$\bar{\omega}(\bar{r}\times\bar{v}) = \bar{r}(\bar{v}\times\bar{\omega}) = \bar{v}(\bar{\omega}\times\bar{r}); \qquad (1.84)$$

— *asociativitatea în raport cu un factor scalar*, tradusă prin relațiile

$$\mu[\bar{\omega}(\bar{r}\times\bar{v})] = \mu\bar{\omega}(\bar{r}\times\bar{v}) = \bar{\omega}(\mu\bar{r}\times\bar{v}) = \bar{\omega}(\bar{r}\times\mu\bar{v})$$
$$(\mu \in \mathscr{R}). \qquad (1.85)$$

Scanned with CamScanner

Expresia analitică carteziană a produsului mixt:
— forma curentă:

$$\boxed{m = \bar{\omega}\,(\bar{r}\times\bar{v}) = \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix};} \tag{1.86}$$

— forma matriceală:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{m} &= \boldsymbol{\omega}^T\mathbf{p} = \boldsymbol{\omega}^T[\tilde{\mathbf{r}}\mathbf{v}] = \\ &= \| \omega_x\omega_y\omega_z \| \left[\begin{Vmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Vmatrix} \right] \end{aligned}} \tag{1.87}$$

m fiind matricea cu un singur element asociată scalarului m.

Produsul dubu vectorial între trei vectori. Produsul dublu vectorial între trei vectori $\bar{\omega}\ \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$, $\bar{r}\{r_x, r_y, r_z\}$ și $\bar{v}\ \{v_x, v_y, v_z\}$, este un alt vector $\bar{q}$, definit prin relația

$$\boxed{\bar{q}=\bar{\omega}\times(\bar{r}\times\bar{v})=\bar{\omega}\times\bar{p}=|\bar{\omega}|\,|\bar{p}|\sin(\bar{\omega},\bar{p})\bar{i}_q=|\bar{\omega}|\,|\bar{r}|\,\bar{v}|\sin(\bar{r},\bar{v})\sin(\bar{\omega},\bar{p})\bar{i}_q|} \tag{1.88}$$

cu

$$(\bar{r},\bar{v}) \leqslant \pi\,(\text{rad});\quad (\bar{\omega},\bar{p}) \leqslant \pi\,(\text{rad})$$

și cu versorul $\bar{i}_q$ determinat după regula burghiului drept.

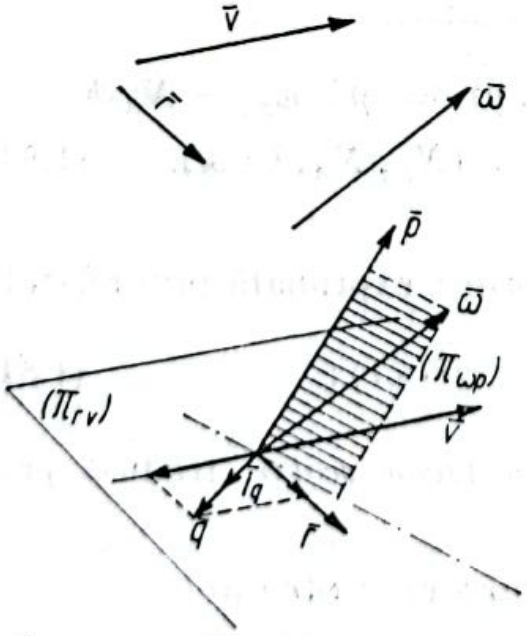


Fig. 1.11.

Construcția vectorului $\bar{q}$, precum și orientarea versorului său $\bar{i}_q$, este arătată în fig. 1.11, care scoate în evidență și situarea vectorului $\bar{q}$ în planul (π_{rv}) al vectorilor $\bar{r}$ și $\bar{v}$ și deci posibilitatea descompunerii lui în două componente după suporturile vectorilor $\bar{r}$ și $\bar{v}$.

Se demonstrează următoarea *relație de descompunere a produsului dublu vectorial:*

$$\boxed{\bar{q} = \bar{\omega}\times(\bar{r}\times\bar{v}) = (\bar{\omega}\bar{v})\bar{r} - (\bar{\omega}\bar{r})\bar{v}} \tag{1.89}$$

Scanned with CamScanner

care poate fi verificată cu ușurință, cu ajutorul expresiilor analitice ale celor doi membri ai relației.

Proprietățile produsului dublu vectorial:

— *asociativitatea în raport cu un factor scalar*, exprimată prin relațiile

$$\mu[\bar{\omega}\times(\bar{r}\times\bar{v})] = \mu\bar{\omega}\times(\bar{r}\times\bar{v}) = \bar{\omega}\times(\mu\bar{r}\times\bar{v}) = \bar{\omega}\times(\bar{r}\times\mu\bar{v}); \quad (\mu\in\mathcal{R}). \tag{1.90}$$

Expresia analitică carteziană a produsului dublu vectorial (stabilită în baza relației (1.89)):

— *forma vectorială*:

$$\boxed{\bar{q}=(\omega_x v_x+\omega_y v_y+\omega_z v_z)(r_x\bar{i}+r_y\bar{j}+r_z\bar{k})-(\omega_x r_x+\omega_y r_y+\omega_z r_z)(v_x\bar{i}+v_y\bar{j}+v_z\bar{k})} \tag{1.91}$$

— *forma matriceală*:

$$\boxed{\|q\| = \mathbf{q} = (\bar{\omega}\bar{v})\mathbf{r} - (\bar{\omega}\bar{r})\mathbf{v} = (\bar{\omega}\bar{v})\begin{Vmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Vmatrix} - (\bar{\omega}\bar{r})\begin{Vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Vmatrix}}. \tag{1.92}$$

În încheierea prezentării elemetelor de algebra vectorilor liberi vor mai fi menționate două relații, consecințe ale operațiilor algebrice definte pînă acum și care vor fi folosite curent în expunere:

— *Identitatea lui Lagrange*, exprimată sub forma

$$\boxed{\bar{r}^2\bar{v}^2 = (\bar{r}\times\bar{v})^2 + (\bar{r}\bar{v})^2} \tag{1.93}$$

și obținută prin aplicarea teoremei lui Pitagora triunghiului dreptunghic OAB (fig. 1.12).

— *Soluția ecuației vectoriale algebrice*:

$$\bar{r}\times\bar{v} = \bar{p} \tag{1.94}$$

în care vectorul $\bar{r}$ este necunoscut, soluție avînd forma

$$\boxed{\bar{r} = \frac{\bar{v}\times\bar{p}}{\bar{v}^2} + \lambda\bar{v}} \tag{1.95}$$

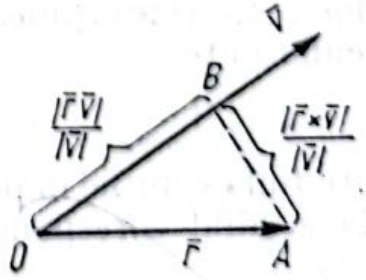


Fig. 1.12.

cu λ un scalar nedeterminat și care se obține efectuîndu-se următoarele operații :

— multiplicarea, vectorial la stînga, a ecuației (1.94) cu vectorul cunoscut din produsul vectorial — vectorul $\bar{v}$;

— descompunerea produsului dublu vectorial format în membrul stîng după vectorii $\bar{r}$ și $\bar{v}$;

— împărțirea relației prin scalarul $\bar{v}^2$ și introducerea notației

$$\frac{\bar{r}\bar{v}}{\bar{v}^2} = \lambda \tag{1.96}$$

pentru raportul precedent, nedeterminat datorită prezenței în produsul scalar de la numărător a vectorului necunoscut $\bar{r}$;

— izolarea vectorului $\bar{r}$.

3. **Elemente de analiza vectorilor liberi.** *Funcții vectoriale de un argument scalar.* În general, mărimile vectoriale ale mecanicii își modifică elementele caracteristice în timp, fiecărui moment al intervalului de timp în care se studiază mișcarea unui corp corespunzîndu-i valori ale mărimilor vectoriale ce intervin în procesul mecanic studiat caracterizate prin intensități, direcții, sensuri și poziții ale punctelor de aplicație bine precizate, pe baza unor corespondențe determinate ; se spune, în asemenea situații, că mărimile vectoriale considerate sînt *funcții de timp.*

Este ușor de înțeles că aceste modificări vor putea afecta atît valoarea scalară a mărimii vectoriale funcție de timp, cît și versorul direcției ei, adică se va putea scrie

$$\bar{a} = a(t) \cdot \bar{i}_a(t) = \bar{a}(t). \tag{1.97}$$

Datorită, pe de o parte, corespondenței biunivoce între valorile timpului corespunzătoare intervalului în care se studiază mișcarea și între elementele mulțimii numerelor reale, reflectată prin relația

$$t = \mathfrak{T}[s], \quad (\mathfrak{T} \in \mathcal{R}) \tag{1.98}$$

și, pe de altă parte, corespondenței biunivoce între mulțimea numerelor reale și mulțimea valorilor mărimii scalare $a(t)$, în baza relației cunoscute

$$a = N_a[\text{u.m.}(a)], \quad (N_a \in \mathcal{R}), \tag{1.99}$$

studiul evoluției dependenței $a = a(t)$ se va reduce, în ultimă instanță, la studiul corespondenței

$$N_a = N_a(\mathfrak{T}), \quad (N_a, \tau \in \mathcal{R}) \tag{1.100}$$

Scanned with CamScanner

adică al unei dependențe de forma

$$y = f(x) \qquad (x, y \in \mathcal{R}),$$

ceea ce înseamnă că la studiul variației mărimilor scalare $a(t)$ vor putea fi aplicate, integral, concluziile analizei matematice scalare referitoare la funcțiile reale de un argument real.

Pentru studiul variației în timp a versorului variabil $\bar{i}_a = \bar{i}_a(t)$ se introduce, prin extensie, noțiunea de *funcție vectorială de argumentul scalar timp*, extensie justificată de:

— existența unui *domeniu de definiție al funcției vectoriale*, reprezentat prin intervalul de timp $\mathcal{T} = [t_0, t_f]$ în care se studiază evoluția mărimii vectoriale $\bar{a}(t) = a(t)\bar{i}_a(t)$, t_0 fiind *momentul inițial*, iar t_f *momentul final* al acestui interval:

— existența unei *mulțimi de versori*, $\overline{\mathcal{U}}$, inclusă în mulțimea vectorilor liberi, în care funcția ia valori:

— existența unei *aplicații* determinate, $\bar{F}$, bazată pe legile fizice ale procesului mecanic în care intervine mărimea vectorială $\bar{a}$, care stabilește corespondența între elementele $t \in \mathcal{T}$ și $\bar{i}_a \in \overline{\mathcal{U}} \subset \overline{\mathcal{V}}$, corespondență exprimată sub una din formele

$$\begin{cases} \bar{i}_a = \bar{F}(t); \\ \bar{i}_a = \bar{i}_a(t), \end{cases} \qquad (\bar{i}_a \in \overline{\mathcal{U}}; \quad t \in \mathcal{T}) \tag{1.101}$$

ultima fiind cea mai des folosită.

Se înțelege că prin înmulțirea versorilor cu factori scalari $\lambda \in \mathcal{R}$, se poate vorbi de vectori oarecare variabili în timp, deci de funcții vectoriale de argumentul scalar t oarecare;

$$\bar{v} = \bar{v}(t), \quad (\bar{v} \in \overline{\mathcal{V}}, \quad t \in \mathcal{T}). \tag{1.102}$$

Extinderea, la cazul funcțiilor vectoriale de argumentul t, a noțiunilor fundamentale de *limită* și *continuitate* din analiza matematică, definite pentru funcțiile reale de un argument real, va putea fi făcută pe baza următoarelor două observații:

— prin considerarea relației (1.98), funcțiile vectoriale (1.102) pot fi aduse, în ultimă instanță, la forma de *funcții vectoriale de un argument real*:

$$\bar{v} = \bar{v}(\tau), \quad (\bar{v} \in \overline{\mathcal{V}}; \quad \tau \in \mathcal{R}); \tag{1.103}$$

Scanned with CamScanner

— prin introducerea noțiunii de *hodograf al funcției vectoriale* $\bar{v}(t)$, definit ca fiind curba (Γ_v), (fig. 1.13), reprezentînd locul geometric al extremităților vectorilor

$$\bar{v}_i = \bar{v}(t_i), \quad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{1.104}$$

aduși toți cu punctele de aplicație într-un pol comun — acesta fiind, de regulă, originea axelor de coordonate carteziene triortogonale la care se raportează vectorul — , problema studiului evoluției funcției vectoriale $\bar{v}(t)$ va putea fi redusă la o problemă cunoscută a analizei matematice scalare și anume aceea a studiului unei curbe spațiale atunci cînd i se cunosc ecuațiile parametrice, aceste ecuații fiind reprezentate în cazul de față prin expresiile proiecțiilor pe axele de coordonate ale vectorului $\bar{v}(t)$, adică

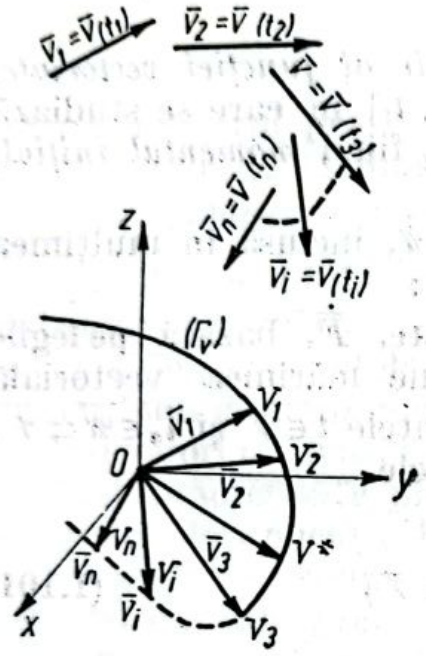


Fig. 1.13.

$$x = v_x(t)\,;\; y = v_y(t)\,;\; z = v_z(t). \tag{1.105}$$

Observațiile precedente vor permite deci să se aplice concluziile analizei matematice referitoare la curbele spațiale date prin ecuații parametrice la studiul funcțiilor vectoriale și deci și la studiul variației oricărei mărimi vectoriale $\bar{v}(t)$.

Considerînd, așadar, o funcție vectorială de timp

$$\bar{v} = \bar{v}(t)$$

și hodograful ei (Γ_v), (fig. 1.14), unei valori $t^* \in \mathcal{T}$ îi va corespunde o valoare $\bar{v}(t^*)$ a funcției vectoriale și deci un punct figurativ V^* pe hodograf.

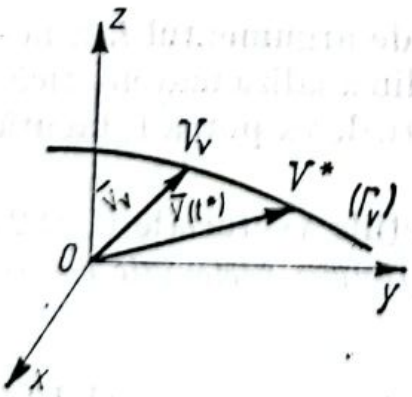


Fig. 1.14.

Dat fiind caracterul continuu al evoluției argumentului t, valoarea t^* va fi totdeauna un punct de acumulare al mulțimii $\mathcal{T}$, adică se vor putea forma șiruri $t_v \to t^*$; acestor șiruri de valori ale argumentului le vor corespunde „șiruri" de valori $\bar{v}_v = \bar{v}(t_v)$ ale funcției vectoriale $\bar{v}(t)$ și deci șiruri de mulțimi de puncte figurative V_v pe hodograf, situate în vecinătatea lui V^*.

În cazul cînd, oricare ar fi șirul valorilor $t_\nu \to t^*$ ale argumentului, „șirurile" $\bar{v}(t_\nu)$ ale valorilor funcției tind spre o aceeași valoare $\bar{v}^* \in \overline{\mathscr{V}}$ se va spune că valoarea $\bar{v}^*$ reprezintă *limita funcției vectoriale* $\bar{v}(t)$ *în punctul* t^*, scriindu-se

$$\lim_{t \to t^*} \bar{v}(t) = \bar{v}^*. \tag{1.106}$$

Se precizează că întocmai ca și în analiza scalară, și în cazul funcțiilor vectoriale este posibil ca valoarea $\bar{v}^*$ să nu coincidă cu valoarea $\bar{v}(t^*)$ a funcției în punctul t^*.

Proprietățile limitei funcțiilor scalare de un argument real se extind, în baza celor două observații făcute la început, și la cazul funcțiilor vectoriale, pentru toate operațiile definite în algebra vectorială.

În mod analog se extinde și noțiunea de continuitate, spunîndu-se că *funcția vectorială* $\bar{v}(t)$ *este continuă în punctul* t^*, *atunci cînd ea admite o limită în punctul* t^* *și această limită coincide și cu valoarea funcției vectoriale în acel punct*, adică este satisfăcută condiția

$$\lim_{t \to t^*} \bar{v}(t) = \bar{v}^* = \bar{v}(t^*) = \bar{v}\left(\lim_{t \to t^*} t\right). \tag{1.107}$$

Continuitatea funcției vectoriale în punctul t^* se va reflecta în reprezentarea hodografică a ei prin absența oricărei discontinuități a curbei (Γ_v) în acel punct.

Funcția vectorială $\bar{v}(t)$ va fi numită continuă în intervalul $\mathscr{T}$ pe care este definită, atunci cînd va fi continuă în fiecare punct al intervalului.

Derivarea funcțiilor vectoriale de argumentul t. Introducerea noțiunii de hodograf al unei funcții vectoriale de argumentul t permite extinderea, în continuare, și a noțiunii de derivată în raport cu argumentul respectiv, din analiza scalară în analiza vectorială.

Considerînd o funcție vectorială $\bar{v} = \bar{v}(t)$, continuă pe întreg domeniul ei de definiție $\mathscr{T}$, precum și două momente succesive, t și $t' = t + \Delta t$, ale acestui domeniu, lor le corespund, în reprezentarea hodografică, punctele V și V' (fig. 1. 15); diferența

$$\Delta t = t' - t \tag{1.108}$$

va purta și aici numele de *creștere a argumentului*, iar diferența dintre valorile funcției corespunzătoare celor două momente, adică vectorul

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t) = \overrightarrow{VV'} \tag{1.109}$$

se va numi *creșterea geometrică a funcției vectoriale în intervalul* $[t, t']$.

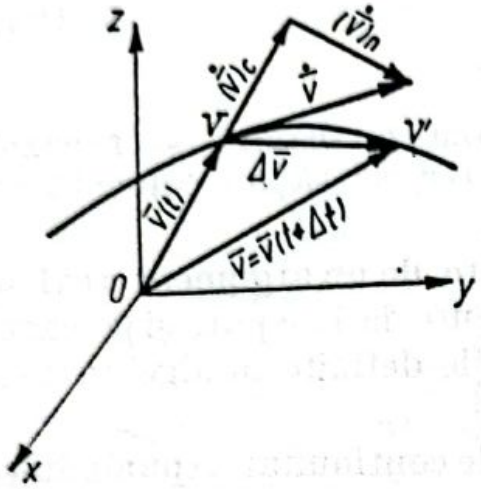


Fig. 1.15.

Raportul

$$\bar{w}_m = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)}{t' - t} \tag{1.110}$$

va caracteriza variația mărimii vectoriale $\bar{v}(t)$ în intervalul de timp, Δt, el purtînd numele, în mecanică, de *viteză medie de variație a mărimii vectoriale* $\bar{v}(t)$ *în intervalul de timp* Δt.

Se înțelege că o asemenea caracterizare a variației mărimii vectoriale $\bar{v}(t)$ va fi cu atît mai corectă, cu cît intervalul de timp Δt va fi mai mic; de aici a rezultat ideea definirii noțiunii de *viteză de variație a mărimii vectoriale* $\bar{v}(t)$ *în punctul* t, ca derivată în raport cu timpul a acestei funcții, determinată prin procesul de trecere la limită

$$\boxed{\frac{d\bar{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \dot{\bar{v}}} \tag{1.111}$$

ultima notație fiind specifică disciplinei de mecanică.

În cazul cînd funcția $\bar{v}(t)$ admite derivate în toate punctele domeniului ei de definiție, ea se va numi *derivabilă pe acel domeniu*.

În legătură cu noțiunea de derivată în raport cu timpul a unei funcții vectoriale, trebuie făcute următoarele observații:

— întrucît la limită, $(t' \to t;\ \Delta t \to 0)$, punctul figurativ V' de pe hodograful funcției vectoriale tinde spre punctul V (fig. 1.15), deci secanta VV' după care este orientat vectorul $\Delta\bar{v}$ — și, prin urmare, și raportul $\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$ — devine tangentă în V la curba (Γ_v), se poate trage concluzia că *derivata în raport cu timpul a unei funcții vectoriale* $\bar{v}(t)$ *este tangentă la hodograful funcției vectoriale în punctul figurativ corespunzător momentului pentru care s-a calculat derivata*;

— datorită corespondențelor menționate între funcțiile scalare reale de un argument real și funcțiile vectoriale de timp, regulile de derivare a operațiilor efectuate cu funcțiile scalare se vor extinde și la operațiile efectuate cu funcțiile vectoriale, definite în algebra vectorială;

— derivata în raport cu timpul a unei funcții vectoriale $\bar{v}(t)$ are două componente:

$$\dot{\bar{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[v(t)\bar{i}_v(t)] = \dot{v}(t)\bar{i}_v(t) + v(t)\dot{\bar{i}}_v(t) = (\dot{\bar{v}})_c + (\dot{\bar{v}})_n, \qquad (1.112)$$

$(\dot{\bar{v}})_c$ fiind *componenta coliniară cu vectorul* $\bar{v}(t)$, iar $(\dot{\bar{v}})_n$ fiind *componenta normală la vectorul* $\bar{v}(t)$, ortogonalitatea versorului $\bar{i}_v$ și a derivatei sale în raport cu timpul rezultînd din derivarea în raport cu timpul a pătratului versorului ($\bar{i}_v^2 = 1$), derivare care conduce la concluzia

$$\bar{i}_v\dot{\bar{i}}_v = 0. \qquad (1.113)$$

Apar astfel evidente următoarele două consecințe:

— derivata unei funcții vectoriale cu direcție fixă ($\bar{i}_v = \bar{i}_v^\circ = \overrightarrow{\text{const}}$), are numai componenta coliniară cu funcția vectorială:

$$\dot{\bar{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[v^\circ(t)\bar{i}_v^\circ] = \dot{v}(t)\bar{i}_v^\circ = (\dot{\bar{v}})_c; \qquad (1.114)$$

— derivata unei funcții vectoriale cu valoarea scalară constantă ($v(t) \equiv v^\circ = \text{const}$), are numai componenta normală la funcția vectorială:

$$\dot{\bar{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[v_0\bar{i}_v(t)] = v^\circ\dot{\bar{i}}_v(t) = (\dot{\bar{v}})_n; \qquad (1.115)$$

— uneori, funcția vectorială poate să depindă indirect de argumentul t, prin intermediul unei alte mărimi scalare, s, adică se va scrie

$$\bar{v} = \bar{v}(s) \quad \text{cu} \quad s = s(t), \qquad (1.116)$$

sau încă, într-un caz și mai general, poate să depindă de timp atît

direct, cît și prin intermediul unui număr determinat, p, de mărimi scalare $q_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$, adică se poate scrie

$$\bar{v} = \bar{v}(q_1, q_2, \ldots, q_p; t) = \bar{v}(q, t) \text{ cu } q_i = q_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{1.117}$$

mărimile scalare q_i fiind, cel mai adesea, parametrii de poziție ai sistemului mecanic căruia i se studiază mișcarea, adică niște mărimi scalare care determină poziția sistemului mecanic în spațiu și care vor fi definiți ulterior.

Aceleași corespondențe care au permis extinderea regulilor de derivare din analiza scalară în analiza vectorială, vor permite și extinderea regulilor de derivare a funcțiilor compuse scriindu-se următoarele expresii ale derivatelor totale în raport cu timpul ale funcțiilor (1.116) și (1.117):

$$\dot{\bar{v}} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{v}}{ds} \dot{s} \tag{1.118}$$

respectiv

$$\dot{\bar{v}} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \tag{1.119}$$

(se va reține faptul că numai derivatele totale în raport cu timpul ale mărimilor mecanice scalare și vectoriale funcții de timp vor fi notate cu simbolul $(\cdot)$, respectiv $(\cdot\cdot)$ etc. pentru derivatele de ordin superior, definite la fel ca și în analiza scalară).

O problemă care se mai cere lămurită este aceea a corespondenței între mărimile vectoriale mecanice și derivatele lor în raport cu timpul, pe de o parte, și între vectorii geometrici reprezentativi ai mărimilor vectoriale și cei ai derivatelor lor în raport cu timpul, pe de altă parte.

După cum s-a văzut, orice mărime vectorială mecanică poate fi reprezentată printr-un vector geometric reprezentativ, în baza unei corespondențe biunivoce stabilită cu ajutorul scării de reprezentare. În cazul unei mărimi vectoriale $\bar{a}(t)$, variabilă în timp, vectorul geometric care o va reprezenta, $\bar{a}^r$, va fi deci și el o funcție vectorială de timp, adică se va scrie

$$\bar{a}(t) = \sigma_a \bar{a}^r(t), \quad \left(\sigma_a = \frac{q_a}{l_a} \frac{[\text{u.m.}(a)]}{\text{cm}}\right) \tag{1.120}$$

Scanned with CamScanner

reprezentările concrete într-o schiță mecanică corespunzînd unor momente determinate.

Se înțelege că o reprezentare analogă va putea fi făcută și pentru derivata în raport cu timpul a funcției vectoriale $\bar{a}(t)$, cu observația că la stabilirea scării de reprezentare a ei va trebui să se țină seama, în primul rînd, de dimensiunile fizice ale ei; cum derivata în raport cu timpul a unei mărimi mecanice reprezintă limita raportului dintre variația acestei mărimi și intervalul de timp corespunzător acestei variații, este evident că dimensiunea fizică a derivatei $\dot{\bar{a}}$ a unei mărimi vectoriale mecanice $\bar{a}(t)$ va avea ca dimensiune fizică raportul dintre dimensiunea mărimii respective și timpul t, adică unitatea de măsură a derivatei $\dot{\bar{a}}$ va fi dată de relația

$$[\text{u.m.}(\dot{a})] = \frac{[\text{u.m.}(a)]}{s} = [\text{u.m.}(a)] \cdot s^{-1}, \tag{1.121}$$

s fiind simbolul pentru unitatea de timp, *secunda*.

În consecință, scara de reprezentare a derivatei $\dot{\bar{a}}$ a mărimii vectoriale $\bar{a}(t)$ va fi definită prin relația

$$\sigma_{\dot{a}} = \frac{q_{\dot{a}}}{l_{\dot{a}}} \left[\frac{[\text{u.m.}(a)]}{s} \Big/ \text{cm} \right] \tag{1.122}$$

iar relația de reprezentare a derivatei a cu ajutorul vectorului ei geometric reprezentativ va avea forma

$$\dot{\bar{a}} = \sigma_{\dot{a}} \cdot \dot{\bar{a}}'. \tag{1.123}$$

Dacă derivatele unei funcții vectoriale de timp pot fi reprezentate independent de funcții, atunci scările lor de reprezentare vor putea fi alese arbitrar, după un criteriu unic, acela ca ansamblul vectorilor ei reprezentativi să se încadreze în dimensiunile schiței mecanice.

Se întîlnesc însă deseori și situații cînd derivata în raport cu timpul a unei mărimi vectoriale $\bar{a}(t)$ se exprimă, în baza unor calcule rezultînd din desfășurarea procesului mecanic, ca produs vectorial dintre o altă mărime vectorială funcție de timp, $\bar{\omega} = \bar{\omega}(t)$, și dintre funcția respectivă, adică de forma:

$$\dot{\bar{a}} = \bar{\omega}(t) \times \bar{a}(t) \tag{1.124}$$

Scanned with CamScanner

mărimea $\bar{\omega}(t)$, care va avea dimensiunile fizice ale inversului unui timp, trebuind să fie și ea reprezentată în desen la o scară

$$\sigma_\omega = \frac{q_\omega}{l_\omega}\left(\frac{s^{-1}}{cm}\right). \tag{1.125}$$

În asemenea cazuri, cînd valorile mărimii vectoriale $\bar{a}(t)$ vor trebui luate chiar din schița mecanică și introduse în relația (1.124), scara de reprezentare a derivatei $\dot{\bar{a}}$ a funcției vectoriale $\bar{a}(t)$ nu va mai putea fi luată arbitrar, ci va trebui stabilită cu ajutorul relației (1.124), exprimîndu-se mai întîi fiecare din factori cu ajutorul vectorilor geometric reprezentativi, adică scriindu-se

$$\dot{\bar{a}} = \sigma_\omega \bar{\omega}^r(t) \times \sigma_\omega \bar{a}^r(t) = \sigma_\omega \sigma_a \bar{\omega}^r(t) \times \bar{a}^r(t) \tag{1.126}$$

și reprezentînd apoi produsul vectorial al celor doi vectori geometrici cu ajutorul unui alt vector geometric, care va fi chiar vectorul reprezentativ al derivatei $\dot{\bar{a}}$, în baza relației

$$\bar{\omega}^r(t) \times \bar{a}^r(t) = \sigma_A \cdot \dot{\bar{a}}^r \tag{1.127}$$

unde

$$\sigma_A = \frac{q_A}{l_A}\left(\frac{cm^2}{cm}\right) \tag{1.128}$$

va fi scara de reprezentare a acestui produs vectorial cu dimensiuni fizice de arie, exprimată în cm^2.

Introducînd expresia (1.127) în relația (1.126), aceasta din urmă va lua forma

$$\dot{\bar{a}} = \sigma_\omega \sigma_a \sigma_A \cdot \dot{\bar{a}}^r(t) \tag{1.129}$$

rezultînd din compararea ei cu relația (1.123) următoarea valoare pentru scara de reprezentare a derivatei în raport cu timpul a mărimii vectoriale $\bar{a}(t)$:

$$\sigma_{\dot{a}} = \sigma_\omega \sigma_a \sigma_A = \frac{q_\omega}{l_\omega} \cdot \frac{q_a}{l_a} \cdot \frac{q_A}{l_A}\left[\frac{[\text{u.m.}(a)]}{s} \Big/ cm\right]. \tag{1.130}$$

Scanned with CamScanner

În condițiile $l_\omega = l_a = l_A = 1$ cm, va rezulta

$$\sigma_a^* = q_\omega q_a q_A \left[\frac{[\text{u.m.}(a)]}{\text{s}} \Big/ \text{cm} \right], \tag{1.131}$$

respectiv

$$\sigma_a^* = q_\omega q_a \left[\frac{[\text{u.m.}(a)]}{\text{s}} \Big/ \text{cm} \right], \tag{1.132}$$

dacă se ia $q_A = 1$ cm^2.

Integrarea funcțiilor vectoriale de timp. Ca și în analiza scalară, și în analiza vectorială operația de integrare în timp a unei funcții vectoriale de timp $\bar{v}(t)$ va consta în determinarea *funcției vectoriale primitive* $\bar{V}(t)$, care să satisfacă condiția

$$\dot{\bar{V}}(t) = \bar{v}(t). \tag{1.133}$$

Extinzînd și aici, pe baza corespondențelor cunoscute, concluziile analizei scalare privind existența funcțiilor primitive ale funcțiilor scalare de un argument real, se va putea afirma că și orice funcție vectorială de timp $\bar{v} = \bar{v}(t)$, continuă într-un interval $\mathcal{T}$, este derivata în raport cu timpul a unei alte funcții vectoriale de timp continuă în acel interval, $\bar{V}(t)$, numită *primitiva* funcției vectoriale de timp $\bar{v}(t)$; observînd apoi că relația (1.133) este satisfăcută și de orice altă funcție $\bar{V}'(t)$ de forma

$$\bar{V}'(t) = \bar{V}(t) + \bar{C},$$

unde $\bar{C}$ este un vector constant arbitrar, cu derivata în raport cu timpul egală cu zero, se poate formula și noțiunea de *integrală nedefinită* a unei funcții vectoriale de timp, continuă în intervalul pentru care se efectuează integrarea, exprimată sub forma

$$\bar{V}(t) + \bar{C} = \int \bar{v}(t)\mathrm{d}t. \tag{1.134}$$

Relația (1.133), precum și regulile cunoscute de derivare extinse la funcțiile vectoriale, justifică extinderea, în continuare, și a tuturor proprietăților integralelor nedefinite din analiza scalară la cazul integralelor nedefinite ale funcțiilor vectoriale de timp.

În legătură cu posibilitatea de stabilire a expresiei concrete a a primitivei $\bar{V}(t)$ a unei funcții vectoriale integrabile $\bar{v}(t)$, vor trebui

Scanned with CamScanner

de deosebit următoarele două situații, întîlnite curent în problemele mecanicii :

— dacă expresia de sub semnul de integrare reprezintă diferențiala unei funcții vectoriale cunoscute, $\bar{v}(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\bar{V}$, se va putea scrie direct expresia primitivei :

$$\int \bar{v}(t)\mathrm{d}t = \bar{V}(t) + \bar{C}\,; \tag{1.135}$$

— dacă semnificația expresiei de sub sensul de integrare nu este cunoscută, se va înlocui funcția vectorială cu expresia ei analitică în raport cu reperul cartezian fix la care este raportată ea, reducîndu-se astfel problema determinării unei primitive vectoriale la problema determinării primitivelor proiecțiilor pe axe ale funcției vectoriale de integrat ;

$$\int \bar{v}(t)\mathrm{d}t = \left(\int v_x(t)\mathrm{d}t + C_x\right)\bar{i} + \left(\int v_y(t)\mathrm{d}t + C_y\right)\bar{j} + \left(\int v_z(t)\mathrm{d}t + C_z\right)\bar{k} =$$

$$= [V_x(t) + C_x]\bar{i} + [V_y(t) + C_y]\bar{j} + [V_z(t) + C_z]\bar{k}. \tag{1.136}$$

În încheierea prezentării elementelor de analiză a vectorilor liberi se vor face cîteva referiri la ecuațiile diferențiale vectoriale ale mecanicii, ecuații care, de cele mai multe ori, sînt ecuații de ordinul doi într-o funcție vectorială necunoscută de timp, $\bar{r} = \bar{r}(t)$, de forma

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{f}(\bar{r},\ \dot{\bar{r}}\,;t). \tag{1.137}$$

În cazurile cînd această ecuație ia forma particulară a unei *ecuații diferențiale vectoriale liniare cu coeficienți constanți și neomogenă*, cu membrul drept un polinom trigonometric de ordinul l în t, adică forma

$$\ddot{\bar{r}} + 2\mu\,\dot{\bar{r}} + k^2\,\bar{r} = \bar{a}_0 + \sum_{\lambda=1}^{l} [\bar{a}_\lambda \cos(\lambda pt) + \bar{b}_\lambda \sin(\lambda pt)], \tag{1.138}$$

cu μ, k^2 și p, ($\mu, k^2, p \in \mathscr{R}$), scalari constanți și cu $\bar{a}_0$, $\bar{a}_\lambda$ și $\bar{b}_\lambda$, ($\lambda = 1, 2.., l$) vectori constanți, integrarea ei va putea fi efectuată direct sub forma vectorială, după reguli identice celora după care se integrează ecuațiile diferențiale scalare liniare cu coeficienți constanți, la care este reductibilă, în fond, și ecuația (1.138), prin proiectarea ei pe axele de coordonate carteziene triortogonale fixe.

Scanned with CamScanner

În condițiile

$$\mu = 0\,;\ k^2 = 0, \tag{1.139}$$

ecuația diferențială va putea fi integrată chiar prin cvadraturi, scriindu-se

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{f}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\dot{\bar{r}}), \tag{1.140}$$

rezultînd, prin integrări succesive, mai întîi *integrala primă*:

$$\dot{\bar{r}} = \int \bar{f}(t)\mathrm{d}t + \bar{C}_1 = \frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.140'}$$

și apoi *soluția generală*:

$$\bar{r} = \int\left[\int \bar{f}(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t + \bar{C}_1 t + \bar{C}_2 \tag{1.141}$$

$\bar{C}_1$ și $\bar{C}_2$ fiind doi *vectori constanți de integrare.*

În toate celelalte cazuri, integrarea ecuației (1.137) — atunci cînd va fi posibilă — se va face prin înlocuirea ei cu sistemul echivalent de ecuații diferențiale scalare, obținute prin proiectarea ei pe axele de coordonate carteziene fixe.

1.2.2. Operații cu vectori legați

1° **Parametrii scalari ai unui vector legat.** Pentru mulțimea $(\overline{\mathscr{V}}_l)$ a vectorilor legați, relația de echivalență capătă următoarea formulare:

Doi vectori, $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$, aparținînd mulțimii $(\overline{\mathscr{V}}_l)$, sînt echivalenți între ei atunci cînd au:

— modulii egali, $(|\bar{v}_1| = |\bar{v}_2|)$;

— suporturile confundate $(\Delta_1 \equiv \Delta_2)$; (1.142)

— sensurile identice $(v_1 = v_2)$;

— același punct de aplicație $(B_1 \equiv B_2)$, exprimarea acestei relații făcîndu-se și acum prin egalitatea:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2. \tag{1.143}$$

În legătură cu formularea precedentă, trebuie făcută observația că necesitatea precizării poziției punctului de aplicație trebuie inter-

Scanned with CamScanner

pretată în sensul că acest punct are o poziție determinată într-un domeniu limitat al spațiului, acesta fiind, în mecanică, volumul corpului a cărui mișcare se studiază; acest domeniu se poate însă afla atît în stare de mișcare în raport cu sistemul de referință considerat fix în spațiu, cît și în stare de repaos.

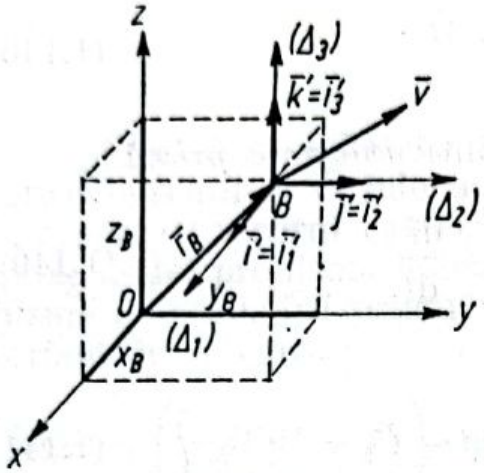


Fig. 1.16.

Din formularea relației de echivalență mai rezultă că determinarea unui vector legat se va face cu ajutorul unui număr de șase mărimi scalare și anume:

— modulul vectorului;

— două din cosinusurile lui directoare, formate de vector cu versorii $\bar{i}' = \bar{i}_1'$, $\bar{j}' = \bar{i}_2'$ și $\bar{k}' = \bar{i}_3'$ ai axelor (Δ_1), (Δ_2) și (Δ_3), paralele la axele sistemului de referință cartezian triortogonal drept la care e raportat vectorul (fig. 1.16);

— cele trei coordonate carteziene ale punctului B de aplicație, (x_B, y_B, z_B).

În locul primelor trei mărimi scalare vor putea fi considerate și de astă dată cele trei proiecții ale vectorului $\bar{v}$ pe axele (Δ_k), $(k = 1, 2, 3)$, proiecții care, fiind egale și cu cele ale vectorului pe axele carteziene, vor fi notate tot cu simbolurile v_x, v_y, v_z.

Mărimile v_x, v_y, v_z x_B, y_B, și z_B, care determină complet vectorul legat, se vor numi *parametrii scalari ai vectorului legat*, evidențiindu-se acest rol al lor fie sub forma

$$\bar{v}\,\{v_x, v_y, v_z, \ ; x_B, y_B, z_B\}, \tag{1.144}$$

fie considerîndu-se vectorul legat ca un vector într-un spațiu vectorial cu șase dimensiuni, ceea ce permite utilizarea și aici a unei matrice coloană, de astă dată cu șase linii, pentru caracterizarea vectorului:

$$\|v\| = \mathbf{v} = \left\| \begin{matrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ x_B \\ y_B \\ z_B \end{matrix} \right\|. \tag{1.145}$$

Un exemplu de vector legat frecvent întîlnit în mecanică este vectorul

$$\bar{r} = \overrightarrow{OB}, \tag{1.146}$$

Scanned with CamScanner

care determină poziția punctului B în raport cu originea O a axelor de coordonate carteziene triortogonale, purtînd, din acest motiv, numele de *vector de poziție al punctului B în raport cu polul O*; este ușor de remarcat, (fig.1.16), că proiecțiile pe axele carteziene triortogonale ale acestui vector sînt reprezentate chiar de coordonatele carteziene ale punctului, adică se pot scrie relațiile

$$r_{Bx} = x_B\,;\quad r_{By} = y_B\,;\quad r_{Bz} = z_B. \tag{1.147}$$

2°. **Elemente de algebra vectorilor legați.** Toate operațiile definite în cadrul algebrei vectorilor liberi vor putea fi extinse și la cazul vectorilor legați, cu singura deosebire că ele vor trebui efectuate numai în punctul comun de aplicație al vectorilor respectivi; rezultă de aici că vectorii obținuți prin transformările realizate de operațiile algebrice vor fi și ei, în această situație, vectori legați, iar mărimile scalare ce vor rezulta din aceste operații vor fi funcțiuni de punct.

3°. **Elemente de analiza vectorilor legați.** Și concluziile conținute în expunerea elementelor de analiza vectorilor liberi se vor extinde și la cazul funcțiilor vectoriale de tip vectori legați, cu aceeași mențiune că operațiile de derivare și integrare vor trebui considerate ca fiind efectuate în punctul de aplicație al vectorului respectiv; aceasta înseamnă că derivata și primitiva unei asemenea funcții vectoriale vor fi tot vectori legați.

1.2.3. Operații cu vectori alunecători

1°. **Parametrii scalari ai unui vector alunecător.** Relația de echivalență, cu care este dotată mulțimea $(\overline{\mathcal{V}}_a)$ a vectorilor alunecători, are următoarea formulare:

Doi vectori, $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$, aparținînd mulțimii $(\overline{\mathcal{V}}_a)$, sînt echivalenți între ei atunci cînd îndeplinesc condițiile:

— au modulii egali $(|\bar{v}_1| = |\bar{v}_2|)$;
— au suportul comun $(\bar{i}_{v_1} = \bar{i}_{v_2})$;
— au același sens $(v_1 = v_2)$,

relația de echivalență exprimîndu-se și de astă dată prin egalitatea

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2. \tag{1.148}$$

Faptul că relația de echivalență nu conține nici o referire la poziția punctului de aplicație, arată că acest punct poate fi oriunde pe suport; în ceea ce privește necesitatea precizării suportului, ea trebuie înțeleasă în sensul că într-un domeniu determinat al spațiului — acesta fiind, în mecanică, volumul corpului căruia i se studiază

Scanned with CamScanner

starea de mișcare—, poziția suportului trebuie să fie în fiecare moment precis determinată, ceea ce nu exclude însă posbilitatea ca atît poziția cît și orientarea acestui suport să se modifice în timp.

Din formularea precedentă a relației de echivalență se mai deduce că un asemenea vector alunecător va fi determinat tot printr-un număr de șase elemente scalare, acestea fiind reprezentate și acum prin aceleași șase mărimi care determinau și un vector legat și anume:

— modulul vectorului, $|\bar{v}|$;

— două din cosinusurile lui directoare $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$, definite la fel ca și în cazul vectorului legat;

— cele trei coordonate carteziene ale unui punct arbitrar, $B(x_B, y_B, z_B)$ al suportului, cu singura deosebire că, de astă dată, numai 5 dintre ei vor fi independenți.

Într-adevăr, dacă în locul primilor trei parametri se introduc și acum proiecțiile vectorului pe axele de coordonate carteziene triortogonale $(v_x = |\bar{v}|\alpha_x;\ v_y = |\bar{v}|\,\alpha_y;\ v_z = |\bar{v}|\,\alpha_z)$, atunci vectorul alunecător $\bar{v}$ va putea fi determinat prin modulul lui și prin ecuațiile suportului său, ecuații care, dat fiind faptul că se cunoaște punctul B al suportului și parametrii săi directori — aceștia putînd fi reprezentați chiar prin proiecțiile vectorului —, vor avea formele

$$\frac{x - x_B}{v_x} = \frac{y - y_B}{v_y} = \frac{z - z_B}{v_z}. \tag{1.149}$$

Pe de altă parte însă, prin egalarea primelor două rapoarte din ecuațiile precedente cu ultimul și prin introducerea notațiilor

$$\frac{v_z}{v_x} = \frac{\alpha_z}{\alpha_x} = m_1\ ;\quad \frac{v_z}{v_y} = \frac{\alpha_z}{\alpha_x} = m_2\,; \tag{1.150}$$

$$z_B - \frac{v_z}{v_x} x_B = z_B - \frac{\alpha_z}{\alpha_x} x_B = n_1\,;\ z_B - \frac{v_z}{v_y} y_B = z_B - \frac{\alpha_z}{\alpha_y} y_B = n_2$$

ecuațiile (1.149) pot fi aduse la forma

$$z = m_1 x + n_1\,;\ z = m_2 y + n_2, \tag{1.151}$$

rezultînd de aici că determinarea suportului unui vector alunecător poate fi făcută numai prin 4 parametri scalari, iar a vectorului alune-

Scanned with CamScanner

cător numai prin 5 parametri scalari independenți, aceștia putînd fi reprezentați prin mărimile $|\bar{v}|$, m_1, m_2, n_1 și n_2.

Determinarea unui vector alunecător cu ajutorul celor 5 mărimi precizate mai sus are însă dezavantajul că implică considerarea unui anumit punct B al suportului; este posibilă totuși și o determinare independentă de alegerea unui asemenea punct, înlocuindu-se coordonatele x_B, y_B și z_B cu trei funcții de mărimile v_x, v_y, v_z, x_B y_B și z_B, determinate obișnuit pe alte căi și care se introduc prin considerarea vectorului alunecător ca rezultînd din asocierea altor doi vectori, aparținînd primelor două mulțimi analizate — mulțimea vectorilor liberi și mulțimea vectorilor legați —, fapt care va permite și extinderea operațiilor algebrice definite în cadrul acestor mulțimi la cazul vectorilor alunecători. Este vorba de:

— *un vector liber*, $\bar{v}^*$, cu același modul și aceeași orientare ca și vectorul $\bar{v}$, acestui vector putîndu-i-se da, în consecință, orice punct de aplicație în spațiu, în particular, chiar originea axelor de coordonate (fig. 1.17);

— *un vector legat*, $\bar{\mathcal{M}}_0(\bar{v}) = \bar{\mathcal{M}}$, aplicat în punctul comun de aplicație O, al vectorilor $\bar{r} = \overrightarrow{OB}$ și $\bar{v}^*$, definit prin relația

$$\bar{\mathcal{M}}_0(\bar{v}) = \bar{\mathcal{M}} = \bar{r} \times \bar{v}^* \tag{1.152}$$

și numit *moment al vectorului alunecător* $\bar{v}$ *în raport cu polul* O, acest ultim vector fiind orientat după normala la planul (π) determinat de vectorul de poziție $\bar{r}_B$ al punctului de aplicație B în raport cu polul O și de vectorul liber $\bar{v}^*$ aplicat în O, sensul momentului fiind determinat de regula burghiului drept, (fig. 1.17).

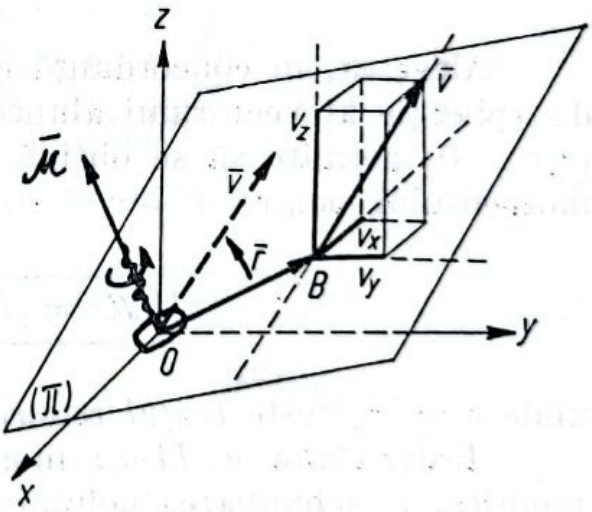


Fig. 1.17.

După cum se va vedea ulterior, vectorul liber $\bar{v}^*$ va determina mărimea și orientarea vectorului alunecător $\bar{v}$, iar vectorul legat $\bar{\mathcal{M}}$ va permite determinarea suportului acestui vector.

În prealabil însă vor trebui precizate proprietățile noului vector introdus, precum și modul lui de calcul în aplicații. Pentru aceasta, se va reaminti faptul că toate operațiile algebrice definite pentru vectorii liberi și legați vor putea fi aplicate și ansamblului de vectori

Scanned with CamScanner

v^* și $-\mathcal{M}$ din polul O; de asemenea, se mai menționează faptul că, în mod curent, vectorul liber se notează tot cu simbolul $\bar{v}$ al vectorului alunecător, subînțelegîndu-se însă în expresia

$$\boxed{\bar{\mathcal{M}} = \bar{r} \times \bar{v}} \tag{1.153}$$

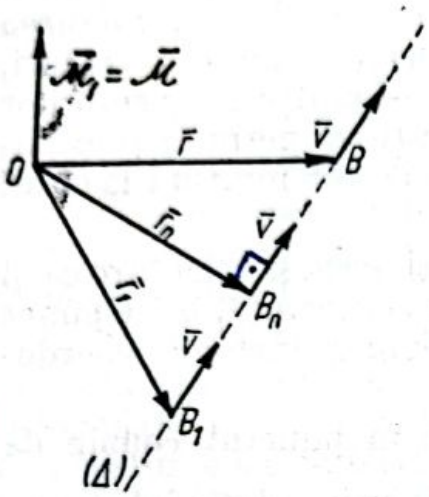


Fig. 1.18.

că vectorul $\bar{v}$ trebuie considerat vector liber.

Ținînd seama de observațiile precedente, se vor demonstra mai întîi următoarele două proprietăți ale momentului polar al unui vector alunecător:

Proprietatea I: Momentul unui vector alunecător în raport cu un pol este independent de poziția pe suport a punctului său de aplicație.

Proprietatea se justifică imediat, observîndu-se că din fig. 1.18 rezultă șirul de relații:

$$\bar{\mathcal{M}}_1 = \bar{r}_1 \times \bar{v} = (\bar{r} + \overrightarrow{BB_1}) \times \bar{v} = \bar{r} \times \bar{v} + \underbrace{\overrightarrow{BB_1} \times \bar{v}}_{0} = \bar{r} \times \bar{v} = \bar{\mathcal{M}}.$$

Alegerea, în concordanță cu această proprietate, a punctului de aplicație al vectorului alunecător în poziția particulară $B_n(\bar{r}_n)$, $(\bar{r}_n \bar{v} = 0)$ permite să se obțină o expresie simplă pentru modulul momentului polar

$$\boxed{|\,|\bar{\mathcal{M}}| = |\bar{r}_n \times \bar{v}| = b\,|\bar{v}|\,|} \tag{1.154}$$

unde $b = |\bar{r}_n|$ este *brațul vectorului alunecător în raport cu polul O*.

Proprietatea a II-a: momentul unui vector alunecător se modifică la schimbarea polului după relația

$$\boxed{\bar{\mathcal{M}}_0 = \bar{\mathcal{M}} = \bar{\mathcal{M}}_Q + \bar{r}_Q \times \bar{v}} \tag{1.154'}$$

unde $\bar{r}_Q$ este vectorul de poziție al noului pol Q, în raport cu polul inițial O.

Scanned with CamScanner

Și această proprietate poate fi justificată cu ușurință observîndu-se că, în baza fig. 1.19, poate fi scris șirul de relații :

$$\overline{\mathcal{M}}_O = \overline{\mathcal{M}} = \bar{r} \times \bar{v} = (\bar{r}_Q + \bar{r}') \times \bar{v} = \bar{r}_Q \times \bar{v} + \bar{r}' \times \bar{v} = \bar{r}_Q \times \bar{v} + \overline{\mathcal{M}}_Q$$

Trecînd la prezentarea modului de calcul, în aplicații, al momentului polar al unui vector alunecător, vor trebui deosebite următoarele două situații distincte :

Cazul spațial (vectorul are poziție și orientare oarecare în spațiu).

În această situație, calculul momentului va putea fi efectuat dacă se cunosc proiecțiile pe axele de coordonate carteziene ale vectorului alunecător și coordonatele unui punct arbitrar B al suportului său scriindu-se

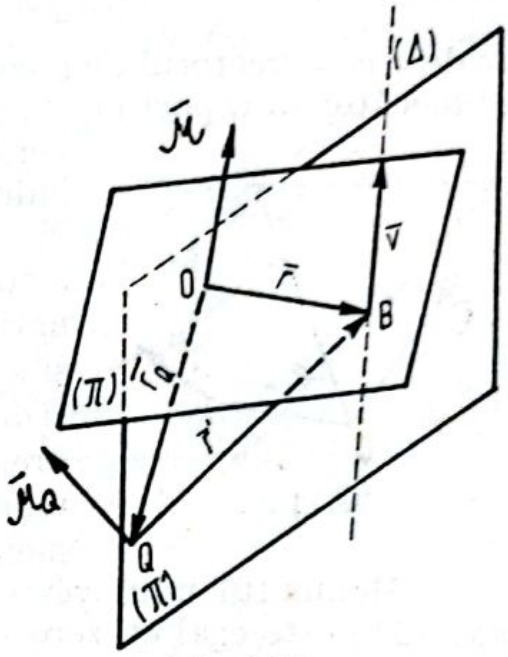


Fig. 1.19.

$$\overline{\mathcal{M}} = \bar{r}_B \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_B & y_B & z_B \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \tag{1.155}$$

proiecțiile pe axele de coordonate ale momentului, avînd expresiile

$$\boxed{\mathcal{M}_x = \overline{\mathcal{M}}\bar{i} = (y_B v_z - z_B v_y) \, ; \, \mathcal{M}_y = \overline{\mathcal{M}}\bar{j} = (z_B v_x - x_B v_z) \, ; \, \mathcal{M}_z = + \overline{\mathcal{M}}\bar{k} = (x_B v_y - y_B v_x)}, \tag{1.156}$$

purtînd numele de *momente axiale ale vectorului alunecător* $\bar{v}$.

De asemenea, se mai poate folosi și exprimarea matriceală a momentului scriindu-se :

$$\boxed{\| \mathcal{M} \| = \mathbf{M} = \tilde{\mathbf{r}}_B \mathbf{v} = \begin{Vmatrix} 0 & -z_B & y_B \\ z_B & 0 & -x_B \\ -y_B & x_B & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Vmatrix}}. \tag{1.157}$$

Scanned with CamScanner

Noțiunea de moment axial al unui vector alunecător poate fi extinsă la cazul unei axe oarecare (Δ^*), de versor $\bar{i}^*_\Delta$ (fig. 1.20), momentul vectorului alunecător $\bar{v}$ în raport cu această axă fiind dat de relația

$$\mathcal{M}^*_\Delta = \bar{\mathcal{M}}\bar{i}^*_\Delta = \bar{i}^*_\Delta(\bar{r} \times \bar{v}), \tag{1.158}$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție al punctului de aplicație al vectorului alunecător în raport cu un pol O ales arbitrar pe axa (Δ^*); se poate verifica cu ușurință că acest moment este independent de poziția polului O pe axa(Δ^*).

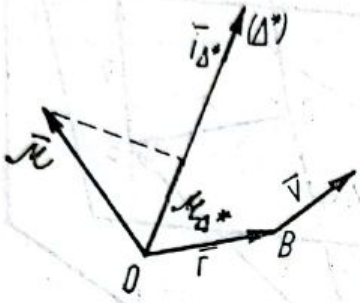


Fig. 1.20.

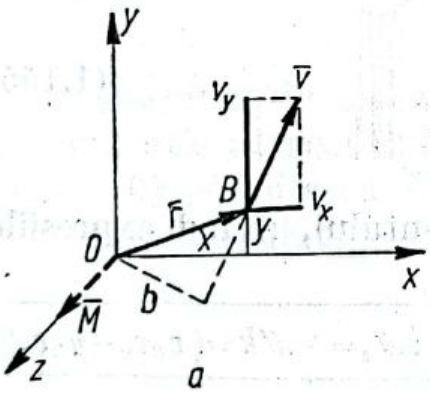
Avînd în vedere faptul că egalitatea cu zero a momentului axial $\mathcal{M}^*_\Delta$ implică coplanaritatea vectorilor $\bar{i}^*_\Delta$, $\bar{r}$ și $\bar{v}$ — deci a axei (Δ^*) și a suportului alunecător — și ținînd seama și de pozițiile relative posibile ale acestor două drepte în plan, se poate enunța următoarea regulă pentru recunoașterea axelor de momente egale cu zero :

Momentul unui vector alunecător $\bar{v}$, ($\bar{v} \neq 0$), în raport cu o axă (Δ^*) este egal cu zero în următoarele trei cazuri :

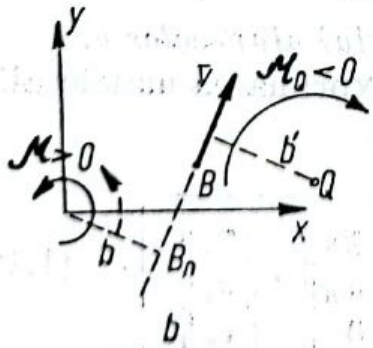
— cînd suportul vectorului se confundă cu axa ;

— cînd suportul vectorului este paralel cu axa ;

— cînd suportul vectorului intersectează axa.



a



b

Fig. 1.21.

Cazul plan (vectorul alunecător se găsește în planul Oxy). În această de-a doua situație, momentul vectorului în raport cu polul O fiind orientat după Oz (fig. 1.21), proiecția lui pe această axă va coincide cu valoarea scalară a sa raportată la versorul $\bar{k}$, valoare ce poate fi calculată cu ajutorul relației

$$\boxed{\mathcal{M} = \pm\, b\,|\bar{v}|} \tag{1.159}$$

semnul — unic în problemele concrete — fiind precizat după *regula observatorului*, care coincide întru totul și cu regula burghiului drept și care are următoarea formulare :

Scanned with CamScanner

Semnul valorii scalare a momentului unui vector alunecător din planul Oxy, considerat în raport cu un pol din acest plan este pozitiv, sau negativ, după cum rotația brațului vectorului în jurul polului respectiv, efectuată în sensul indicat de vector, se execută în sens direct (antiorar), sau în sens invers (orar).

În repartizarea plană lipsind axa *Oz* după care este orientat momentul în cazul plan, reprezentarea acestuia se face *convențional* cu ajutorul unei săgeți circulare cu centrul în polul considerat, și cu sensul indicînd sensul valorii scalare $\mathcal{M}$, (în fig. 1.21, b, $\mathcal{M}_O > 0$ și $\mathcal{M}_O < 0$).

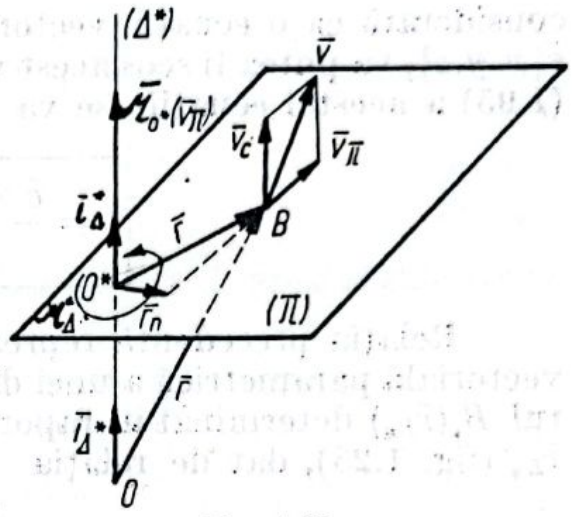


Fig. 1.22.

O formulă de calcul analogă celei stabilite pentru cazul plan poate fi dedusă și pentru calculul momentului axial $\mathcal{M}_\Delta^*$ (fig. 1.22), luîndu-se polul pe axa (Δ*) în punctul, *O** situat la intersecția axei cu planul (π), normal la axă și conținînd unul din punctele suportului vectorului alunecător; descompunînd vectorul $\bar{v}$ în componentele ortogonale $\bar{v}_c$—coliniară cu axa (Δ*) — și $\bar{v}_\pi$ — situată în planul (π)—, se poate scrie șirul de relații :

$$\mathcal{M}_\Delta^* = \bar{i}_\Delta^*(\bar{r} \times \bar{v}) = \bar{i}_\Delta^*[\bar{r} \times (\bar{v}_c + \bar{v}_\pi)] = \bar{i}_\Delta^*(\bar{r} \times \bar{v}_\pi) =$$

$$= \bar{i}_\Delta^*(\bar{r}_n \times \bar{v}_\pi) = \bar{i}_\Delta^* \overline{\mathcal{M}}_{O^*}(\bar{v}_\pi) = \mathcal{M}_{O^*}(\bar{v}_\pi)$$

rezultînd deci

$$\boxed{|\mathcal{M}_\Delta^* = \mathcal{M}_{O^*}(\bar{v}_\pi) = \pm b\,|\bar{v}_\pi|\,|} \quad , \qquad (1.160)$$

semnul din momentul drept stabilindu-se și acum după regula observatorului, cu condiția de a privi planul (π) dinspre sensul pozitiv al axei (Δ*) (în fig. 1.22, $\mathcal{M}_\Delta^* > 0$).

Cu aceste precizări, se poate trece la prezentarea modului de determinare a suportului unui vector alunecător cu ajutorul momentului său polar în raport cu originea sistemului de referință cartezian triortogonal, considerîndu-se și aici cele două situații distincte :

Cazul spațial (vectorul alunecător cu poziție și orientare oarecare în spațiu).

Scanned with CamScanner

Cunoscîndu-se vectorii

$$\bar{v}\{v_x, v_y, v_z\} \quad \text{și} \quad \overline{\mathcal{M}}\{\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y, \mathcal{M}_z\},$$

— primul liber și al doilea legat, dar considerați ambii aplicați în polul O — , din ecuația de definiție a momentului polar, adică,

$$\bar{r} \times \bar{v} = \overline{\mathcal{M}},$$

considerată ca o ecuație vectorială algebrică în vectorul necunoscut $\bar{r}\{x, y, z\}$, va putea fi scos acest vector, el reprezentînd soluția de forma (1.95) a acestei ecuații; se va putea scrie deci :

$$\boxed{\bar{r} = \frac{\bar{v} \times \overline{\mathcal{M}}}{\bar{v}^2} + \lambda \bar{v}}. \tag{1.161}$$

Relația precedentă reprezintă, în geometria analitică, ecuația vectorială parametrică a unei drepte din spațiu, care trece prin punctul $B_n(\bar{r}_{B_n})$ determinat în raport cu polul O prin vectorul de poziție $\bar{r}_{B_n}$ (fig. 1.23), dat de relația

$$\bar{r}_{B_n} = \frac{\bar{v} \times \overline{\mathcal{M}}}{\bar{v}^2}, \tag{1.162}$$

normal în O la planul (π) determinat de vectorii $\bar{v}$ și $\overline{\mathcal{M}}$ și cu modulul

$$|\bar{r}_{B_n}| = \frac{|\bar{v} \times \overline{\mathcal{M}}|}{|\bar{v}^2|} = \frac{|\overline{\mathcal{M}}|}{|\bar{v}|} = b \tag{1.163}$$

— adică egal cu brațul vectorului în raport cu polul O — , și care dreaptă are direcția determinată prin vectorul $\bar{v}$ liber.

Se înțelege, din precizările precedente, că această dreaptă va fi chiar suportul vectorului alunecător $\bar{v}$.

Prin proiectarea ecuației vectoriale (1.161) pe axele de coordonate carteziene triortogonale și prin egalarea, între ele, a expresiilor lui λ scoase din fiecare ecuație de proiecție,

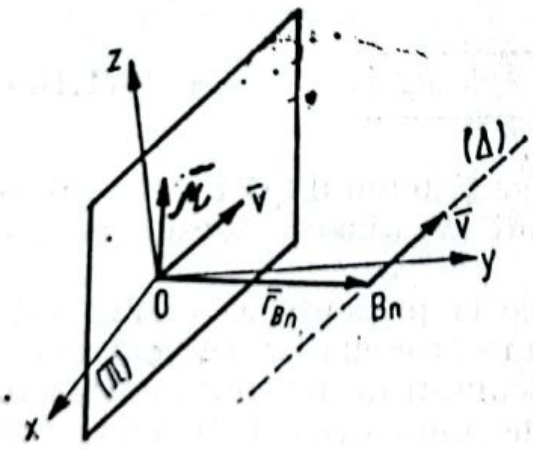


Fig. 1.23

se obțin *ecuațiile analitice sub forma canonică* ale suportului vectorului alunecător considerat :

$$\boxed{\frac{x-\frac{1}{v^2}(v_y\mathcal{M}_z-v_z\mathcal{M}_y)}{v_x}=\frac{y-\frac{1}{v^2}(v_z\mathcal{M}_x-v_x\mathcal{M}_z)}{v_y}=\frac{z-\frac{1}{v^2}(v_x\mathcal{M}_y-v_y\mathcal{M}_x)}{v_z}.} \tag{1.164}$$

De asemenea, ecuația suportului mai poate fi scrisă și sub forma matriceală :

$$\boxed{\mathbf{r}-\frac{1}{v^2}\tilde{\mathbf{v}}\boldsymbol{M}=\lambda\mathbf{v}}. \tag{1.165}$$

— *Cazul plan* (vectorul alunecător situat în planul Oxy, iar momentul său în polul O fiind orientat după axa Oz).

În această situație, vectorii $\bar{v}$ (liber) și $\overline{\mathcal{M}}$ (legat), care determină vectorul alunecător $\bar{v}$, vor depinde numai de cîte doi, respectiv, unul singur, dintre parametrii lor scalari :

$$\bar{v}\{v_x, v_y,\}\ ;\ \overline{\mathcal{M}}\{\mathcal{M}\} \tag{1.166}$$

ceea ce nu va modifica însă forma (1.161) a ecuației vectoriale a suportului ; în schimb, se va simplifica deducerea ecuației analitice a suportului, ea rezultînd acum din expresia analitică a valorii scalare a momentului, adică

$$\mathcal{M}=\mathcal{M}_z=(\bar{r}\times\bar{v})\bar{k}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\x&y&0\\v_x&v_y&0\end{vmatrix}\bar{k}=xv_y-yv_x$$

scriindu-se deci

$$\boxed{y=\frac{v_y}{v_x}x-\frac{\mathcal{M}}{v_x}}. \tag{1.167}$$

Scanned with CamScanner

Expunerea precedentă permite să se tragă concluzia că un vector alunecător este complet determinat prin cele trei proiecții pe axele de coordonate carteziene ale vectorului liber și prin cele trei proiecții ale momentului său în raport cu originea axelor de coordonate; din acest motiv, aceste 6 mărimi au fost numite *parametrii scalari ai vectorului alunecător* $\bar{v}$, evidențiindu-se acest rol al lor sub forma

$$\bar{v}\,\{v_x, v_y, v_z; \mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y, \mathcal{M}_z\}. \tag{1.168}$$

Condiția evidentă de ortogonalitate a vectorilor $\bar{v}$ și $\overline{\mathcal{M}}$:

$$\bar{v}\overline{\mathcal{M}} = \bar{v}(\bar{r} \times \bar{v}) = 0$$

sau, exprimată analitic

$$v_x\mathcal{M}_x + v_y\mathcal{M}_y + v_z\mathcal{M}_z = 0 \tag{1.169}$$

arată că din cei 6 parametri scalari numai 5 sînt independenți, putînd lua valori arbitrare, cel de-al șaselea trebuind să satisfacă relația (1.169).

În cazul cînd vectorul alunecător este chiar versorul suportului său (Δ), $\bar{i}_\Delta$ = vers (Δ), parametrii lui scalari, notați

$$\bar{i}_\Delta\,\{\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z; \mathcal{M}_x(\bar{i}_\Delta), \mathcal{M}_y(\bar{i}_\Delta), \mathcal{M}_z(\bar{i}_\Delta)\} \tag{1.170}$$

poartă denumirile de *coordonate plückeriene* ale dreptei (Δ), numărul celor independenți dintre ei reducîndu-se acum la 4, datorită relațiilor

$$\bar{i}_\Delta^2 = 1\,;\ \bar{i}_\Delta\overline{\mathcal{M}}(\bar{i}_\Delta) = 0. \tag{1.171}$$

Se mai poate spune, în acest caz, că un vector alunecător este determinat prin modulul său și prin cele 4 coordonate plückeriene ale suportului său; din acest motiv, parametrii scalari v_x, v_y, v_z, $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$ și $\mathcal{M}_z$ mai sînt numiți, uneori, *coordonatoare plückeriene ale vectorului alunecător* $\bar{v}$.

Ansamblul format din vectorul liber $\bar{v}$ și vectorul legat $\overline{\mathcal{M}}$ este numit *torsorul în polul O al vectorului alunecător* $\bar{v}$ și este notat cu simbolul

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_0(\bar{v}) = \overline{\mathcal{T}}(\bar{v}) = \left\{\begin{matrix}\bar{v}\\ \overline{\mathcal{M}}\end{matrix}\right\}} \tag{1.172}$$

Scanned with CamScanner

vectorii $\bar{v}$ și $\bar{\mathcal{M}}$ fiind numiți *componentele torsorului.*

De asemenea, este folosită și următoarea formă matriceală a torsorului:

$$\left\| \mathcal{T}(\bar{v}) \right\| = \left\| \begin{matrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \mathcal{M}_x \\ \mathcal{M}_y \\ \mathcal{M}_z \end{matrix} \right\| . \qquad (1.173)$$

Din cele prezentate mai sus, rezultă că reprezentarea, în schițele mecanice, a unui vector alunecător va putea fi făcută în două moduri:

— prin indicarea suportului și a vectorului pe suport, (fig. 1.24, *a* pentru cazul spațial și fig. 1.25, *a* pentru cazul plan);

— prin perechea de vectori $(\bar{v}, \bar{\mathcal{M}})$ — primul considerat liber —plasați cu punctele de aplicație în originea sistemului de referință (fig. 1.24, *b* pentru cazul spațial și fig. 1.25,*b* pentru cazul plan).

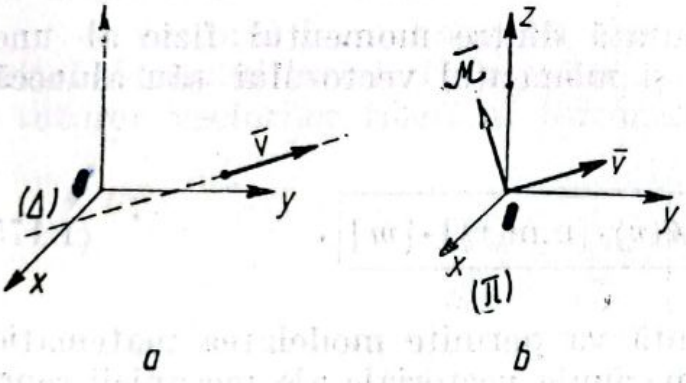


Fig. 1.24.

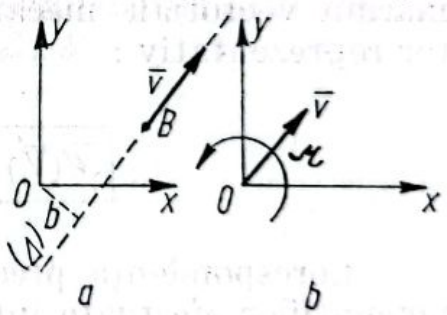


Fig. 1.25.

O precizare se mai impune în legătură cu corespondența dintre momentul fizic al unei mărimi mecanice vectoriale și momentul vectorului alunecător care o reprezintă.

Pe de o parte, pentru momentul vectorului alunecător

$$\bar{v} = v\bar{i}_v = N_v\bar{i}_v \,, \quad (\bar{v}, \bar{i}_v \in \overline{\mathcal{V}} \,; \; N_v \in \mathcal{R})$$

Scanned with CamScanner

cu punctul de aplicație determinat în raport cu polul O prin vectorul de poziție

$$\bar{r} = r\bar{i}_r = N_r\bar{i}_r \ , \ (\bar{r}, \bar{i}_r \in \overline{\mathscr{V}}_l, \ N_r \in \mathscr{R})$$

poate fi scrisă expresia

$$\overline{\mathscr{M}} = \bar{r} \times \bar{v} = N_r N_v \bar{i}_r \times \bar{i}_v = N_r N_v \sin(\bar{i}_r, \bar{i}_v)\bar{i}_{\mathscr{M}} = N_{\mathscr{M}}\bar{i}_{\mathscr{M}}. \tag{1.174}$$

$$(N_r, N_v, N_{\mathscr{M}} \in \mathscr{R}; \ \bar{i}_{\mathscr{M}}, \overline{\mathscr{M}}, \bar{r} \in \overline{\mathscr{V}}_l).$$

Pe de altă parte, momentul fizic al mărimii

$$\bar{V} = V\bar{i}_v = N_v \cdot [\text{u.m.}(v)] \cdot \bar{i}_v = (N_v\bar{i}_v) \cdot [\text{u.m.}(v)] = \bar{v}[\text{u.m.}(v)],$$

cu punctul de aplicație determinat în raport cu polul O prin *vectorul de poziție geometric*

$$\bar{R} = R\bar{i}_r = N_r[\text{m}] \cdot \bar{i}_r = (N_r\bar{i}_r) \cdot [m] = \bar{r} \cdot [m],$$

va fi dat de relația

$$\overline{\mathscr{M}}(\bar{V}) = \bar{R} \times \bar{V} = \bar{r}[m] \times \bar{v}[\text{u.m.}(v)] = \bar{r} \times \bar{v} \cdot [\text{u.m.}(v)] \cdot [m],$$

rezultînd astfel legătura căutată dintre momentul fizic al unei mărimi vectoriale mecanice și momentul vectorului său alunecător reprezentativ :

$$\boxed{\overline{\mathscr{M}}(\bar{V}) = \overline{\mathscr{M}}(\bar{v}) \cdot [\text{u.m}(v)] \cdot [m]}. \tag{1.175}$$

Corespondența precedentă va permite modelarea matematică a operațiilor efectuate între mărimile vectoriale ale mecanicii reprezentabile prin vectori alunecători, cu ajutorul unor operații efectuate cu torsorii acestor din urmă vectori, operații ce vor fi definite în continuare.

2°. Operații algebrice cu torsori Se numește *sistem de vectori alunecători*, notat cu simbolul $\{\bar{v}\}$, un ansamblu de asemenea vectori, repartizați într-un domeniu determinat al spațiului.

În problemele concrete ale mecanicii, acest domeniu este, de regulă, volumul ocupat de corpurile care intervin într-un proces

Scanned with CamScanner

mecanic determinat și în care sînt distribuite mărimile vectoriale reprezentabile prin vectorii alunecători ce alcătuiesc un astfel de sistem.

Fiecare vector $\bar{v}_i$ $\{\bar{v}_i, \bar{M}_i\}$, $(i = 1,2,...,n)$ al sistemului va fi determinat, conform precizărilor anterioare, prin torsorul său într-un pol O — acesta fiind, cel mai adesea, originea sistemului de referință cartezian triortogonal la care este raportată distribuția vectorilor —, scriindu-se deci :

$$\overline{\mathcal{T}}_O(\bar{v}_i) = \overline{\mathcal{T}}(\bar{v}_i) = \left\{\begin{matrix}\bar{v}_i \\ \bar{\mathcal{M}}_i\end{matrix}\right\}, \ (i = 1, 2, .., n). \tag{1.176}$$

În mulțimea $(\overline{\mathcal{T}})$ a acestor torsori se introduc următoarele operații :

Operația de adunare a torsorilor. Suma unui număr determinat, n, de torsori într-un pol O, numită și *torsor rezultant în polul O al sistemului dat de vectori alunecători*, este un nou torsor, notat

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}\{\bar{v}\} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{T}}(\bar{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \left\{\begin{matrix}\bar{v}_i \\ \bar{\mathcal{M}}_i\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\bar{\varphi} \\ \overline{\mathfrak{M}}\end{matrix}\right\}}, \tag{1.177}$$

cu următoarele componente :

— vectorul liber, notat cu simbolul $\bar{\varphi}$ și numit *vector rezultant al sistemului de vectori alunecători*, este definit ca sumă geometrică a tuturor vectorilor liberi ai torsorilor, adică

$$\boxed{\bar{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i}; \tag{1.178}$$

— vectorul legat, notat cu simbolul $\overline{\mathfrak{M}}$ și numit *moment rezultant în polul O ai sistemului dat de vectori alunecători*, este definit ca sumă geometrică a tuturor vectorilor legați ai torsorilor, considerați toți în polul O, adică

$$\boxed{\overline{\mathfrak{M}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{v}_i}. \tag{1.179}$$

Scanned with CamScanner

Calculul efectiv al acestor două componente se va face cu ajutorul proiecțiilor lor pe axele de coordonate carteziene triortogonale,

$$\overline{\mathcal{P}}\left\{\mathcal{P}_x=\sum_{i=1}^{n} v_{ix};\ \mathcal{P}_y=\sum_{i=1}^{n} v_{iy};\ \mathcal{P}_z=\sum_{i=1}^{n} v_{iz}\right\}, \text{ respectiv}$$

$$\mathfrak{M}\left\{\mathfrak{M}_x=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{M}_{ix};\ \mathfrak{M}_y=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{M}_{iy};\ \mathfrak{M}_z=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{M}_{iz}\right\}.$$

Spre deosebire de torsorul unui vector alunecător, care este un ansamblu determinat prin 5 parametri scalari independenți, torsorul rezultant al unui sistem de vectori alunecători este un ansamblu determinat prin 6 parametri scalari independenți, între mărimile $\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y, \mathcal{P}_z, \mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y$ și $\mathfrak{M}_z$ nemaiexistînd, în general, condiția de ortogonalitate (1.169), (în general, $\overline{\mathcal{P}}\ \overline{\mathfrak{M}} \neq 0$).

Proprietățile sumei de torsori:

— *comutativitatea termenilor*, exprimată prin relația

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{\mathcal{T}}(\bar{v}_i)=\sum_{j=1}^{n}\overline{\mathcal{T}}(\bar{v}'_j) \tag{1.180}$$

unde $\bar{v}'_j$ sînt aceiași vectori alunecători — respectiv aceeași vectori liberi din torsori — ca și în prima sumă, dar notați într-o altă ordine, absolut arbitrară;

— *asociativitatea termenilor*, tradusă prin relația

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{\mathcal{T}}(\bar{v}_i)=\sum_{j=1}^{h}\overline{\mathcal{T}}(\bar{v}'_j)+\sum_{j=h+1}^{h+k}\overline{\mathcal{T}}(\bar{v}'_j)+\sum_{j=h+k+1}^{n}\overline{\mathcal{T}}(\bar{v}'_j), \tag{1.181}$$

$$(1\leqslant h<k\leqslant n;\ h,\ k\in\mathcal{N}),$$

cu vectorii $\bar{v}'_j$, avînd aceeași semnificație ca mai sus.

Operația de înmulțire cu scalari. Produsul dintre un torsor $\overline{\mathcal{T}}(\bar{v})=\left\{\frac{\bar{v}}{\mathcal{M}}\right\}$ corespunzător unui pol O, printr-un scalar $\mu\in\mathcal{R}$, este un nou torsor, în același pol și definit prin relația

$$\mu\overline{\mathcal{T}}(\bar{v})=\overline{\mathcal{T}}(\mu\bar{v})=\left\{\frac{\mu\bar{v}}{\mu\mathcal{M}}\right\}. \tag{1.182}$$

Scanned with CamScanner

Proprietățile operației de înmulțire cu scalari:

— *distributivitatea în raport cu suma torsorilor*, exprimată prin relația

$$\mu \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{T}}(\bar{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{T}}(\mu \bar{v}_i); \ (\mu \in \mathcal{R}); \tag{1.183}$$

— *distributivitatea în raport cu suma scalarilor*, evidențiată prin relația

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j \right) \overline{\mathcal{T}}(\bar{v}_i) = \sum_{j=1}^{m} \overline{\mathcal{T}}(\mu_j \bar{v}_i); \ (\mu_j \in \mathcal{R}); \tag{1.184}$$

— *asociativitatea în raport cu factorii scalari*, ilustrată prin relațiile

$$\lambda\mu\overline{\mathcal{T}}(\bar{v}_i) = \lambda\overline{\mathcal{T}}(\mu\bar{v}_i) = \mu\overline{\mathcal{T}}(\lambda\bar{v}_i) = \overline{\mathcal{T}}(\lambda\mu\bar{v}_i),$$

$$(\lambda, \mu \in \mathcal{R}). \tag{1.185}$$

Operația de înmulțire scalară dintre componentele torsorului rezultant. Considerînd cazul general, al unui torsor rezultant în polul O, $\overline{\mathcal{T}}\ \{\bar{v}\} = \left\{ \begin{matrix} \overline{\mathcal{R}} \\ \overline{\mathcal{M}} \end{matrix} \right\}$, se definește un produs scalar al componentelor lui, reprezentat prin expresia

$$\boxed{S = \overline{\mathcal{R}}\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{R}_x\mathcal{M}_x + \mathcal{R}_y\mathcal{M}_y + \mathcal{R}_z\mathcal{M}_z} \tag{1.186}$$

numită și *scalarul torsorului*, *automomentul torsorului* sau încă *trinomul invariant al torsorului*, ultima denumire urmînd a fi justificată în continuare.

Operațiile definite mai sus pot fi extinse la cazul reuniunilor de sisteme de vectori alunecători $\{v_k\}$, $(k=1, 2, ..., q)$, formînd un sistem rezultant de vectori alunecători definit sub forma

$$\{\bar{v}\} = \bigcup_{k=1}^{q} \{\bar{v}_k\},$$

Scanned with CamScanner

cu torsorul rezultant satisfăcînd următoarele proprietăți funcționale fundamentale :

$$\overline{\mathcal{T}}\{\bar{v}\} = \sum_{k=1}^{q} \overline{\mathcal{T}}\{\bar{v}_k\} = \sum_{k=1}^{q} \begin{Bmatrix} \overline{\mathcal{P}}_k \\ \overline{\mathcal{M}}_k \end{Bmatrix} ; \tag{1.187}$$

$$\lambda \sum_{k=1}^{q} \overline{\mathcal{T}}\{\bar{v}_k\} = \sum_{k=1}^{q} \overline{\mathcal{T}}\{\lambda \bar{v}_k\} = \sum_{k=1}^{q} \begin{Bmatrix} \lambda \overline{\mathcal{P}}_k \\ \lambda \overline{\mathcal{M}}_k \end{Bmatrix} \tag{1.188}$$

și

$$\overline{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \{\bar{v}_k\} \right\} = \sum_{k=1}^{q} \overline{\mathcal{T}}\{\lambda_k \bar{v}_k\} = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \overline{\mathcal{T}}\{\bar{v}_k\}, \tag{1.189}$$

care permit considerarea torsorilor rezultanți ca *operatori liniari* aplicați sistemelor de vectori alunecători $\{\bar{v}_k\}$.

Invarianții unui torsor rezultant. Din modul de definire a componentelor unui torsor rezultant se pot trage următoarele concluzii privind comportarea acestor componente la trecerea de la un pol la altul :

— vectorul rezultant al unui sistem dat de vectori alunecători va avea aceeași valoare în orice pol, ca urmare a definirii lui ca sumă geometrică de vectori liberi ;

— momentul rezultant al unui sistem de vectori alunecători se modifică la schimbarea polului, relația de trecere de la un pol Q la un pol O putînd fi stabilită în baza relației (1.154), dedusă pentru momentul unui singur vector, scriindu-se :

$$\overline{\mathcal{M}}_O = \overline{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^{n} (\overline{\mathcal{M}}_{iQ} + \bar{r}_Q \times \bar{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}_{iQ} + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_Q \times \bar{v}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}_{iQ} + \bar{r}_Q \times \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i$$

și deci, ținînd seama și de semnificațiile celor două sume :

$$\boxed{\overline{\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{M}}_Q + \bar{r}_Q \times \overline{\mathcal{P}}.} \tag{1.190}$$

Cel de-al doilea termen din membrul drept al ultimei relații poate fi interpretat ca moment rezultant în polul O al unui *torsor rezultant de vector rezultant zero* : această interpretare permite să

Scanned with CamScanner

se scrie următoarea relație de trecere, de la un pol Q la un O, pentru un torsor rezultant :

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}\{\bar{v}\} = \overline{\mathcal{T}}_Q\{\bar{v}\} + \{\bar{r}_Q \overset{0}{\times} \overline{\mathcal{P}}\}.} \tag{1.191}$$

Cercetînd, în continuare, ce se întîmplă cu scalarul unui torsor rezultant la trecerea de la polul Q la polul O se poate scrie, ținînd seama și de expresia (1.190), următorul șir de relații :

$$S = \overline{\mathcal{P}}\overline{\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{P}}[\overline{\mathcal{M}}_Q + \bar{r}_Q \times \overline{\mathcal{P}}] = \overline{\mathcal{P}}\overline{\mathcal{M}}_Q + \overline{\mathcal{P}}\underbrace{[\bar{r}_Q \times \overline{\mathcal{P}}]}_{0}$$

adică

$$\overline{\mathcal{P}}\overline{\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{P}}\overline{\mathcal{M}}_Q \tag{1.192}$$

rezultînd de aici că acest scalar nu se modifică la o asemenea trecere, de unde și denumirea de *trinom invariant* care i s-a mai dat.

Constatările precedente scot în evidență existența a doi *invarianți* ai unui torsor la trecerea de la un pol la altul :

— *invariantul vectorial al torsorului*, reprezentat prin vectorul rezultant :

$$\boxed{\overline{\mathcal{J}}_1 = \overline{\mathcal{P}};} \tag{1.193}$$

— *invariantul scalar al torsorului*, reprezentat prin automomentul său :

$$\boxed{\mathcal{J}_2 = \overline{\mathcal{P}}\overline{\mathcal{M}}.} \tag{1.194}$$

Se înțelege că în cazul torsorului unui vector unic, valoarea invariantă a acestui scalar este zero, ca urmare a ortogonalității celor două componente ale torsorului.

O consecință directă a existenței celor doi invarianți o constituie și invarianța raportului

$$\frac{\mathcal{J}_2}{|\overline{\mathcal{J}}_1|} = \frac{\overline{\mathcal{P}}\overline{\mathcal{M}}}{|\overline{\mathcal{P}}|} = \frac{\overline{\mathcal{P}}}{|\overline{\mathcal{P}}|}\overline{\mathcal{M}} = \bar{i}_{\mathcal{P}}\overline{\mathcal{M}} = \mathrm{pr}_{\mathcal{P}}\overline{\mathcal{M}} \tag{1.195}$$

Scanned with CamScanner

cu semnificația deci de proiecție a momentului rezultant pe vectorul rezultant (fig. 1.26).

Axa centrală a unui sistem de vectori alunecători. Prin descompunerea momentului rezultant $\overline{\mathfrak{M}}$ dintr-un pol O în două componente ortogonale, — componenta $\overline{\mathfrak{M}}_c$ colinară cu vectorul rezultant și componenta $\overline{\mathfrak{M}}_n$ normală la acest vector, (fig. 2.27) —, poate fi scrisă relația:

$$\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}}_c + \overline{\mathfrak{M}}_n, \tag{1.196}$$

Fig. 1.26.

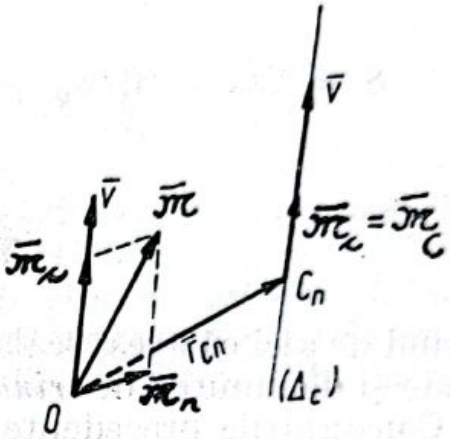


Fig. 1.27.

cu componenta coliniară invariantă la schimbarea polului;

$$\overline{\mathfrak{M}}_e = \mathfrak{M}_c \bar{i}_{\bar{\varphi}} = \mathfrak{M}_c \frac{\bar{\varphi}}{|\bar{\varphi}|} = \frac{\mathcal{J}_2}{|\bar{\mathcal{J}}_1|} \frac{\bar{\varphi}}{|\bar{\mathcal{J}}_1|} = \frac{\mathcal{J}_2}{\mathcal{J}_1^2} \bar{\varphi} = \frac{\bar{\varphi}\overline{\mathfrak{M}}}{\bar{\varphi}^2} \bar{\varphi}. \tag{1.197}$$

Trăgînd de aici concluzia că singura componentă a momentului rezultant care se modifică la trecerea de la un pol la altul este componenta normală $\overline{\mathfrak{M}}_n$, se pune atunci problema examinării posibilității de existență a unui pol $C(\bar{r}_C)$ din domeniul spațiului în care sînt distribuiți vectorii sistemului — $\bar{r}_C$ fiind vectorul său de poziție în raport cu polul inițial O — în care această componentă normală să devină egală cu zero.

Notînd cu $\overline{\mathfrak{M}}_C$ momentul rezultant al sistemului dat de vectori alunecători în acest nou pol, condiția de existență a unui asemenea punct C se va traduce matematic prin condiția de coliniaritate a vectorilor $\bar{\varphi} \neq 0$ și $\overline{\mathfrak{M}}_C = \overline{\mathfrak{M}}_c$, (fig. 1.27), condiția exprimată prin egalitatea

$$\bar{\varphi} \times \overline{\mathfrak{M}}_C = 0 \tag{1.198}$$

Scanned with CamScanner

și care include în ea și *condiția de minimum* pentru modulul momentului rezultant în C, conform relațiilor evidente :

$$|\overline{\mathfrak{M}}_C| = |\overline{\mathfrak{M}}_c| < \sqrt{\overline{\mathfrak{M}}_c^2 + \overline{\mathfrak{M}}_n^2} = |\overline{\mathfrak{M}}|. \tag{1.199}$$

Observînd că, în baza relației (1.190), (cu : $Q \equiv C$), momentul $\overline{\mathfrak{M}}_C$ poate fi exprimat în funcție de momentul în polul O, considerat cunoscut, egalitatea (1.198) va lua forma

$$\overline{\varphi} \times [\overline{\mathfrak{M}} - \bar{r}_C \times \overline{\varphi}] = \overline{\varphi} \times \overline{\mathfrak{M}} - \overline{\varphi} \times (\bar{r}_C \times \overline{\varphi}) = 0.$$

Descompunînd produsul dublu vectorial, împărțind prin $\overline{\varphi}^2$ și introducînd notația

$$\frac{\overline{\varphi}\bar{r}_C}{\overline{\varphi}^2} = \lambda, \tag{1.200}$$

se obține soluția problemei sub forma

$$\boxed{\bar{r}_C = \frac{\overline{\varphi} \times \overline{\mathfrak{M}}}{\overline{\varphi}^2} + \lambda\overline{\varphi} = \bar{r}_{C_n} + \lambda\overline{\varphi},} \tag{1.201}$$

care scoate în evidență, prin factorul scalar nedeterminat λ, existența unei infinități de puncte C satisfăcînd condițiile precizate, locul lor geometric fiind o dreaptă (Δ_C) (fig. 1.27) trecînd prin punctul C_n determinat prin vectorul de poziție $\bar{r}_{C_n}$ $(\bar{r}_{C_n} \perp \Delta_C)$ și cu orientarea dată de vectorul rezultant.

Această dreaptă este numită *axă centrală a sistemului de vectori alunecători* și se caracterizează prin următoarele două proprietăți :

— este locul geometric al tuturor punctelor din domeniul de distribuție al vectorilor alunecători în care vectorul rezultant și momentul rezultant al sistemului sînt coliniari :

— este locul geometric al tuturor punctelor domeniului de distribuție al vectorilor alunecători în care momentul rezultant are valoare minimă, acest *moment minim* avînd expresia :

$$\boxed{\overline{\mathfrak{M}}_{min} = \overline{\mathfrak{M}}_C = \frac{\overline{\varphi}\overline{\mathfrak{M}}}{|\overline{\varphi}|}\,\bar{i}_\varphi = \frac{\overline{\varphi}\overline{\mathfrak{M}}}{\overline{\varphi}^2}\,\overline{\varphi}\,.} \tag{1.202}$$

Scanned with CamScanner

În cazul ortogonalității componentelor torsorului ($\overline{\mathcal{R}}\,\overline{\mathcal{M}} = 0$), axa centrală va reprezenta locul geometric al tuturor punctelor de moment zero; aceasta e situația torsorilor vectorilor unici, axa centrală corespunzătoare unui asemenea torsor reprezentînd în acest caz chiar suportul vectorului (singurul loc geometric al punctelor de moment zero).

Ecuațiile analitice ale axei centrale vor avea o formă analogă ecuațiilor suportului unui vector alunecător, proiecțiile pe axe ale vectorului și momentului fiind înlocuite însă acum cu proiecțiile vectorului rezultant și momentului rezultant al torsorului.

3°. Derivarea torsorilor funcții de timp. În multe din situațiile întîlnite în problemele mecanicii, componentele unui torsor rezultant sînt funcții de timp, evidențiindu-se acest lucru sub forma

$$\overline{\mathcal{T}}\{\bar{v}(t)\} = \left\{\frac{\overline{\mathcal{R}}(t)}{\overline{\mathcal{M}}(t)}\right\}. \tag{1.203}$$

În ipoteza că funcțiile vectoriale $\overline{\mathcal{R}}(t)$ și $\overline{\mathcal{M}}(t)$ sînt continue și derivabile în raport cu timpul în intervalul de definiție al lor, se va defini ca *derivată în raport cu timpul a torsorului lor* un nou torsor, avînd drept componente derivatele în raport cu timpul ale componentelor torsorului dat, adică se va scrie

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\overline{\mathcal{T}}\{\bar{v}(t)\}] = \dot{\overline{\mathcal{T}}}\{\bar{v}(t)\{ = \left\{\frac{\dot{\overline{\mathcal{R}}}(t)}{\dot{\overline{\mathcal{M}}}(t)}\right\}}. \tag{1.203'}$$

1.3. *Echivalența sistemelor vectoriale mecanice*

Influența unei mărimi vectoriale mecanice într-un proces mecanic determinat este desemnată prin termenul generic de *acțiune* a mărimii vectoriale respective iar rezultantul acestei influențe este numit *efect al acțiunii* mărimii vectoriale. Acestor termeni le vor corespunde, în procesul de modelare matematică a operațiilor între mărimile vectoriale prin operații similare efectuate între vectori, termenii de *acțiune a vectorului*, respectiv de *efect al acțiunii vectorului.*

Formularea relației de echivalență între doi vectori aparținînd uneia dintre cele trei mulțimi distincte de vectori, exprimată prin egalitatea lor, presupune implicit existența aceluiași efect al acțiunilor lor; aceasta înseamnă, în realitate, că mărimile vectoriale repre-

Scanned with CamScanner

zentate prin ei au aceeași influență în procesul mecanic, sau că sînt *echivalente fizic*, această echivalență implicînd aceeași natură fizică, precum și elemente caracteristice identice, specifice mulțimii de mărimi vectoriale căreia îi aparțin.

În procesele mecanice intervin, însă, de cele mai multe ori, sisteme de mărimi vectoriale de aceeași natură fizică, al căror *efect total*, obținut prin însumarea efectelor mărimilor vectoriale componente, va fi desemnat prin *efectul total al sistemului de vectori reprezentativi*. Două sisteme de mărimi vectoriale de aceeași natură fizică vor putea avea același efect total, deși componența lor este total diferită; în această situație, ele se numesc *echivalente fizic* și vor putea fi înlocuite unul prin altul în procesul mecanic.

Se înțelege că două sisteme de mărimi vectoriale echivalente fizic vor fi reprezentate prin două *sisteme echivalente de vectori*, care vor putea fi, de asemenea, înlocuite unul prin altul.

În mod curent, problema se pune în sensul înlocuirii unui sistem mai complicat de vectori cu unul din cele mai simple sisteme echivalente posibile, această operație de înlocuire purtînd din acest motiv și numele de *reducerea unui sistem de vectori*.

Aceste înlocuiri ale unui sistem de vectori prin altul sînt justificate axiomatic, pe baza unor postulate (adevăruri nedemonstrabile) numite *principii de echivalență*, stabilite prin studierea comportării mărimilor vectoriale fizice și formulate distinct pentru fiecare din cele trei mulțimi de vectori mecanici.

Avînd în vedere faptul că cel mai simplu sistem de vectori este sistemul format din doi vectori aparținînd aceleiași mulțimi și ținînd seama și de observațiile de mai sus se poate trage concluzia că prezentarea problemei echivalenței sistemelor vectoriale mecanice va trebui să cuprindă pentru fiecare din cele trei mulțimi de vectori, următoarele elemente:

— formularea specifică a principiului de echivalență;

— stabilirea elementelor caracteristice ale sistemelor de doi vectori, în vederea stabilirii criteriilor de recunoaștere a acestor sisteme simple;

— fundamentarea teoretică a procedeelor de reducere a sistemelor oarecari de vectori la sistemele simple.

1.3.1. Echivalența sistemelor de vectori liberi

1°. **Principiul de echivalență în mulțimea vectorilor liberi.** Formularea acestui principiu este următoarea: efectul acțiunii unui sistem de vectori liberi nu se modifică dacă asupra lui se efectuează următoarele operații numite *operații elementare de echivalență*:

— dacă doi, sau mai mulți, vectori, liberi se înlocuiesc cu rezultanta lor determinată după regula paralelogramului, sau dacă se descompune un vector într-un număr determinat de componente;

— dacă sistemului se adaugă, sau i se suprimă, perechi de vectori inverși.

Două sisteme de vectori liberi, $\{\bar{v}\}$ și $\{\bar{v}^*\}$, care se obțin unul din altul prin operații elementare de echivalență, se numesc *echivalente între ele*, această echivalență exprimîndu-se sub forma

$$\{\bar{v}\} \sim \{\bar{v}^*\}. \tag{1.204}$$

Este ușor de verificat că cele două operații elementare de echivalență nu modifică vectorul sumă geometrică al sistemului dat de vectori liberi, rezultînd de aici că această sumă geometrică constituie o caracteristică a sistemului, putînd fi folosită pentru recunoașterea lui în timpul transformărilor pe care le poate suferi prin aplicarea operației elementare de echivalență.

2°. **Sistemele simple de vectori liberi.** În mulțimea vectorilor liberi pot exista următoarele două tipuri de sisteme simple (formate din doi vectori):

Sistemul format din doi vectori liberi inverși, ($\bar{v}_1 = \bar{v}$; $\bar{v}_2 = -\bar{v}_1 = -\bar{v}$). Acest sistem, caracterizat prin condiția

$$\bar{\mathcal{R}} = 0 \tag{1.205}$$

este numit, din motive ușor de înțeles, *sistem echivalent cu zero*.

Sistemul format din doi vectori liberi oarecare, ($\bar{v}_1$; $\bar{v}_2 \neq -\bar{v}_1$). Fiind exclus cazul vectorilor inverși, în această de a doua situație vectorul sumă geometrică al sistemului va fi totdeauna diferit de zero:

$$\bar{\mathcal{R}} \neq 0 \tag{1.206}$$

și va reprezenta vectorul unic cu care pot fi înlocuiți cei doi vectori dați, în baza principiului de echivalență; acest vector unic este numit *rezultanta* celor doi vectori.

Fundamentarea operației de reducere a sistemelor de vectori liberi. Prin aplicarea succesivă a primei operații elementare de echivalență la cîte doi vectori (rezultanta primilor doi vectori se compune cu cel de-al treilea ș.a.m.d.), orice sistem de vectori liberi va putea fi transformat într-un sistem format numai din doi vectori — vectorul $\bar{v}_n$ și rezultanta $\bar{\mathcal{R}}_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{v}_i$ a primilor $(n-1)$ vectori —, astfel încît se

Scanned with CamScanner

va regăsi una din cele două situații menționate la subpunctul precedent.

Vor exista deci următoarele două cazuri de reducere a sistemelor de vectori liberi :

— *Cazul I de reducere* : *sistemul echivalent cu zero*, caracterizat prin condiția

$$\overline{\mathfrak{R}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i = 0. \tag{1.207}$$

Cazul II de reducere : *sistemul echivalent cu un vector unic*, reprezentat prin *rezultanta sistemului de vectori liberi* :

$$\overline{\mathfrak{R}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i \neq 0. \tag{1.208}$$

1.3.2. Echivalența sistemelor de vectori legați

Formularea principiului de echivalență, precum și concluziile privind caracteristicile sistemelor simple de vectori și cazurile de reducere a sistemelor de vectori sînt identice, pentru mulțimea vectorilor legați, cu cele din mulțimea vectorilor liberi, cu singura deosebire că toate operațiile elementare de echivalență vor putea fi efectuate numai în punctul comun de aplicație al tuturor vectorilor sistemului și deci și reducerea sistemului va avea loc numai în acel punct.

1.3.3. Echivalența sistemelor de vectori alunecători

1°. **Formularea principiului de echivalență în mulțimea vectorilor alunecători.** În cazul sistemelor de vectori alunecători principiul de echivalență capătă următoarea formulare : efectul acțiunii unui sistem de vectori alunecători nu se modifică dacă asupra sistemului se efectuează următoarele două operații elementare de echivalență :

— dacă se înlocuiesc doi, sau mai mulți, vectori alunecători, cu suporturile concurente, printr-un vector unic, determinat de suma geometrică a vectorilor concurenți și cu suportul trecînd, de asemenea, prin punctul comun suporturilor vectorilor înlocuiți, sau dacă se descompune un vector dat într-un număr determinat de componente, cu suporturile concurente într-un punct de pe suportul vectorului înlocuit ;

Scanned with CamScanner

— dacă se adaugă, sau se suprimă, perechi de *vectori direct opuși*, adică perechi de vectori cu același suport, de mărimi egale și de sensuri contrare.

Și în acest caz, două sisteme de vectori alunecători, obținute unul din altul prin operații elementare de echivalență, se numesc *echivalente între ele*.

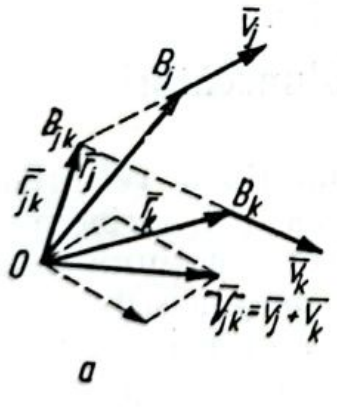
Se va arăta, în continuare, că transformarea unui sistem de vectori alunecători prin aceste două operații elementare de echivalență nu modifică componentele torsorului rezultant într-un pol oarecare al sistemului inițial de vectori și deci nici scalarul acestui torsor.

Faptul că vectorul rezultant al unui sistem de vectori alunecători nu se modifică la transformările efectuate prin aplicarea operațiilor elementare de echivalență este o consecință directă a caracterului de vector liber al acestui vector rezultant; în ceea ce privește conservarea momentului rezultant la aplicarea operațiilor elementare de echivalență, ea va trebui demonstrată.

Considerînd mai întîi prima operație elementară de echivalență, aplicată unui sistem de vectori alunecători cu valoarea inițială

$$\overline{\mathfrak{M}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{v}_i,$$

a momentului său rezultant într-un pol O, se vor înlocui doi din vectorii sistemului, cu suporturile concurente — $\bar{v}_j$ cu punctul de apli-



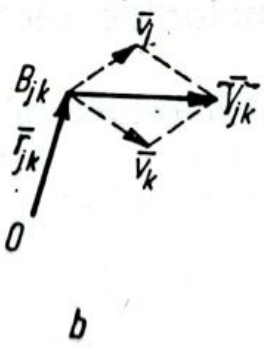


Fig. 1.28.

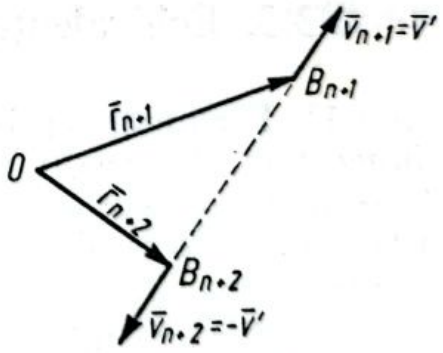


Fig. 1.29.

cație în B_j, și $\bar{v}_k$ cu punctul de aplicație în B_k (fig. 1. 28, *a*) — prin vectorul

$$\overline{\mathcal{V}}_{jk} = \bar{v}_j + \bar{v}_k$$

Scanned with CamScanner

aplicat în punctul B_{jk} situat la intersecția suporturilor vectorilor $\bar{v}_j$ și $\bar{v}_k$ (fig. 1.28, *b*); noul sistem de vectori alunecători va avea momentul rezultant în polul O dat de relația

$$\overline{\mathfrak{M}}^* = \sum_{i=1}^{n-(j,k)} \overline{\mathcal{M}}_i + \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathfrak{P}}_{jk}) = \sum_{i=1}^{n-(i,k)} \overline{\mathcal{M}}_i + \bar{r}_{jk} \times (\bar{v}_j + \bar{v}_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-(j,k)} \overline{\mathcal{M}}_i + \bar{r}_{jk} \times \bar{v}_j + \bar{r}_{jk} \times \bar{v}_k,$$

sau încă, ținînd seama și de proprietatea momentului unui vector de a nu se modifica la mutarea punctului de aplicație pe suport, se mai poate scrie:

$$\overline{\mathfrak{M}}^* = \sum_{i=1}^{n-(j,k)} \overline{\mathcal{M}}_i + \bar{r}_j \times \bar{v}_j + \bar{r}_k \times \bar{v}_k = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}_i = \overline{\mathfrak{M}}$$

simbolul $\left(\sum_{i=1}^{n-(j,k)} \right)$ având acum semnificație de sumă extinsă la toți termenii indicați, cu excepția termenilor cu numerele de ordine j și k.

De asemenea, adăugîndu-i sistemului inițial de vectori alunecători, cu torsorul în polul O de forma:

$$\overline{\mathcal{T}}\{\bar{v}\} = \left\{ \begin{matrix} \overline{\mathfrak{P}} \\ \overline{\mathfrak{M}} \end{matrix} \right\},$$

perechea de vectori direct opuși $\bar{v}_{n+1} = \bar{v}'$, aplicat în punctul $B_{n+1}(\bar{r}_{n+1})$ și $\bar{v}_{n+2} = -\bar{v}'$, aplicat în punctul $B_{n+2}(\bar{r}_{n+2})$ (fig. 1.29), se obține un nou sistem, format din $(n+2)$ vectori alunecători, cu momentul rezultant dat de relația:

$$\overline{\mathfrak{M}}^* = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}_i + \bar{r}_{n+1} \times \bar{v}_{n+1} + \bar{r}_{n+2} \times \bar{v}_{n+2} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}_i + (\bar{r}_{n+1} - \bar{r}_{n+2}) \times \bar{v}' =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}_i + \lambda \bar{v}' \times \bar{v}' = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}_i = \overline{\mathfrak{M}}.$$

Se înțelege acum că dacă operațiile elementare de echivalență nu au modificat componentele torsorului rezultant al sistemului ini-

Scanned with CamScanner

țial de vectori alunecători, ele nu modifică nici scalarul sistemului, adică se poate scrie

$$\overline{\mathscr{R}\mathscr{M}} = \overline{\mathscr{R}\mathscr{M}}^{*}.$$

Precizările precedente scot în evidență faptul că mărimile $\overline{\mathscr{R}}$, $\overline{\mathscr{M}}$ și $\overline{\mathscr{R}\mathscr{M}}$ pot servi ca elemente de recunoaștere a unui sistem de vectori alunecători în timpul transformărilor pe care le sufere prin efectuarea operațiilor elementare de echivalență, din care motiv aceste mărimi vor fi numite *caracteristici ale sistemului de vectori alunecători* considerat.

9 2°. **Sistemele simple de vectori alunecători.** În funcție de pozițiile relative ale suporturilor și de mărimile și de orientările vectorilor, pot fi deosebite următoarele patru tipuri de sisteme simple de doi vectori alunecători:

Sistemul format din doi vectori direct opuși, ($\bar{v}_1 = \bar{v}$; $\bar{v}_2 = -\bar{v}$; $\Delta_1 \equiv \Delta_2$). Cum un asemenea sistem a mai fost examinat la subpunctul precedent (fig. 1.29), este ușor de observat că lui îi corespunde un *torsor rezultant zero*, notat

$$\overline{\mathscr{T}}\{0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{1.209}$$

cu consecința firească

$$\overline{\mathscr{R}\mathscr{M}} = 0 \tag{1.210}$$

din care motiv acest sistem simplu mai este numit și *sistem echivalent cu zero*.

Este ușor de înțeles că în cazul acestui sistem simplu își pierde orice semnificație noțiunea de axă centrală.

Sistemul format din doi vectori cu suporturile paralele, de mărimi egale și de sensuri contrare ($\bar{v}_1 = \bar{v}$: $\bar{v}_2 = -\bar{v}_1 = -\bar{v}$; $\Delta_1 \parallel \Delta_2$). Un asemenea sistem, numit încă și *cuplu de vectori* și notat cu simbolul $\{\bar{v}_1, -\bar{v}\}$ (fg. 1.30), va avea vectorul rezultant zero

$$\overline{\mathscr{R}} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = 0 \tag{1.211}$$

și momentul rezultant determinat, în raportul cu un pol O, prin șirul de relații

$$\overline{\mathscr{M}} = \overline{\mathscr{M}}_1 + \overline{\mathscr{M}}_2 = \bar{r}_1 \times \bar{v}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{v}_2 = \bar{r}_1 \times \bar{v} - \bar{r}_2 \times \bar{v} = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{v}$$

Scanned with CamScanner

rezultînd deci

$$\overline{\mathfrak{M}} = \bar{r}_0 \times \bar{v} = \bar{r}_{0n} \times \bar{v} \tag{1.212}$$

unde prin $\bar{r}_0$ a fost notat vectorul $\overrightarrow{B_2(\bar{r}_2)\ B_1(\bar{r}_1)}$, iar prin $\bar{r}_{0n}$ vectorul $\overrightarrow{B_2(\bar{r}_2)B_n(\bar{r}_{0n})}$, $(\bar{r}_{0n}\bar{v} = 0)$.

Relația (1.212) scoate în evidență următoarele particularități ale acestui moment rezultant:

— *momentul rezultant al unui cuplu de vectori este independent de pol*, $(\overline{\mathfrak{M}} = \bar{r}_0 \times \bar{v} = \overline{\mathfrak{M}}_Q)$;

— *momentul rezultant al unui cuplu de vectori este totdeauna diferit de zero*, $(\bar{r}_0 \neq 0\,;\ \bar{v} \neq 0\,;\ \bar{r}_0 \neq \lambda\bar{v})$;

— *momentul rezultant al unui cuplu de vectori este normal la planul cuplului*, (planul (π_c) determinat de suporturile celor doi vectori).

Aceste trăsături specifice scot în evidență caracterul de *vector liber* al momentului rezultant al cuplului de vectori, din care motiv i s-a dat și o denumire aparte, aceea de *momentul cuplului*, precum și notația specifică $\overline{\mathcal{M}}_{cup}$.

Deși, ca vector liber, i se poate da orice punct de aplicație în domeniul în care se găsesc vectorii cuplului, se obișnuiește să se reprezinte momentul cuplului cu punctul de aplicație la mijlocul vectorului $\bar{r}_0$ (fig. 1.30), o asemenea reprezentare furnizînd și o imagine sugestivă a aplicării regulii burghiului drept la determinarea sensului produsului vectorial $\bar{r}_0 \times \bar{v}$.

Mărimea acestui moment este dată de relația

$$\boxed{|\overline{\mathcal{M}}_{cup}| = |\bar{r}_{0n} \times \bar{v}| = b|\bar{v}|}, \tag{1.213}$$

distanța $b = |\bar{r}_{0n}|$ dintre suporturile celor doi vectori purtînd numele de *brațul cuplului*.

Faptul că un cuplu de vectori este determinat numai prin momentul său, precum și caracterul de vector liber al acestui moment, justifică direct următoarele proprietăți ale cuplurilor de vectori:

Proprietatea I: un cuplu de vectori poate fi mutat paralel cu el însuși, fie în planul său, fie într-un plan paralel cu planul său (fig. 1.31), fără ca efectul acțiunii lui să se modifice.

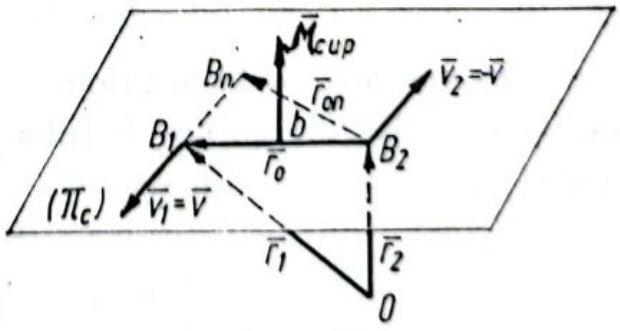


Fig. 1.30.

Scanned with CamScanner

Proprietatea a II-a : un cuplu de vectori poate fi rotit în planul său de un unghi oarecare φ (fig. 1.32), fără ca efectul acțiunii lui să se modifice.

Proprietatea a III-a : un cuplu, format dintr-o anumită pereche de vectori, $\{\bar{v}_1, -\bar{v}\}$, și cu un anumit braț b, poate fi înlocuit printr-un

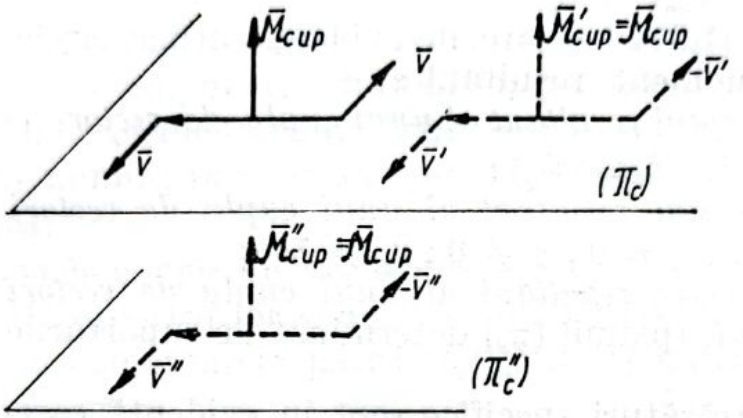


Fig. 1.31.

alt cuplu, format dintr-o altă pereche de vectori $\{\bar{v}', -\bar{v}'\}$ și cu un alt braț b', (fig. 1.33), cu condiția ca momentele lor să fie egale.

Ultima condiție implică :

— situarea celor două cupluri fie în același plan, fie în plane paralele ;

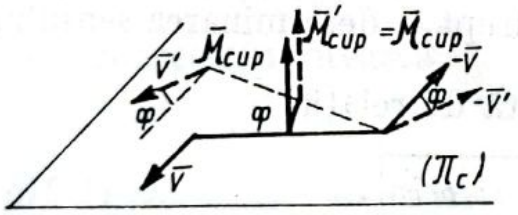


Fig. 1.32.

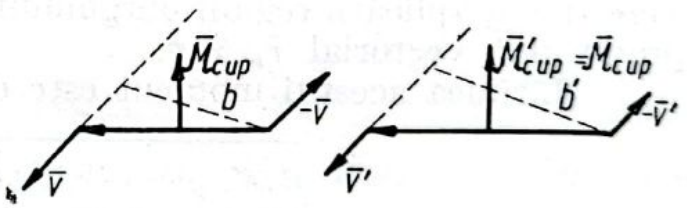


Fig. 1.33.

— orientări corespunzătoare aceluiași sens al momentului pentru cele două perechi de vectori :

— egalitatea modulilor celor două momente, adică

$$b\,|\bar{v}| = b'\,|\bar{v}'|. \tag{1.214}$$

Proprietatea a IV-a : două, sau mai multe, cupluri, de momente $\bar{\mathcal{M}}_{cup_i}$, $(i = 1, 2, .., n)$, pot fi înlocuite printr-un cuplu unic, de moment $\bar{\mathcal{M}}_{cup}$ dat de relația

$$\boxed{\bar{\mathcal{M}}_{cup} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\mathcal{M}}_{cup_i}}. \tag{1.215}$$

Scanned with CamScanner

Recapitulînd concluziile referitoare la caracteristicile acestui de-al doilea sistem simplu de vectori alunecători, se constată că torsorul unui cuplu de vectori se prezintă sub forma

$$\overline{\mathcal{F}}\{\bar{v}, -\bar{v}\} = \begin{Bmatrix} \overline{\mathcal{R}} = 0 \\ \overline{\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{M}}_{cup} \end{Bmatrix}, \tag{1.216}$$

cu consecința evidentă

$$\overline{\mathcal{R}}\,\overline{\mathcal{M}} = 0. \tag{1.217}$$

În ceea ce privește noțiunea de axă centrală, este ușor de înțeles că și în cazul acestui sistem simplu ea își pierde semnificația.

Sistemul format din doi vectori cu suporturile concurente. Chiar din enunțarea principiului de echivalență rezultă că sistemul vectorilor $\bar{v}_1$, și $\bar{v}_2$, cu suporturile concurente în punctul $B(\bar{r})$ (fig. 1.34) este echivalent cu vectorul unic

$$\overline{\mathcal{R}} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \neq 0 \tag{1.218}$$

cu suportul trecînd, de asemenea, prin punctul B.

În ceea ce privește momentul rezultant într-un pol O al acestui sistem de vectori, compararea relațiilor

$$\overline{\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{M}}_1 + \overline{\mathcal{M}}_2 = \bar{r}_1 \times \bar{v}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{v}_2 = \bar{r} \times (\bar{v}_1 + \bar{v}_2)$$

și

$$\overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}) = \bar{r} \times \overline{\mathcal{R}} = \bar{r} \times (\bar{v}_1 + \bar{v}_2)$$

permite să se tragă concluzia

$$\boxed{\overline{\mathcal{M}} = \bar{r} \times \overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}})} \tag{1.219}$$

exprimînd *teorema lui Varignon*, cu următoarea formulare :

Momentul rezultant, într-un pol oarecare, al unui sistem de doi vectori alunecători cu suporturile concurente este egal cu momentul, în același pol, al vectorului unic cu care poate fi înlocuit sistemul celor doi vectori în baza principiului de echivalență.

Se înțelege că teorema se extinde și la cazul unui număr oarecare de vectori alunecători cu suporturile concurente.

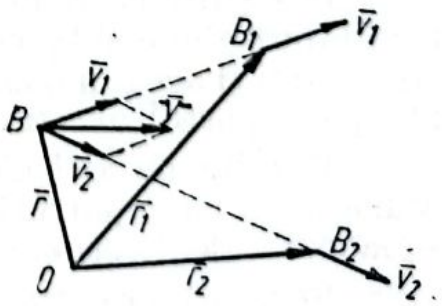


Fig. 1.34.

Scanned with CamScanner

Revenind la relația (1.219), se observă că momentul rezultant al unui sistem de doi vectori alunecători cu suporturile concurente va lua valoarea zero oridecîteori suportul vectorului unic $\overline{\mathcal{R}}$, echivalent sistemului, va trece prin polul O, ($\bar{r} = \bar{v}\lambda$ sau $\bar{r} = 0$).

În ceea ce privește scalarul torsorului, el va avea totdeauna valoarea zero :

$$\overline{\mathcal{R}}\,\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathcal{R}}.\overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}) = \overline{\mathcal{R}}(\bar{r} \times \overline{\mathcal{R}}) = .0$$

Precizările de mai sus permit să se tragă concluzia că torsorul unui asemenea sistem simplu de vectori are forma

$$\overline{\mathcal{F}}(\overline{\mathcal{R}}) = \begin{cases} \overline{\mathcal{R}} \neq 0 \\ \overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}) = \bar{r} \times \overline{\mathcal{R}} \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases} \end{cases} \qquad (1.220)$$

cu

$$\overline{\mathcal{R}}\,\overline{\mathfrak{M}} = 0 \qquad (1.221)$$

egalitatea cu zero a momentului indicînd trecerea suportului vectorului unic echivalent sistemului prin polul ales.

Întrucît în cazul acestui sistem simplu momentul minim al sistemului are valoarea zero :

$$\overline{\mathfrak{M}}_{min} = \frac{\overline{\mathcal{R}}\,\overline{\mathfrak{M}}}{\overline{\mathcal{R}}_2}\,\overline{\mathcal{R}} = 0$$

rezultă că axa centrală a sistemului va fi locul geometric al punctelor de moment rezultant zero.

Pe de altă parte însă, conform teoremei lui Varignon, momentul rezultant trebuie să fie egal și cu momentul vectorului unic echivalent sistemului și acest moment va fi egal cu zero numai în punctele situate pe suportul acestui vector unic.

Rezultă de aici că axa centrală a sistemului celor doi vectori alunecători cu suporturile concurente coincide cu suportul vectorului unic echivalent sistemului.

Sistemul format din doi vectori alunecători cu suporturile oarecare în spațiu. Considerînd mai întîi un pol Q, ales arbitrar pe

Scanned with CamScanner

suportul vectorului $\bar{v}_1$ (fig. 1.35) vor rezulta următoarele valori pentru cele trei caracteristici ale sistemului considerat :

— Vectorul rezultant diferit de zero :

$$\bar{\mathcal{R}} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \neq 0 \tag{1.222}$$

fiind excluse cazurile, examinate mai înainte, ale vectorilor de mărimi egale și de sensuri contrare :

— momentul rezultant diferit de zero :

$$\bar{\mathfrak{M}}_Q = \bar{\mathcal{M}}_1 + \bar{\mathcal{M}}_2 = \underbrace{\bar{r}_1 \times \bar{v}_1}_{0} + \bar{r}_2 \times \bar{v}_2 = \bar{r}_2 \times \bar{v}_2 = \bar{\mathcal{M}}_2 \neq 0 \tag{1.223}$$

vectorii $\bar{r}_2$ și $\bar{v}_2$ fiind diferiți de zero și necoliniari (coliniaritatea lor ar implica intersectarea suporturilor vectorilor $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$);

— scalarul torsorului diferit de zero :

$$\bar{\mathcal{R}}\,\bar{\mathfrak{M}} = (\bar{v}_1 + \bar{v}_2)(\bar{r}_2 \times \bar{v}_2) = \bar{v}_1(r_2 \times \bar{v}_2) + \bar{v}_2(\bar{r}_2 \times \bar{v}_2) = \bar{v}_1(\bar{r}_2 \times \bar{v}_2) \neq 0 \tag{1.224}$$

vectorii $\bar{v}_1$ $\bar{v}_2$ și $\bar{r}_2$ fiind, prin ipoteză, necoplanari.

Trecînd de la centrul de reducere inițial Q la un alt centru arbitrar O, în raport cu care punctul Q este determiat prin vectorul de poziție $\bar{r}_Q$ (fig. 1.35), noile caracteristici ale sistemului celor doi vectori vor continua să rămînă diferite de zero ;

— vectorul rezultant ca invariant la schimbarea polului ;

— momentul rezultant în baza relației

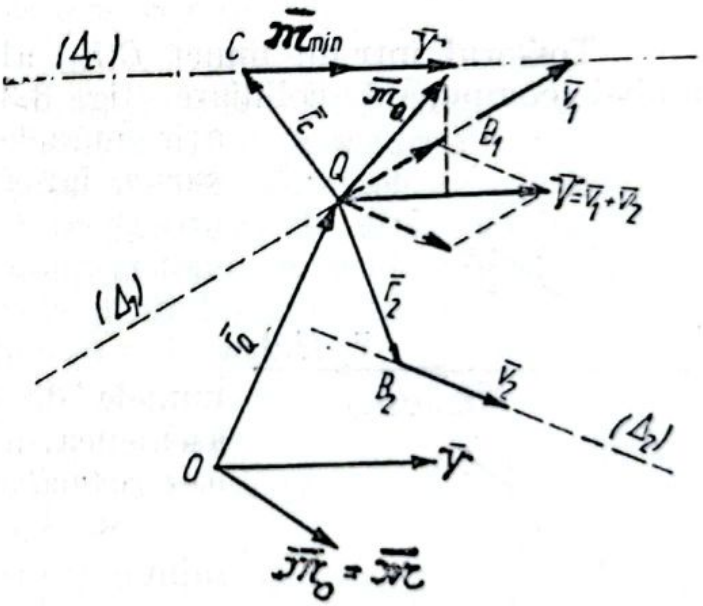


Fig. 1.35.

$$\bar{\mathfrak{M}} = \bar{\mathfrak{M}}_Q + \bar{r}_Q \times \bar{\mathcal{R}} \neq 0$$

justificată prin faptul că egalitatea cu zero ar implica coliniaritatea vectorilor $\bar{\mathfrak{M}}_Q$ și $\bar{r}_Q \times \bar{\mathcal{R}}$ și deci ortogonalitatea vectorilor $\bar{\mathfrak{M}}_Q$ și $\bar{\mathcal{R}}$, ceea ar contrazice concluzia (1.224) ;

Scanned with CamScanner

— scalarul torsorului în baza proprietății sale de invariant la schimbarea polului.

Rezultă, din constatările precedente, că torsorul acestui ultim tip de sistem simplu de vectori alunecători, purtînd încă și numele de *torsor propriu zis*, se prezintă sub forma

$$\bar{\mathcal{S}}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathcal{R}} \neq 0 \\ \bar{\mathcal{M}} \neq 0 \end{Bmatrix} \tag{1.225}$$

cu scalarul torsorului satisfăcînd condiția

$$\bar{\mathcal{R}}\,\bar{\mathcal{M}} \neq 0. \tag{1.226}$$

În ceea ce privește axa centrală a sistemului, ea își va păstra semnificația obișnuită de loc geometric al punctelor de moment rezultant minim, dat de relația

$$\bar{\mathcal{M}}_{min} = \frac{\mathcal{J}_2}{|\bar{\mathcal{J}}_1|}\bar{i}_r = \frac{\bar{\mathcal{R}}\,\bar{\mathcal{M}}}{\bar{\mathcal{R}}}\bar{i}_r = \frac{\bar{\mathcal{R}}\,\bar{\mathcal{M}}}{\bar{\mathcal{R}}^2}\bar{\mathcal{R}}. \tag{1.227}$$

Torsorul într-un punct $C(\bar{r}_C)$ al axei centrale va avea deci ambele componente coliniare, (fig. 3.35), el purtînd în această situație numele de *răsucitor*, *dinamă* sau *șurub*, iar factorul de coliniaritate

$$p_R = \frac{\bar{\mathcal{R}}\,\bar{\mathcal{M}}}{\bar{\mathcal{R}}^2} \tag{1.228}$$

numele de *parametrul răsucitorului*; de asemenea, axa centrală mai este numită *axa răsucitorului*.

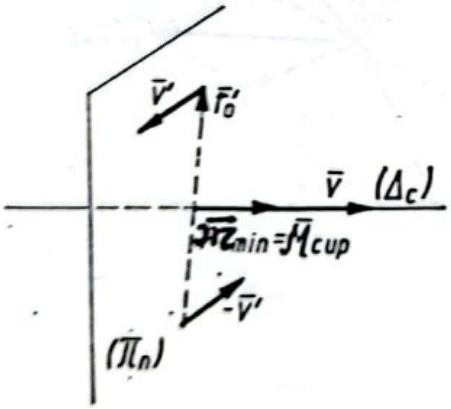


Fig. 1.36.

Se va mai remarca că momentul minim are toate proprietățile momentului unui cuplu; din acest motiv, torsorul propriu zis mai este prezentat uneori ca un ansamblu format din vectorul rezultant situat pe axa centrală și dintr-un cuplu de vectori, $\{\bar{v}_1' - \bar{v}'\}$, situați într-un plan (π_n) normal la axa centrală, momentul cuplului fiind egal cu momentul minim, (fig. 1.36).

Scanned with CamScanner

În încheierea prezentării celor patru tipuri de sisteme simple de vectori alunecători se vor mai face următoarele două observații :

Observația I. Cele patru tipuri de sisteme simple de vectori alunecători, examinate mai sus, epuizează toate cazurile posibile de sisteme de doi vectori alunecători.

Într-adevăr, atît sistemele formate din doi vectori situați pe același suport, dar de mărimi și sensuri oarecari, (fig. 1.37, *a* și *b*), cît și sistemele formate din cîte doi vectori cu suporturile paralele și de mărimi și sensuri oarecari, (fig. 1. 37, *c* și *d*), care nu au fost menționate printre sistemele simple de vectori alunecători, se încadrează în cazul vectorilor cu suporturile concurente, primele două sisteme corespunzînd condiției

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = k\pi \text{ (rad)}, \quad (k = 0,1)$$

iar următoarele două, ca urmare a posibilității de transformare a lor, prin aplicarea unei perechi de vectori direct opuși, $(\bar{v})$ și $(-\bar{v})$, pe linia punctelor de aplicație ale vectorilor $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$, în sistemele echivalente formate din vectorii concurenți $\bar{v}_1'$ și $\bar{v}_2'$.

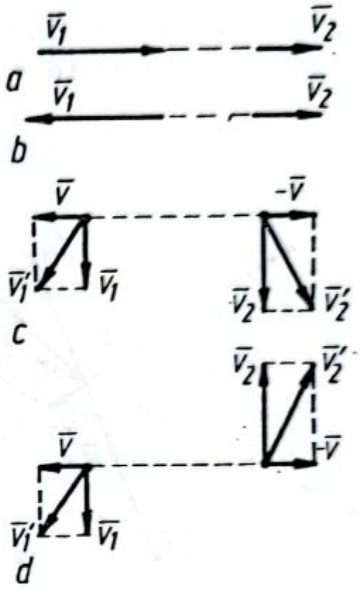


Fig. 1.37.

Observația a II-a. Cele patru tipuri simple de vectori alunecători pot fi deosebite prin valorile particulare — valorile zero — ale unora dintre caracteristicile lor și anume :

— toate cele trei caracteristici egale cu zero în cazul sistemului echivalent cu zero ;

— vector rezultant zero și scalarul torsorului zero, în cazul sistemului echivalent cu un cuplu ;

— scalarul torsorului egal cu zero, în cazul sistemului echivalent cu un vector unic ;

— toate caracteristicile diferite de zero, în cazul torsorului propriu zis.

3°. **Fundamentarea teoretică a operației de reducere a sistemelor de vectori alunecători.** Procedeul concret de înlocuire a unui sistem oarecare de vectori alunecători prin unul din sistemele simple examinate la subpunctul precedent este justificat de următoarea

Teoremă de echivalență : două sisteme de vectori alunecători, $\{\bar{v}\}$ și $\{\bar{v}'\}$, sînt echivalente între ele, putînd fi înlocuite unul prin altul, atunci cînd au același torsor într-un pol arbitrar.

Se poate deci scrie enunțul teoremei sub forma :

$$\text{dacă } \bar{\mathcal{T}}\{\bar{v}\} = \bar{\mathcal{T}}\{\bar{v}'\} \Rightarrow \{\bar{v}\} \sim \{\bar{v}'\}. \tag{1.229}$$

Întrucît se pune problema, totdeauna, de a se înlocui un sistem oarecare de vectori alunecători cu unul din cele patru sisteme simple formate din cîte doi vectori, pentru demonstrarea teoremei va fi suficient să se arate că numai prin operații elementare de echivalență un sistem oricît de complicat de vectori alunecători poate fi transformat într-un sistem de doi vectori ; deoarece prin efectuarea operațiilor elementare de echivalență caracteristicile sistemului nu se modi-

Scanned with CamScanner

fică, se înțelege că atît sistemul inițial, cît și sistemul final de doi vectori obținut prin transformarea primului, vor avea același torsor, justificîndu-se astfel enunțul problemei.

Considerîndu-se, în domeniul în care sînt distribuiți vectorii sistemului inițial $\{\bar{v}\}$, trei puncte necoliniare arbitrare, O_λ^*,$(\lambda = 1,2,3)$, transformarea acestui sistem inițial într-un sistem de doi vectori se va face în următoarele etape :

— descompunerea fiecărui vector $\bar{v}_i$, $(i=1,2,\ldots,n)$ al sistemului în trei componente $\bar{v}_{i\lambda}$, $(\lambda = 1,2,3)$. după direcțiile $(\Delta_{i\lambda})$, $(\lambda = 1,2,3)$

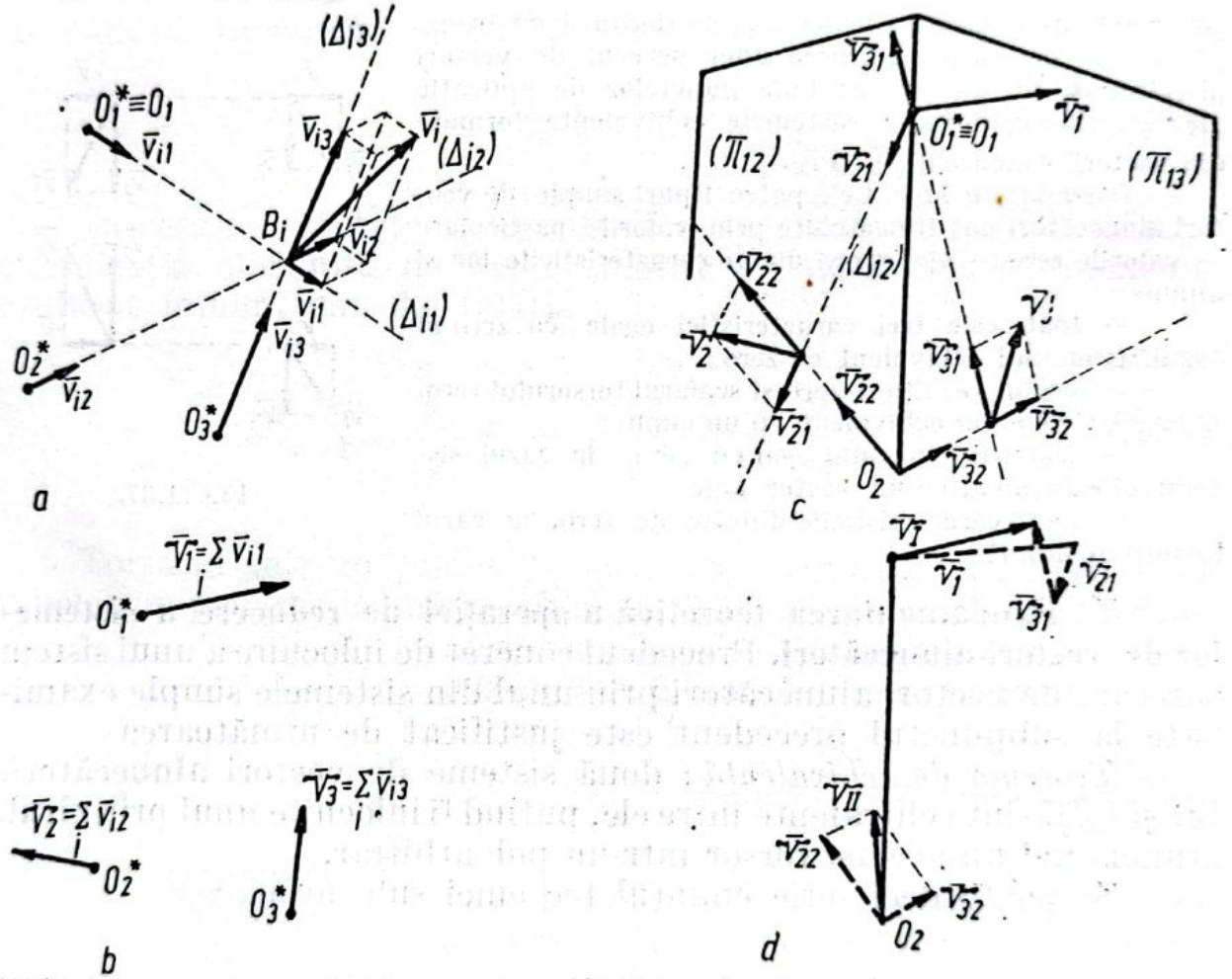


Fig. 1.38.

determinate prin unirea punctului de aplicație B_i cu cele trei puncte arbitrare O_λ^* (fig. 1.38 *a*) conform relațiilor

$$\bar{v}_i = \bar{v}_{i1} + \bar{v}_{i2} + \bar{v}_{i3}, \quad (i = 1,\ 2,..n)$$

și mutarea punctelor de aplicație ale acestor componente în punctele O_λ^*, $(\lambda = 1,\ 2,\ 3)$;

Scanned with CamScanner

— înlocuirea fiecărui sistem de vectori concurenți din punctele O_λ^* cu cîte o rezultantă unică, determinată prin relațiile

$$\overline{\mathcal{R}}_\lambda = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_{i\lambda}, \quad (\lambda = 1, 2, 3),$$

obținîndu-se astfel, în locul sistemului inițial de n vectori, un sistem echivalent, format numai din cei trei vectori rezultanți $\overline{\mathcal{R}}_\lambda$, aplicați în punctele O_λ^* (fig. 1. 38, *b*);

— descompunerea vectorilor rezultanți $\overline{\mathcal{R}}_2$ și $\overline{\mathcal{R}}_3$ în cîte două componente, una orientată după direcția obținută prin unirea punctului O_2^* — respectiv O_3^* — cu punctul $O_1^* \equiv O_1$ și a doua orientată după direcția obținută prin unirea punctului O_2^* — respectiv O_3^* — cu punctul O_2 luat arbitrar pe dreapta (Δ_{12}) de intersecție a planului (π_{12}) determinat de punctul $O_1^* \equiv O_1$ și suportul vectorului $\overline{\mathcal{R}}_2$, cu planul (π_{13}) determinat de punctul $O_1^* \equiv O_1$ și de suportul vectorului $\overline{\mathcal{R}}_3$, acestor componente :

$$\overline{\mathcal{R}}_\lambda = \overline{\mathcal{R}}_{\lambda 1} + \overline{\mathcal{R}}_{\lambda 2}, \quad (\lambda = 2, 3)$$

mutîndu-li-se apoi punctele de aplicație în punctul O_1, respectiv O_2 (fig. 1.38, *c*);

— înlocuirea celor două sisteme de vectori concurenți din punctele O_1 și O_2 — trei vectori în punctul O_1 și doi vectori în punctul O_2 — cu vectorii unici

$$\overline{\mathcal{R}}_{\mathrm{I}} = \overline{\mathcal{R}}_1 + \overline{\mathcal{R}}_{21} + \overline{\mathcal{R}}_{31} \quad \text{și :} \quad \overline{\mathcal{R}}_{\mathrm{II}} = \overline{\mathcal{R}}_{22} + \overline{\mathcal{R}}_{32},$$

obținîndu-se astfel transformarea

$$\{\bar{v}\} \sim \{\overline{\mathcal{R}}_{\mathrm{I}}, \overline{\mathcal{R}}_{\mathrm{II}}\}, \tag{1.230}$$

cu condiția evidentă

$$\bar{\mathcal{S}}\{\bar{v}\} = \bar{\mathcal{S}}\{\overline{\mathcal{R}}_{\mathrm{I}}, \overline{\mathcal{R}}_{\mathrm{II}}\}. \tag{1.231}$$

Se înțelege că în funcție de pozițiile relative ale suporturilor vectorilor $\overline{\mathcal{R}}_{\mathrm{I}}$ și $\overline{\mathcal{R}}_{\mathrm{II}}$, precum și de mărimile și de sensurile lor, se va regăsi unul din cele patru cazuri de sisteme simple de cîte doi vectori alunecători, examinate la subpunctul precedent.

Scanned with CamScanner

11 Teorema de echivalență demonstrată mai sus permite să se precizeze acum și etapele procedeului de reducere a unui sistem de vectori alunecători, aceastea fiind :

— *calculul vectorului rezultant* al sistemului dat de vectori alunecători, cu ajutorul relației

$$\bar{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{v}_{ix}\right)\bar{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} v_{iy}\right)\bar{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} v_{iz}\right)\bar{k}\,; \qquad (1.232)$$

— *calculul momentului rezultant* într-un pol O al sistemului de vectori, folosind relația

$$\overline{\mathfrak{M}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}_{ix}\right)\bar{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{M}_{iy}\right)\bar{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{M}_{iz}\right)\bar{k}\,; \qquad (1.233)$$

— *calculul scalarului torsorului*, în baza relației

$$S = \bar{\mathcal{R}}\,\overline{\mathfrak{M}} = \mathcal{R}_x\mathfrak{M}_x + \mathcal{R}_y\mathfrak{M}_y + \mathcal{R}_z\mathfrak{M}_z\,; \qquad (1.234)$$

— *precizarea sistemului simplu echivalent* sistemului dat de vectori, în funcție de valorile găsite pentru cele trei caracteristici, putînd fi întîlnite următoarele patru cazuri de reducere :

Cazul I de reducere : *sistem echivalent cu un torsor propriu zis*, adică

$$\boxed{\{\bar{v}\} \sim \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}} \qquad (1.235)$$

cu

$$\boxed{\bar{\mathcal{S}}\{\bar{v}\} = \bar{\mathcal{S}}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}} \qquad (1.236)$$

în condițiile

$$\boxed{\bar{\mathcal{R}}\,\overline{\mathfrak{M}} \neq 0\,;\ \bar{\mathcal{R}} \neq 0\,;\ \overline{\mathfrak{M}} \neq 0}\,. \qquad (1.237)$$

Scanned with CamScanner

Sistemul mai este echivalent și cu un răsucitor, de componente :

$$\boxed{\overline{\mathcal{F}}_C\{\bar{v}\} = \left\{\begin{matrix}\overline{\mathcal{R}} \\ \overline{\mathcal{M}}_{min} = \dfrac{\overline{\mathcal{R}}\,\overline{\mathcal{M}}}{\mathcal{R}_2}\overline{\mathcal{R}} = p_R\overline{\mathcal{R}}\end{matrix}\right\}} \tag{1.238}$$

cu axa răsucitorului — axa centrală a sistemului de vectori — terminată prin ecuația

$$\boxed{\bar{r} = \frac{\overline{\mathcal{R}} \times \overline{\mathcal{M}}}{\overline{\mathcal{R}}_2} + \lambda\overline{\mathcal{R}}.} \tag{1.239}$$

Cazut II de reducere : *sistemul echivalent cu un vector unic*, adică

$$\boxed{\{\bar{v}\} \sim (\overline{\mathcal{R}})} \tag{1.240}$$

$$\boxed{\overline{\mathcal{F}}\{\bar{v}\} = \overline{\mathcal{F}}(\overline{\mathcal{R}})} \tag{1.241}$$

în condițiile

$$\boxed{\overline{\mathcal{R}}\,\overline{\mathcal{M}} = 0\,;\quad \overline{\mathcal{R}} \neq 0\,;\quad \overline{\mathcal{M}} \begin{matrix}= 0 \\ \neq 0\end{matrix}} \tag{1.242}$$

Faptul că prin operațiile elementare de echivalență sistemul inițial de vectori poate fi transformat într-un sistem de doi vectori cu suporturile concurente, pentru care s-a demonstrat teorema lui Varignon, arată că această teoremă își menține valabilitatea și pentru orice sistem de vectori reductibil la asemenea doi vectori și în ultimă instanță la un vector unic.

Se poate deci enunța

Teorema generalizată a lui Varignon: *momentul rezultant, într-un pol oarecare, al unui sistem de vectori alunecători reductibili la un vector unic este egal cu momentul, în același pol, al vectorului unic, cu care este echivalent sistemul dat.*

Scanned with CamScanner

Această teoremă va fi exprimată deci prin relația:

$$\boxed{\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{V}}) = \bar{r} \times \overline{\mathcal{V}}} \tag{1.243}$$

$\bar{r}$ fiind vectorul de poziție în raport cu polul considerat al unui punct arbitrar al suportului vectorului unic echivalent.

Observînd că în baza celei de-a treia dintre condițiile (1.242) momentul minim are, în acest caz, valoarea zero:

$$\overline{\mathfrak{M}}_{min} = \frac{\overline{\mathcal{V}}\,\overline{\mathfrak{M}}}{\mathcal{V}_2}\,\overline{\mathcal{V}} = 0 \tag{1.244}$$

și ținînd seama și de teorema precedentă, se poate trage concluzia că axa centrală a sistemului va reprezenta, în această situație, chiar suportul vectorului unic echivalent, a cărui ecuație va avea deci forma

$$\boxed{\bar{r} = \frac{\overline{\mathcal{V}} \times \overline{\mathfrak{M}}}{\mathcal{V}_2} + \lambda \overline{\mathcal{V}}}\,. \tag{1.245}$$

Se înțelege că egalitatea cu zero a momentului rezultant într-un anume pol va indica, în această situație, trecerea suportului unic echivalent prin polul respectiv:

Cazul III de reducere: *sistem echivalent cu un cuplu de vectori*, adică

$$\boxed{\{\bar{v}\} \sim \{\bar{v}, -\bar{v}\}} \tag{1.246}$$

cu

$$\boxed{\overline{\mathcal{S}}\{\bar{v}\} = \overline{\mathcal{S}}\{\bar{v}, -\bar{v}\}} \tag{1.247}$$

în condițiile

$$\boxed{\overline{\mathcal{V}}\,\overline{\mathfrak{M}} = 0\ ;\ \overline{\mathcal{V}} = 0\ ;\ \overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathcal{M}}_{cup} \neq 0}\,. \tag{1.247'}$$

Scanned with CamScanner

Cazul IV de reducere: *sistem echivalent cu zero*, adică

$$\boxed{\{\bar{v}\} = (0)} \tag{1.248}$$

cu

$$\boxed{\bar{\mathcal{S}}\{\bar{v}\} = \bar{\mathcal{T}}(0)} \tag{1.249}$$

în condițiile

$$\boxed{\bar{\mathcal{R}}\,\bar{\mathfrak{M}} = 0\,;\ \bar{\mathcal{R}} = 0\ ;\ \bar{\mathfrak{M}} = 0} \tag{1.250}$$

În legătură cu acest ultim caz se va demonstra următoarea *Teoremă*: dacă un sistem de vectori alunecători este echivalent cu zero într-un pol, el rămîne echivalent cu zero în orice alt pol.

Demonstrația rezultă imediat observîndu-se că dacă

$$\bar{\mathcal{S}}_Q\{\bar{v}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathcal{R}} = 0 \\ \bar{\mathfrak{M}}_Q = 0 \end{Bmatrix} = \bar{\mathcal{T}}(0)$$

este torsorul sistemului în polul Q, cu ambele componente egale cu zero, atunci torsorul sistemului într-un alt pol 0 va avea forma

$$\bar{\mathcal{S}}_O\{\bar{v}\} = \bar{\mathcal{S}}_Q\{\bar{v}\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{r}_Q \times \bar{\mathcal{R}} \end{Bmatrix} = \bar{\mathcal{T}}_Q(0) + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \bar{\mathcal{T}}(0).$$

1.3.4. Reducerea unor sisteme particulare de vectori alunecători

În continuare, se va aplica teoria generală expusă mai sus la reducerea următoarelor două sisteme particulare de vectori alunecători, întîlnite curent în aplicațiile mecanicii:

1°. **Reducerea sitemelor de vectori alunecători situați în același plan.** Considerînd planul vectorilor ca plan de coordonate Oxy (fig.39), torsorul în polul O al vectorului $\bar{v}_i, (i = 1, 2, \ldots, n)$ al sistemului $\{\bar{v}\}$ de vectori va avea componentele

$$\bar{\mathcal{T}}(\bar{v}_i) = \begin{Bmatrix} \bar{v}_i = \bar{v}_{ix}\bar{i} + \bar{v}_{iy}\bar{j} \\ \bar{\mathcal{M}}_i = (\pm b_i |\bar{v}_i|)\bar{k} \end{Bmatrix} \tag{1.251}$$

Scanned with CamScanner

și deci vor rezulta următoarele expresii ale caracteristicilor sistemului în polul O:

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} v_{ix} \right) \bar{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} v_{iy} \right) \bar{j} = \mathcal{R}_x \bar{i} + \mathcal{R}_y \bar{j} \\ \bar{\mathfrak{M}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\mathcal{M}}_i = \sum_{i=1}^{n} (\pm b_i | \bar{v}_i |) \bar{k} = \mathfrak{M} \bar{k} \\ \bar{\mathcal{R}} \, \bar{\mathfrak{M}} = (\mathcal{R}_x \bar{i} + \mathcal{R}_y \bar{j}_x) \cdot \mathfrak{M} \bar{k} = 0 \end{cases} \tag{1.252}$$

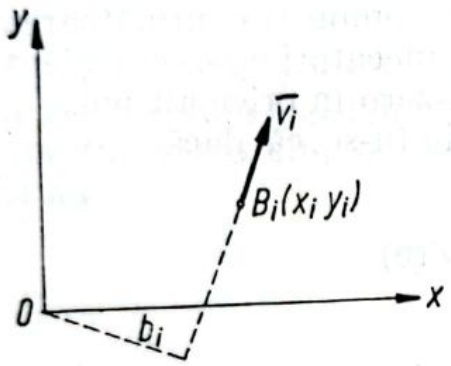


Fig. 1.39.

ultima relație scoțînd în evidență absența, în cazul acestui sistem particular de vectori alunecători, a cazului sistemelor reductibile la torsori propriu zișI.

Avînd în vedere faptul că fiecare din sumele algebrice $\left(\sum_{i=1}^{n} v_{ix} \right), \left(\sum_{i=1}^{n} v_{iy} \right)$ și $\left(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i \right)$ pot fi diferite de zero, sau egale cu zero, se poate trage concluzia că în cazul sistemelor de vectori alunecători situați în același plan vor putea fi întîlnite numai următoarele trei cazuri de reducere:

Cazul I : sistem echivalent cu un vector unic

$$\boxed{\bar{\mathcal{S}}\{\bar{v}\} = \bar{\mathcal{T}}(\bar{\mathcal{R}})} \tag{1.253}$$

în condițiile

$$\boxed{\bar{\mathcal{R}} \neq 0 \, ; \, \bar{\mathfrak{M}} \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}} \tag{1.254}$$

egalitatea cu zero a momentului indicînd situarea polului pe suportul vectorului unic, echivalent sistemului dat de vectori alunecători; în cazul cînd momentul rezultant este diferit de zero, ecuația supor-

Scanned with CamScanner

tului — ultimul coincizînd cu axa centrală a sistemului de vectori, — va avea forma

$$\boxed{y = \frac{\mathcal{R}_y}{\mathcal{R}_x} x - \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{R}_x}} \tag{1.255}$$

dedusă din expresia analitică a relației exprimînd teorema lui Varignon, ($\overline{\mathcal{M}} = \bar{r} \times \bar{\mathcal{R}}$).

Cazul II : *sistem echivalent cu un cuplu de vectori*

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}\{\bar{v}\} = \overline{\mathcal{T}}\{\bar{v}_1, -\bar{v}\}} \tag{1.256}$$

în condițiile

$$\boxed{\bar{\mathcal{R}} = 0\,;\ \overline{\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{M}}_{cup} \neq 0.} \tag{1.257}$$

Cazul III : *sistem echivalent cu zero* (*vectorul zero*)

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}\{\bar{v}\} = \overline{\mathcal{T}}(0) = 0} \tag{1.258}$$

în condițiile

$$\boxed{\bar{\mathcal{R}} = 0\,;\ \overline{\mathcal{M}} = 0.} \tag{1.259}$$

13

2.° **Reducerea sistemelor de vectori alunecători paraleli.** Orientînd axa *Oz* după direcția comună a vectorilor $\bar{v}_i$, $(i = 1, 2, ..., n)$, ai sistemului $\{\bar{v}\}$ de vectori alunecători paraleli, (fig. 1.40), torsorul în polul *O* al unui asemenea vector va avea componentele

$$\overline{\mathcal{T}}\{\bar{v}_i\} = \left\{\begin{matrix} \bar{v}_i = v_i \bar{k} \\ \overline{\mathcal{M}}_i = \bar{r}_i \times \bar{v}_i = \bar{r}_i v_i \times \bar{k} \end{matrix}\right\} \tag{1.260}$$

v_i fiind valorile scalare, raportate la versorul $\bar{k}$, ale vectorilor $\bar{v}_i$.

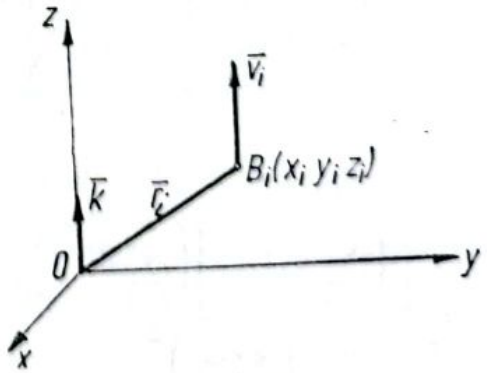


Fig. 1.40.

Scanned with CamScanner

În consecință, vor rezulta următoarele expresii pentru caracteristicile sistemului de vectori considerat:

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \right) \bar{k} = \mathcal{R}\bar{k} \\ \overline{\mathfrak{M}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i v_i \times \bar{k} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i v_i \right) \times \bar{k} \\ \overline{\mathcal{R}}\,\overline{\mathfrak{M}} = \mathcal{R}\bar{k} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i v_i \right) \times \bar{k} \right] = 0 \end{cases} \qquad (1.261)$$

ultima relație evidențiind absența, și la aceste sisteme particulare de vectori, a cazului de reducere corespunzătoare torsorului propriu-zis.

Deoarece fiecare din sumele $\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \right)$ și $\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i v_i \right)$ pot fi diferite de zero, sau egale cu zero, la reducerea sistemelor de vectori paraleli vor putea fi întîlnite numai aceleași trei cazuri de reducere menționate și la sistemele de vectori coplanari, singura deosebire față de această situație constînd doar în forma specifică a ecuației suportului vectorului unic echivalent sistemului reductibil la un asemenea vector; acestă ecuație va putea fi obținută efectuîndu-se în ecuația vectorială (1.245) înlocuirile (1.261), adică scriind

$$\bar{r} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \right) \bar{k} \times \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i v_i \right) \times \bar{k} \right]}{\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \right)^2} + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \right) \bar{k} =$$

$$= \frac{\left[\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \right) \bar{k}^2 \right] \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i v_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \right)^2} + \left\{ \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \right) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \right) \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i v_i \right) \bar{k} \right]}{\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \right)^2} \right\} \bar{k}$$

Scanned with CamScanner

rezultînd de aici, după simplificări și după introducerea notației

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) - \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i z_i}{\sum_{i} v_i} = \mu$$

cu μ nedeterminat, următoarea ecuație vectorială a suportului :

$$\boxed{\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i} + \mu\bar{k}.} \tag{1.262}$$

Primul termen din membrul drept al ultimei relații, adică

$$\boxed{\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i}} \tag{1.263}$$

determină un punct $C(\bar{r}_C)$ de pe suportul vectorului unic echivalent, purtînd numele de *centrul sistemului de vectori alunecători paraleli*, care se bucură de următoarele două proprietăți :

Proprietatea I : pentru poziții determinate ale punctelor de aplicație ale vectorilor paraleli alunecători, poziția, în domeniul în care sînt distribuiți vectorii sistemului, a centrului acestor vectori paraleli este independentă de orientarea comună a vectorilor.

Proprietatea se justifică prin faptul că versorul $\bar{k}$, care determina orientarea comună a vectorilor paraleli, nu mai apare în expresia vectorului de poziție $\bar{r}_C$.

Proprietatea a II-a : pentru poziții determinate ale punctelor de aplicație ale vectorilor alunecători paraleli, poziția centrului acestor vectori paraleli, în domeniul în care sînt ei repartizați, este independentă de alegerea polului de referință.

Considerînd, pe lîngă polul inițial, O, un al doilea pol $Q(\bar{r}_Q)$, $(\bar{r}_Q = \overrightarrow{OQ})$, în raport cu care punctele de aplicație B_i ale vectorilor

Scanned with CamScanner

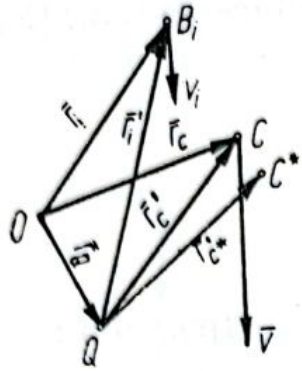


Fig. 1.41.

paraleli sînt determinate prin vectorii de poziție $\bar{r}'_i = \overrightarrow{QB_i}$ (fig. 1.41), se va admite că prin aplicarea formulei (1.263), cu modificările corespunzătoare polului $Q_i(\bar{r}_i \to \bar{r}'_i,\ \bar{r}_C \to \bar{r}'_C)$, se va obține un alt punct, $C^* \not\equiv C$, ca centru al sistemului de vectori paraleli, determinat prin vectorul de poziție

$$\bar{r}'_{C^*} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}'_i v_i}{\sum_{i=i}^{n} v_i}.$$

Efectuînd în această relație înlocuirile

$$\bar{r}'_i = \bar{r}_i - \bar{r}_Q\ ,\quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

evidente din fig. 1.41, rezultă relațiile

$$\bar{r}'_{C^*} = \frac{\sum_i \bar{r}_i v_i}{\sum_i v_i} - \frac{\sum_i \bar{r}_Q v_i}{\sum_i v_i} = \frac{\sum_i \bar{r}_i v_i}{\sum_i v_i} - \bar{r}_Q = \bar{r}_C - \bar{r}_Q = \bar{r}'_C,$$

care atestă coincidența punctelor C^* și C.

1.3.5. Aplicarea teoriei vectorilor alunecători la reducerea sistemelor de vectori legați

Aplicarea teoriei vectorilor alunecători la reducerea sistemelor de vectori legați va fi posibilă numai în condițiile extinderii și la această mulțime de vectori a principiului de echivalență, cu formularea corespunzătoare mulțimii vectorilor alunecători. Dacă în ceea ce privește prima operație elementară de echivalență — compunerea și descompunerea vectorilor concurenți — ea este aceeași și în mulțimea vectorilor alunecători și în mulțimea vectorilor legați, în schimb cea de-a doua operație elementară de echivalență — adăugarea și suprimarea de perechi de vectori direct opuși, cu punctele de aplicație arbitrare pe suportul comun — poate fi acceptată în mulțimea vectorilor legați numai în cazurile cînd punctele de aplicație ale acestor vectori, alcătuind un sistem determinat, formează un ansamblu rigid, care nu permite modificări în distribuția vectori-

Scanned with CamScanner

lor sistemului în urma aplicării, sau suprimării, unei perechi de vectori direct opuși cu puncte de aplicație arbitrare pe suport.

Aceasta este, de fapt, situația întîlnită de cele mai multe ori în problemele mecanicii, domeniul de distribuție al vectorilor legați fiind reprezentat prin volumele nedeformabile ale corpurilor care intervin în procesele mecanice, corpuri presupuse, în cadrul disciplinei de mecanică, perfect rigide.

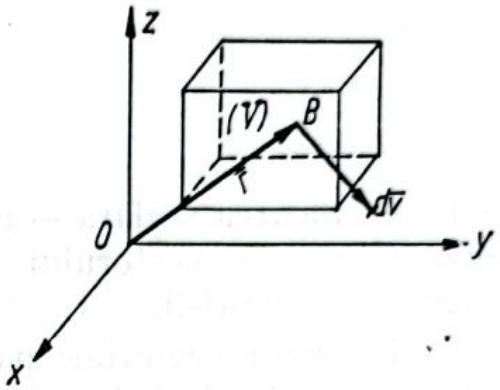


Fig. 1.42.

În consecință, pentru sistemele de vectori legați întîlnite în mecanica rigidelor vor putea fi aplicate integral concluziile privitoare la reduceri din teoria vectorilor alunecători, expusă înainte.

De cele mai multe ori este vorba de distribuții continue pe un volum V de vectori elementari, $d\bar{v}$, adică fiecare punct $B(\bar{r})$ al volumului V este punct de aplicație al unui vector elementar $d\bar{v}$ (fig. 1.42); se înțelege că în aceste cazuri operațiile de însumare vor trebui înlocuite cu cele de integrare pe volumul V, operații notate cu simbolul $\left(\int_{(V)}\right)$.

În consecință, torsorul în polul O al unui asemenea sistem de vectori elementari va fi definit sub forma

$$\boxed{\bar{\mathcal{T}}\{d\bar{v}\} = \begin{Bmatrix} \overline{\mathcal{R}} = \int_{(V)} d\bar{v} \\ \overline{\mathcal{M}} = \int_{(V)} \bar{r} \times d\bar{v} \end{Bmatrix}.} \tag{1.264}$$

Foarte des întîlnite în problemele mecanicii sînt distribuțiile de vectori elementari paraleli reductibile la un vector unic, cărora le vor corespunde centre ale sistemelor de vectori paraleli, $C(\bar{r}_C)$, cu vectorii de poziție determinați prin relații analoge relației (1.263), dar cu modificările corespunzătoare acestei noi situații: înlocuirea

Scanned with CamScanner

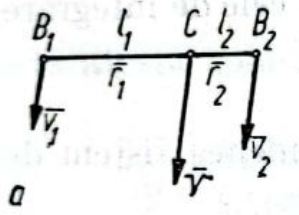
valorilor scalare finite ale vectorilor cu valorile scalare elementare dv și a operațiilor de sumare cu operațiile de integrare pe volumul V. Rezultă astfel expresia

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(V)} \bar{r}\, dv}{\int_{(V)} dv} = \frac{\int_{(V)} \bar{r}\, dv}{\mathcal{V}} \tag{1.265}$$

$\mathcal{V}$ fiind valoarea scalară — raportată la versorul comun al vectorilor elementari — a vectorului unic, echivalent sistemului de vectori elementari paraleli.

În cazul vectorilor paraleli legați, centrul vectorilor paraleli are o semnificație fizică bine precizată : este punctul de aplicație al vectorului unic echivalent sistemului dat de vectori paraleli legați, acest vector unic fiind el însuși un vector legat.

Se înțelege că în cazul unei distribuții de vectori paraleli legați finiți, vectorul de poziție al centrului lor va fi dat de relația (1.263).



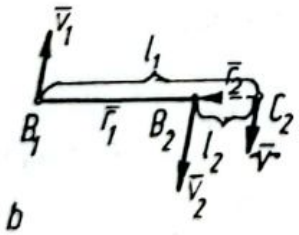


Fig. 1.43.

În cazul unui număr de doi asemenea vectori paraleli legați, fie de același sens, (fig. 1.43, a), fie de sensuri contrare, (fig. 1.43, b), relația (1.263) ia forma particulară

$$\bar{r}_C = \frac{\bar{r}_1 v_1 + \bar{r}_2 v_2}{v_1 + v_2}. \tag{1.266}$$

Prin considerarea polului O chiar în punctul C, ($O \equiv C$; $\bar{r}_C = \vec{OC} = \vec{CC} = 0$), va rezulta condiția

$$\bar{r}_1 v_1 + \bar{r}_2 v_2 = 0 \tag{1.267}$$

exprimînd coliniaritatea vectorilor $\bar{r}_1$, și $\bar{r}_2$, deci situarea punctului C pe linia B_1B_2 a punctelor de aplicație $B_1(\bar{r}_1)$, și $B_2(\bar{r}_2)$ ale celor doi vectori. Notînd cu $\bar{i}_r$ versorul comun al celor doi vectori de poziție

Scanned with CamScanner

și cu r_1 și r_2 valorile lor scalare raportate la acest versor, relației (1.267) îi va corespunde următoarea ecuație de valori scalare :

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 = 0 \tag{1.268}$$

sau

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{r_2}{r_1} \tag{1.269}$$

cu

$$\frac{|v_1|}{|v_2|} = \frac{|r_2|}{|r_1|} = \frac{l_2}{l_1} . \tag{1.270}$$

Ultimele două relații permit să se facă observațiile :

— centrul vectorilor paraleli $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ se găsește totdeauna mai aproape de punctul de aplicație al vectorului cu modulul mai mare (pentru : $|v_1| > |v_2|$ rezultă din (1.270) : $l_2 > l_1$) ;

— centrul vectorilor paraleli $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ se află între cele două puncte de aplicație ale vectorilor dacă ei au același sens (fig. 1. 43, a) și în afara punctelor de aplicație ale celor doi vectori dacă au sensuri contrarii (ig. 1.43, b) $\left(\text{pentru } \frac{v_1}{v_2} > 0, \text{ rezultă } \frac{r_2}{r_1} < 0 ; \text{ pentru : } \frac{v_1}{v_2} < 0, \text{ rezultă } \frac{r_2}{r_1} > 0 \right)$.

Relațiile

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = \mathcal{V} ; \\ r_1 v_1 + r_2 v_2 = 0 ; \\ r_2 - r_1 = r_{12}, \end{cases} \tag{1.271}$$

unde r_{12} este valoarea scalară, raportată la versorul i_r a vectorului

Scanned with CamScanner

$\bar{r}_{B_1B_2} = \overrightarrow{B_1B_2}$, vor permite să se rezolve următoarele două probleme:

— determinarea vectorului unic, echivalent sistemului format din doi vectori paraleli legați, $\bar{v}_1$, și $\bar{v}_2$, precum și a poziției centrului lor;

— descompunerea unui vector $\bar{\bar{v}}$ în două componente paralele, cu suporturile prestabilite.

Scanned with CamScanner

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI

CINEMATICA ȘI DINAMICA RIGIDULUI

Capitolul II

CINEMATICA MIȘCĂRII ABSOLUTE A RIGIDULUI

§ 2. Cinematica mișcării absolute a rigidului

Studiul cinematic al mișcării unui rigid reducîndu-se, în ultimă instanță, la studiul mișcării unora din punctele lui, este firesc ca prezentarea problemelor propriu zise ale cinematicii rigidului să fie precedată de expunerea principalelor noțiuni privind cinematica unui singur punct.

2.1. *Noțiuni fundamentale în cinematica punctului*

Se presupun cunoscute, de la cursul general de fizică, noțiunile fundamentale de *spațiu* și *timp*, noțiuni care definesc cadrul natural în care au loc mișcările mecanice ale corpurilor.

Celelalte noțiuni ale cinematicii, ale căror definiții necesită fie unele extinderi, fie reconsiderări față de modul de formulare a lor în cadrul unui curs general de fizică, sînt prezentate în continuare.

2.1.1. Noțiunea de sistem de referință, sau reper

Prin noțiunea de *sistem de referință*, sau *reper*, se înțelege un ansamblu rigid de puncte din spațiu, la care se raportează poziția unui corp în mișcare și căruia i se atașează un sistem de trei axe concurente — de regulă, triortogonale, — numite *axe de referință*; punctul de concurență a acestor axe este numit *pol de referință*, sau *origine a axelor de referință*.

Deși știința a dovedit că nu există ansambluri rigide de puncte fixe în spațiu și deci, riguros vorbind, nici sisteme de referință fixe,

Scanned with CamScanner

totuși, în mecanica clasică, în care se încadrează și lucrarea de față, s-a acceptat ipoteza existenței unui asemenea sistem fix, numit *sistem de referință absolut*; modul de materializare a acestui concept a urmărit, evident, evoluția cunoștințelor umane asupra universului, trecîndu-se de la sistemul de referință atașat solului terestru, folosit pentru studiul mișcărilor uzuale ale corpurilor, la *sistemul geocentric* — cu originea în centrul Pămîntului și cu axele orientate în direcția unor aștri cu poziții aparent fixe pe bolta cerească — pentru studiul mișcărilor corpurilor cerești în perioada cînd se credea că întreaga boltă cerească se rotește în jurul Pămîntului și apoi la *sistemul heliocentric* — cu originea în centrul Soarelui — după revoluționarele descoperiri ale lui Copernic. Alegerea, în prezent, a unuia sau a altuia dintre aceste sisteme de referință este determinată de gradul de aproximație dorit în rezolvarea unei probleme concrete de mecanică.

Pentru practica inginerească curentă, în care se întîlnesc numai mișcări ale corpurilor efectuate în imediata apropiere a solului terestru și cu durate de desfășurare relativ mici, care permit neglijarea celor două mișcări componente — revoluția și rotația — ale Pămîntului, gradul de aproximare este mai mult decît satisfăcător, în majoritatea covîrșitoare a cazurilor, prin considerarea oricărui sistem de referință legat de solul terestru ca sistem de referință absolut. Ultima constatare va justifica deci considerarea consecventă în lucrarea de față — cu unele excepții care vor fi menționate pe parcurs — a tuturor sistemelor de referință fixe ca fiind invariabil legate de solul terestru.

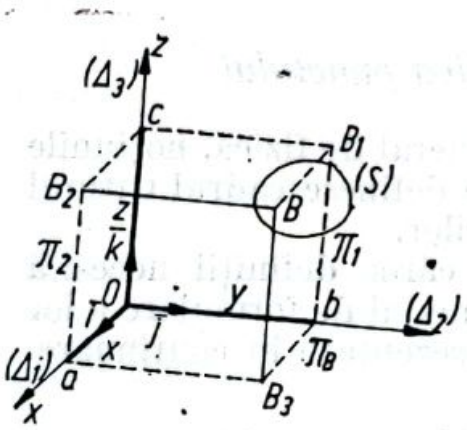


Fig. 2.1.

2.1.2. Parametrii de poziție ai unui punct în mișcare

Poziția, în raport cu sistemul de referință absolut $O\Delta_1\Delta_2\Delta_3$, a unui punct B, arbitrar, al unui rigid (S), (fig. 2.1), poate fi determinată prin anumite mărimi, scalare sau vectoriale, purtînd numele generic de *parametri de poziție ai punctului*.

În mecanica tehnică se folosesc curent următoarele sisteme de parametri de poziție:

1°. **Coordonatele carteziene ale punctului**, reprezentate prin distanțele orientate

$$x = \overline{Oa}\,;\quad y = \overline{Ob}\,;\quad z = \overline{Oc}, \tag{2.1}$$

Scanned with CamScanner

determinate pe axele de referință Δ_1, Δ_2, respectiv Δ_3, de planele perpendiculare pe aceste axe și conținînd punctul B (fig. 2.1); aceste distanțe, ale căror semne se stabilesc în funcție de sensurile de parcurs al lor față de sensurile pozitive alese pe axele de referință, (semnul (+) în cazul coincidenței acestor sensuri și semnul (—) în caz contrar), reprezintă, prin modulele lor, muchiile unui paralelipiped drept, avînd distanța OB drept diagonală (fig. 2.1).

Coordonatelor carteziene le corespunde un sistem de *axe de coordonate carteziene triortogonale*, numit încă și *reper cartezian triortogonal*, aceste axe coincizînd, în cazul de față, cu axele sistemului inițial de referință $O\Delta_1\Delta_2\Delta_3$; orientările axelor carteziene sînt precizate prin versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$, luați astfel încît să formeze un sistem drept (fig. 2.1).

Se înțelege că în cazul punctului B în mișcare în spațiu, coordonatele carteziene vor fi funcții de timp, relațiile

$$\boxed{x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t)} \tag{2.2}$$

purtînd numele de *ecuațiile finite ale mișcării punctului în coordonate carteziene.*

2°. **Coordonatele cilindrice ale punctului,** reprezentate prin următoarele mărimi scalare:

— *raza polară*, egală cu distanța

$$\rho = \overline{OB}_3 > 0, \tag{2.3}$$

B_3 fiind proiecția ortogonală a punctului B pe planul axelor Δ_1 și Δ_2 (fig. 2.2);

— *unghiul polar*, notat

$$\varphi = \sphericalangle\,(\overline{OB}_3, \Delta_1), \tag{2.4}$$

măsurat totdeauna de la axa Δ_1 și considerat pozitiv, sau negativ, după cum, privit dinspre sensul pozitiv al axei Δ_3, este descris în sens direct (antiorar), sau în sens invers (orar);

— *cota punctului*, reprezentată prin distanța orientată

$$\zeta = \overline{Oc}, \tag{2.5}$$

cu semnul raportat la semnul axei Δ_3.

Scanned with CamScanner

Sistemului de coordonate cilindrice îi corespunde un *sistem de axe de coordonate cilindrice*, $B\rho\varphi\zeta$, cu originea în punctul B, cu *axa radială* $B\rho$ orientată după paralela la raza polară, cu *axa transversală* B_φ paralelă la planul de referinţă $O\Delta_1\Delta_2$ şi normală la axa

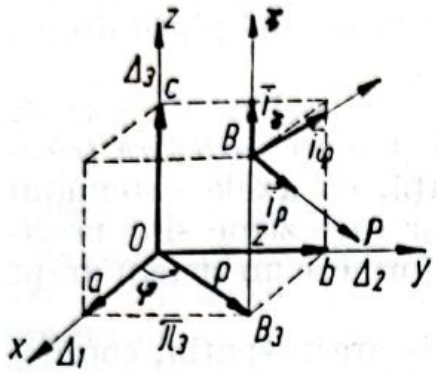


Fig. 2.2.

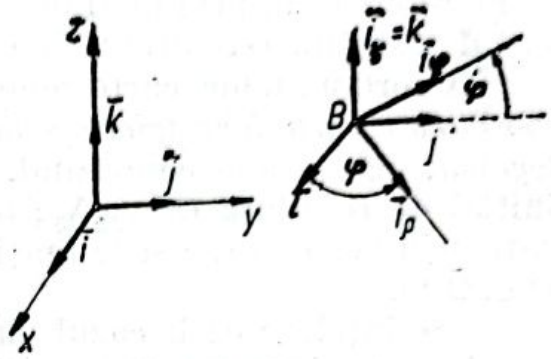


Fig. 2.3.

radială şi cu *axa cotelor* B_ζ paralelă la axa de referinţă Δ_3 (fig. 2.2); sensurile pozitive ale acestor axe sînt precizate prin versorii

$$\bar{i}_\rho = \text{vers}\ (B\rho);\ \bar{i}_\varphi = \text{vers}\ (B\varphi);\ \bar{i}_\varsigma = \text{vers}\ (B\varsigma)$$

sensul versorului $\bar{i}_\rho$ fiind dat de sensul creşterii razei polare, sensul versorului $\bar{i}_\varphi$ de sensul creşterii unghiului polar, iar sensul versorului $\bar{i}_\zeta$ fiind astfel ales încît să fie satisfăcută condiţia de reper drept ($\bar{i}_\zeta = \bar{i}_\rho \times \bar{i}_\rho$).

Figura 2.2 permite să se stabilească, cu uşurinţă, relaţiile dintre coordonatele carteziene şi cele cilindrice:

$$x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi;\ z = \zeta, \tag{2.6}$$

iar fig. 2.3 permite stabilirea expresiilor analitice ale versorilor axelor cilindrice în raport cu reperul cartezian:

$$\bar{i}_\rho = \cos\varphi\bar{i} + \sin\varphi\bar{j};\ \bar{i}_\varphi = -\sin\varphi\bar{i} + \cos\varphi\bar{j};\ \bar{i}_\zeta = \bar{k}. \tag{2.7}$$

În cazul $\zeta = 0$, coordonatele cilindrice şi sistemul axelor de coordonate cilindrice se particularizează în *sistemul de coordonate polare*, respectiv *sistemul axelor de coordonate polare* (fig. 2.4).

În condiţiile deplasării punctului B în spaţiu, coordonatele lui cilindrice vor fi funcţii de timp, relaţiile

$$\boxed{\rho = \rho(t);\ \varphi = \varphi(t);\ \zeta = \zeta(t)} \tag{2.8}$$

Scanned with CamScanner

— reduse la primele două în cazul plan ($\zeta \equiv 0$) — purtînd numele de *ecuațiile finite ale mișcării punctului în coordonate cilindrice*, respectiv *în coordonate polare* în cazul plan.

3°. **Coordonata intrinsecă, sau naturală.** Acest parametru de poziție, folosit, de regulă, pentru determinarea pozițiilor punctelor

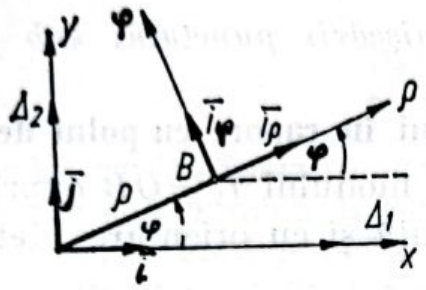


Fig. 2.4.

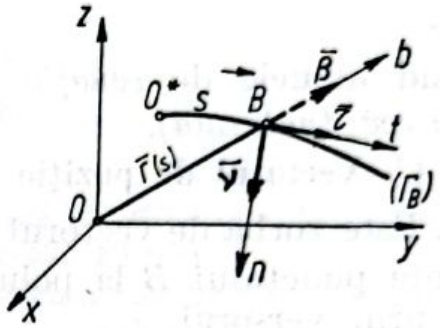


Fig. 2.5.

situate pe curbe prestabilite, este reprezentat prin lungimea orientată a arcului de curbă ce separă punctul B de o origine O^* situată pe curba (Γ_B), pe care se găsește punctul, (fig. 2.5), adică

$$s = \pm \text{ Lung. } \widehat{O^*B}, \tag{2.9}$$

semnul (+) corespunzînd cazului coincidenței sensului de parcurs al arcului $\widehat{O^*B}$ cu sensul pozitiv, fixat arbitrar, pentru parcurgerea curbei — indicat în fig. 2.5 printr-o săgeată curbilinie — , iar semnul (—) în caz contrar.

Coordonatei intrinseci îi corespunde un *sistem de axe intrinseci* (*naturale*), *Btnb*, formînd un triedru drept numit și *triedrul lui Frenet*, cu originea în punctul B, cu *axa tangențială* Bt avînd direcția tangentei în B la curbă, cu *axa normalei principale* Bn orientată după normala principală la curbă în B și cu *axa binormalei* Bb completînd reperul triortogonal drept (fig. 2.5). Sensurile pozitive ale acestor axe sînt determinate prin versorii

$$\bar{\tau} = \text{vers } (Bt); \ \bar{\nu} = \text{vers } (Bn); \ \bar{\beta} = \text{vers } (Bb),$$

sensul lui $\bar{\tau}$ fiind luat în sensul creșterii coordonatei intrinseci s, sensul lui $\bar{\nu}$ fiind ales întotdeauna înspre partea concavă a curbei,

Scanned with CamScanner

iar sensul versorului $\bar{\beta}$ al binormalei fiind luat astfel încît triedrul să fie drept ($\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu}$).

În cazul cînd punctul B se deplasează pe curba (Γ_B), coordonata intrinsecă va fi o funcţie de timp, relaţia

$$\boxed{s = s(t)} \tag{2.10}$$

purtînd numele de *ecuaţia finită a mişcării punctului sub forma intrinsecă (naturală)*.

4°. **Vectorul de poziţie al punctului în raport cu polul de referinţă.** Este vorba de vectorul $\bar{r} = \overrightarrow{OB}$, cu modulul $|\bar{r}| = \overline{OB}$ exprimînd distanţa punctului B la polul de referinţă şi cu orientarea determinată prin versorul

$$\bar{i}_r = \text{vers} \quad r = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}.$$

Cu ajutorul figurii 2.6 pot fi stabilite, cu uşurinţă, următoarele expresii:

— *expresia analitică a vectorului de poziţie în coordonate carteziene*, folosită şi în paragraful precedent:

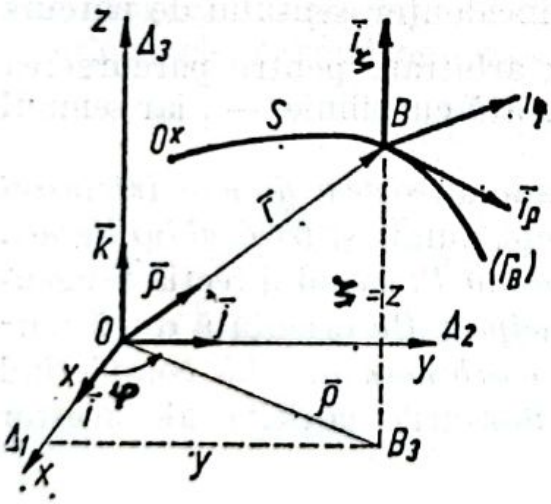


Fig. 2.6.

$$\boxed{\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k};} \tag{2.11}$$

— *expresia analitică a vectorului de poziţie în coordonate cilindrice*:

$$\boxed{\bar{r} = \rho\bar{i}_\rho + \zeta\bar{i}_\zeta} \tag{2.12}$$

respectiv *în coordonate polare* pentru cazul plan:

$$\boxed{\bar{r} = \rho\,\bar{i}_\rho = r\bar{i}_r}. \tag{2.13}$$

În cazul cînd poziţia punctului se determină cu ajutorul coordonatei intrinseci, vectorul de poziţie $\bar{r}$ va deveni o funcţie vectorială de această coordonată, $\bar{r} = \bar{r}(s)$, cu următoarele semnificaţii, stabi-

Scanned with CamScanner

lite în geometria diferenţială, pentru derivatele de ordinul întîi şi doi ale ei în raport cu coordonata intrinsecă:

$$\boxed{\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau},} \tag{2.14}$$

respectiv

$$\boxed{\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho_c}\,\bar{\nu}} \tag{2.15}$$

ρ_c fiind *raza de curbură a curbei în punctul B*; ultima relaţie mai este cunoscută sub numele de *formula I-a a lui Frenet.*

În cazul cînd punctul B se deplasează în spaţiu, vectorul de poziţie $\bar{r}$ devine o *funcţie vectorială de timp*, relaţia

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}(t)} \tag{2.16}$$

purtînd numele de *ecuaţia finită a mişcării punctului sub forma vectorială.*

2.1.3. Noţiunea de traiectorie a unui punct în mişcare

Se numeşte *traiectorie* a unui punct mobil, curba descrisă de acel punct în timpul mişcării lui în raport cu sistemul de referinţă faţă de care se studiază deplasarea sa; traiectoria se va numi *absolută* sau *relativă*, după cum acest sistem de referinţă este considerat fix în spaţiu sau în mişcare.

În aplicaţiile tehnice ale mecanicii, traiectoria va fi considerată determinată atunci cînd va putea fi trasată efectiv porţiunea de curbă parcursă de mobil care interesează în problema concretă dată. Această trasare, care implică adoptarea unei anumite scări de reprezentare a distanţelor, poate fi *exactă*, efectuată cu ajutorul unor instrumente matematice corespunzătoare — echer, compas, elipsograf etc. —, utilizabile în cazul unor curbe plane mai simple, uşor de recunoscut prin forma ecuaţiilor lor — dreaptă, cerc, elipsă etc. —, sau *aproximativă*, construită prin puncte succesive unite printr-o curbă continuă — procedeu foarte des folosit în practica inginerească —, în cazul curbelor mai complicate.

Scanned with CamScanner

2.1.4. Noţiunea de viteză a unui punct în mişcare

Prin împărţirea traiectoriei punctului mobil în porţiuni de lungimi Δs suficient de mici încît, pe de o parte, un asemenea element de arc de curbă, Δs, să poată fi asimilat cu elementul de coardă subîntinsă, ($\Delta s \approx \overline{BB'} = \Delta r$) şi, pe de altă parte, pe o asemenea porţiune mişcarea punctului să poată fi aproximată cu o mişcare rectilinie uniformă (fig. 2.7), se poate extinde noţiunea de *viteză medie* — introdusă iniţial pentru caracterizarea mişcărilor rectilinii variate — şi la mişcările curbilinii, oarecare, cu condiţia însă de a-i atribui de astă dată caracterul de vector orientat după versorul $\bar{\tau}'$ al secantei BB', — cu sensul lui $\bar{\tau}'$ determinat de sensul creşterii arcului s —, pentru a se pune astfel în evidenţă şi schimbarea de direcţie survenită în mişcarea curbilinie după parcurgerea fiecărei porţiuni Δs. Se va putea deci scrie

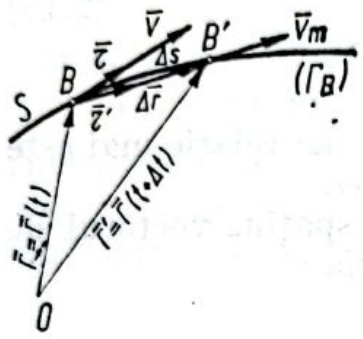


Fig. 2.7.

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}\,\bar{\tau}' = \frac{\Delta r}{\Delta t}\,\bar{\tau}' = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}, \tag{2.17}$$

unde $\Delta\bar{r} = [\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)]$ este creşterea geometrică a vectorului de poziţie înregistrată în intervalul de timp Δt în care se parcurge arcul Δs, Δr fiind valoarea scalară, raportată la versorul τ', a acestei creşteri geometrice.

Prin trecere la limită — considerîndu-se în cele ce urmează numai cazurile cînd limitele rapoartelor (2.17) există şi sînt determinate —, se obţine *viteza instantanee la momentul t* a punctului mobil, definită prin relaţia

$$\boxed{\bar{v} = \frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\bar{r}},} \tag{2.18}$$

orientată după tangenta în punctul B la traiectoria (Γ_B), (fig. 2.7) (pentru $\Delta t \to 0$, secanta BB' devine tangentă.)

Definiţia precedentă a vitezei este valabilă atît pentru mişcarea absolută, pe o traiectorie absolută, a punctului, fiind numită în

Scanned with CamScanner

acest caz şi *viteză absolută*, cît şi pentru o mişcare relativă în raport cu un reper mobil $Wx''y''z''$, pe o traiectorie relativă pe care poziţia punctului este determinată prin vectorul de poziţie $\bar{r}'' = \overrightarrow{WB}$, în care caz ea este numită *viteză relativă* şi este notată cu simbolul

$$\boxed{\bar{v}_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{r}'']_r} \tag{2.19}$$

indicele inferior (r) avînd rolul de a preciza că o asemenea mişcare este remarcată numai de un observator invariabil legat de reperul mobil $Wx''y''z''$, pentru care axele acestui reper nu-şi modifică orientarea în timp.

2.1.5. Noţiunea de acceleraţie a unui punct în mişcare

Considerîndu-se două poziţii învecinate ale punctului mobil, B la momentul t şi B' la momentul $t' = t + \Delta t$, vitezele corespunzătoare acestor momente vor fi $\bar{v}(t)$ şi $\bar{v}' = \bar{v}(t + \Delta t)$, orientate după tangentele în B, respectiv în B', la traiectoria (Γ_B), (fig. 2.8), diferenţa lor, $\Delta\bar{v} = [\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)]$, construită în punctul B, reprezentînd *creşterea geometrică a vitezei în intervalul* de timp Δt.

Raportul

$$\bar{a}_m = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} \tag{2.20}$$

defineşte *acceleraţia medie* a punctului în intervalul de timp Δt, iar limita, pentru $\Delta t \to 0$, a acestui raport defineşte *acceleraţia instantanee la momentul t*, sau *în punctul B*, a punctului mobil:

$$\boxed{\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}}}. \tag{2.21}$$

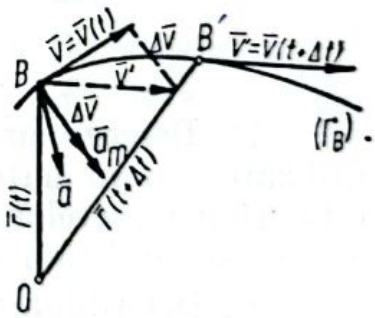


Fig. 2.8.

Din examinarea orientării, la limită, a vectorului $\Delta\bar{v}$ — şi deci şi a vectorului $\bar{a}_m$ —, se poate trage concluzia că acceleraţia instantanee este situată în planul osculator al curbei în punctul B şi că este orientată totdeauna spre partea concavă a curbei.

Se înţelege că definiţia precedentă a acceleraţiei instantanee se aplică atît mişcării absolute, cînd ea va mai fi numită şi *acceleraţie absolută*, cît şi mişcării relative în raport cu un reper mobil $Mx''y''z''$,

Scanned with CamScanner

în care caz este numită *acceleraţie* relativă şi este notată cu simbolurile

$$\boxed{\bar{a}_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[\bar{v}_r]_r = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,(\bar{r}'')_r,} \tag{2.22}$$

indicele inferior (r) avînd aceeaşi semnificaţie ca şi în cazul vitezei.

2.2. *Problemele cinematicii punctului*

Rezolvarea problemelor curente de cinematica punctului presupune determinarea traiectoriei, vitezei şi acceleraţiei unui punct în mişcare — cu calculul, eventual, şi al unor valori, corespunzătoare unor momente determinate, ale parametrilor de poziţie şi ale vitezei şi acceleraţiei — , considerîndu-se cunoscute, fie că sînt date direct în enunţ, fie că se deduc din datele problemei, ecuaţiile finite ale mişcării sub una din formele menţionate la punctul precedent.

Vor putea fi întîlnite, în consecinţă, următoarele situaţii distincte în rezolvarea problemelor de cinematica punctului:

2.2.1. Cinematica punctului cu ecuaţia finită dată sub forma intrinsecă:

$$s = s(t). \tag{2.23}$$

1°. **Determinarea traiectoriei.** Întrucît, aşa cum s-a mai spus, utilizarea coordonatei intrinseci este justificată, în deosebi, în cazul mişcărilor punctelor pe traiectorii prestabilite, problema determinării lor nu se mai pune.

2°. **Determinarea vitezei.** În baza relaţiei (2.18) de definiţie a vitezii, se poate scrie

$$\bar{v} = \frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}\,\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}s},$$

sau încă, avînd în vedere semnificaţia (2.14) a ultimului factor, mai rezultă

$$\boxed{\bar{v} = \dot{s}\,\bar{\tau} = v\,\bar{\tau},} \tag{2.24}$$

Scanned with CamScanner

această relație, numită *expresia analitică a vitezei sub forma intrinsecă*, punînd în evidență orientarea după tangentă a vectorului viteză, (fig. 2.9), precum și valoarea scalară, raportată la versorul $\bar{\tau}$, a acestui vector:

$$\boxed{v = \dot{s}}. \qquad (2.25)$$

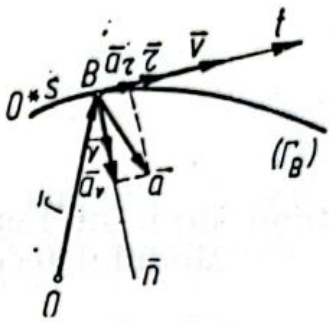


Fig. 2.9.

3°. **Determinarea acceleraţiei.** Ţinînd seama de relaţia (2.21) de definiţie a acceleraţiei, se poate scrie

$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{s}\bar{\tau}] = \ddot{s}\bar{\tau} + \dot{s}\dot{\bar{\tau}} = \ddot{s}\bar{\tau} + \dot{s}\frac{\mathrm{d}\bar{\tau}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \ddot{s}\bar{\tau} + \dot{s}^2\frac{\mathrm{d}\bar{\tau}}{\mathrm{d}s},$$

sau încă, avînd în vedere și semnificația (2.15) vectorului $\frac{\mathrm{d}\bar{\tau}}{\mathrm{d}s}$, mai rezultă relația

$$\boxed{\bar{a} = \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho_c}\bar{\nu} = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho_c}\bar{\nu},} \qquad (2.26)$$

numită *expresia analitică a acceleraţiei sub forma intrinsecă.*

Această ultimă expresie scoate în evidență existența a două componente ale acceleraţiei (fig. 2.9) și anume:

acceleraţia tangenţială:

$$\bar{a}_\tau = \ddot{s}\bar{\tau} = \dot{v}\bar{\tau}, \qquad (2.27)$$

orientată după tangenta la traiectorie și în același sens cu $\bar{\tau}$, sau în sens contrar, în funcţie de semnul valorii scalare, raportate la versorul $\bar{\tau}$, a acestei componente:

$$\boxed{a_\tau = \ddot{s} = \dot{v};} \qquad (2.28)$$

acceleraţia normală:

$$\bar{a}_\nu = \frac{\dot{s}^2}{\rho_c}\bar{\nu} = \frac{v^2}{\rho_c}\bar{\nu}, \qquad (2.28)$$

Scanned with CamScanner

orientată totdeauna în sensul versorului $\bar{\nu}$, valoarea ei scalară raportată la acest versor

$$\boxed{a_\nu = \frac{\dot{s}^2}{\rho_c} = \frac{v^2}{\rho_c}} \tag{2.29}$$

fiind deci, în toate cazurile, pozitivă.

Modulul acceleraţiei va avea valoarea

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2} = \sqrt{\ddot{s}^2 + \frac{\dot{s}^4}{\rho_c^2}} = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho_c^2}}\,.} \tag{2.30}$$

Semnificaţia fizică a semnelor diferite pe care le pot avea mărimile scalare $v = \dot{s}$ şi $a_\tau = \ddot{s}$, respectiv a sensurilor pe care le pot avea vectorii $\bar{v}$ şi $\bar{a}_\tau$, rezultă din examinarea următoarelor trei situaţii distincte:

Cazul I: caracterizat prin condiţia

$$va_\tau = v\dot{v} > 0 \tag{2.31}$$

satisfăcută într-un anumit interval de timp şi care exprimă creşterea în modul, în acel interval de timp, a funcţiei $v(t)$; această situaţie, care poate fi recunoscută prin acelaşi sens pentru viteză şi acceleraţie tangenţială, respectiv prin unghiul ascuţit format de acceleraţia totală cu viteza, (fig. 2.10, *a*), corespunde unei *mişcări accelerate.*

Cazul II: corespunzător condiţiei:

$$va_\tau = v\dot{v} < 0 \tag{2.32}$$

satisfăcută într-un interval determinat de timp şi care evidenţiază scăderea în modul, în acel interval de timp, a funcţiei $v(t)$, este caracteristic unei *mişcări încetinite* şi poate fi recunoscut, în schiţele cinematice, prin sensurile contrare ale vectorilor $\bar{v}$ şi $\bar{a}_\tau$, respectiv prin unghiul obtuz format de acceleraţia totală cu viteza (fig. 2.10, *b*).

Cazul III: corespunzător condiţiei:

$$va_\tau = v\dot{v} = 0, \tag{2.33}$$

Scanned with CamScanner

cu singura concluzie acceptabilă atît timp cît există mişcare ($v \neq 0$) :

$$a_\tau = \dot{v} = 0, \tag{2.34}$$

cu consecinţă directă

$$v = v^\circ = \text{const}, \tag{2.35}$$

caracterizează o *mişcare uniformă* şi poate fi recunoscut prin absenţa componentei tangenţiale a acceleraţiei, respectiv prin unghiul drept format de acceleraţia totală cu viteza, (fig. 2.10, *c*).

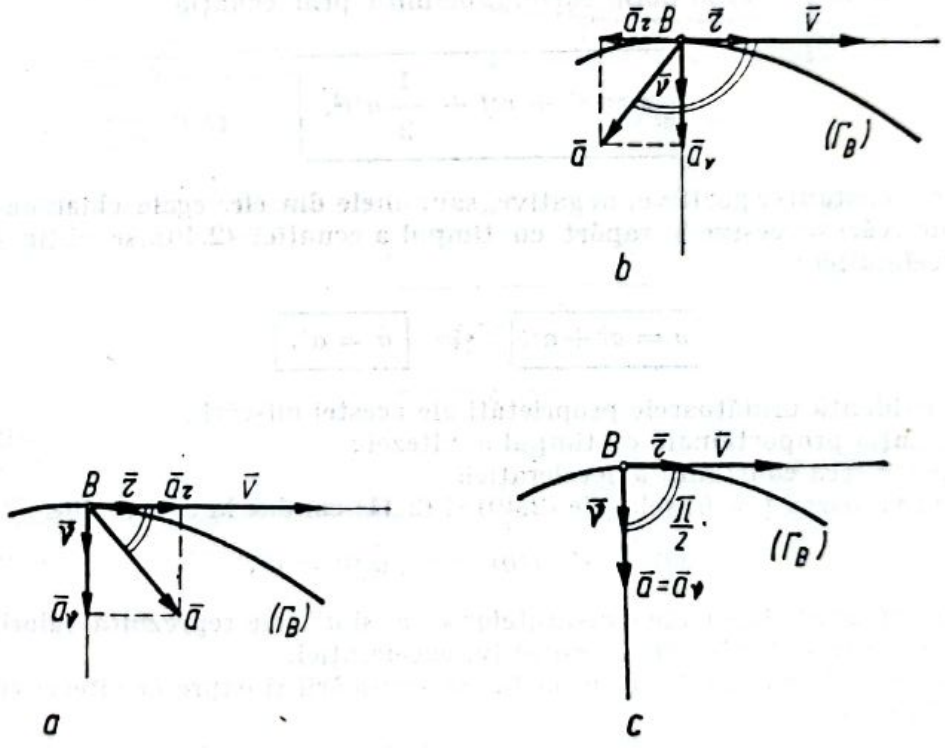


Fig. 2.10.

Se poate face deci următoarea observaţie generală : *Mişcarea unui punct pe o traiectorie dată este accelerată, încetinită sau uniformă, după cum acceleraţia punctului respectiv formează cu viteza sa un unghi ascuţit, obtuz sau drept.*

4° **Aplicaţie : mişcarea rectilinie a punctului**

Mişcarea rectilinie fiind caracterizată geometric prin rază de curbură infinită şi deci mecanic prin acceleraţie normală egală cu zero, $\left(\rho_c = \infty\ ;\ a_\nu = \dfrac{v^2}{\rho_c} = 0\right)$ · se va putea scrie

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau = \ddot{s}\bar{\tau} = \dot{v}\bar{\tau}, \tag{2.36}$$

o asemenea mișcare fiind :

— *accelerată*, în cazul

$$va > 0; \tag{2.37}$$

— *încetinită*, în cazul

$$va < 0; \tag{2.38}$$

— *uniformă*, pentru

$$a = 0. \tag{2.39}$$

Următoarele două mișcări rectilinii particulare prezintă un interes deosebit pentru aplicațiile tehnice :

a) *Mișcarea rectilinie uniform variată* definită prin ecuația

$$\boxed{s = s^\circ + v^\circ t + \frac{1}{2} a^\circ t^2,} \tag{2.40}$$

cu s°, v° și a° constante, pozitive, negative, sau, unele din ele, egale chiar cu zero.

Prin derivări succesive în raport cu timpul a ecuației (2.40) se obțin expresiile vitezei și accelerației :

$$\boxed{v = v^\circ + a^\circ t} \quad \text{și} \quad \boxed{a = a^\circ,} \tag{2.41}$$

care scot în evidență următoarele proprietăți ale acestei mișcări :

— variația proporțională cu timpul a vitezei ;

— menținerea constantă a accelerației.

Pentru valoarea $t = 0$, relațiile (2.40) și (2.41) conduc la concluziile

$$s(0) = s^\circ ; v(0) = v^\circ ; a(0) = a^\circ, \tag{2.42}$$

furnizînd semnificațiile fizice ale constantelor s°, v° și a° : ele reprezintă valorile inițiale ale coordonatei intriseci, vitezei și, respectiv, accelerației.

Eliminarea timpului între ecuația finită a mișcării și expresia vitezei conduce la *formula lui Torricelli* :

$$\boxed{v^2 - v^{\circ 2} = 2a^\circ (s - s^\circ).} \tag{2.43}$$

În funcție de semnele și valorile constantelor v° și a°, vor putea fi întîlnite următoarele cazuri particulare de mișcare rectilinie uniform variată :

Cazul I : mișcare rectilinie uniform accelerată cu viteză inițială, corespunzătoare condiției

$$v^\circ a^\circ > 0, \tag{2.44}$$

adică atunci cînd viteza inițială și accelerația inițială au același sens (fig. 2.11).

Pentru a dovedi caracterul accelerat al mișcării și într-un moment ulterior momentului inițial, se vor înmulți între ele ecuațiile (2.41), rezultînd astfel condiția

$$va = v^\circ a^\circ + a^{\circ 2} t > 0. \tag{2.45}$$

Ca exemplu de asemenea mișcare poate fi dată mișcarea pe verticală a centrului de masă al unui corp aruncat pe verticală în jos cu viteza inițială v° (fig.2.12). Prin alegerea poziției inițiale a centrului de greutate ca origine pentru măsurarea coordonatei

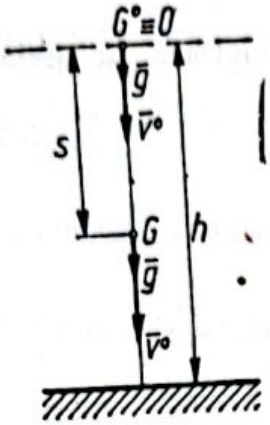


Fig. 2.11.

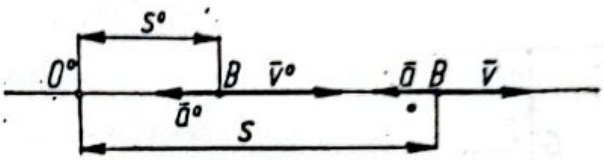


Fig. 2.12.

s pe verticala luată cu sensul pozitiv în jos ($s^\circ = 0$; $v^\circ > 0$; $a^\circ = g > 0$), ecuațiile (2.40), (2.41) și (2.43) iau formele :

$$\boxed{s = v^\circ t + \frac{1}{2} g t^2,} \tag{2.46}$$

respectiv

$$\boxed{v = v^\circ + gt} \; ; \quad \boxed{a = g} \tag{2.47}$$

și

$$\boxed{v^2 - v^{\circ 2} = 2gs,} \tag{2.48}$$

ultima relație permițînd să se determine viteza finală v_f cu care centrul G atinge solul terestru, situat la distanța h de poziția inițială a acestui centru (pentru : $s = h \Rightarrow v = v_f$)

$$\boxed{v_f = \sqrt{v^{\circ 2} + 2gh.}} \tag{2.49}$$

Cazul II : *mișcarea rectilinie uniform încetinită, corespunzătoare condiției* :

$$v^\circ a^\circ < 0, \tag{2.50}$$

implicînd sensuri contrare pentru viteza inițială și accelerație (fig. 2.13).

Într-adevăr, înmulțind și acum, între ele, relațiile (2.41) se capătă egalitatea

$$va = v^\circ a^\circ \left(1 + \frac{a^\circ}{v^\circ} t \right), \tag{2.51}$$

care permite să se observe că pentru

$$t \lhd t_f = -\frac{v^\circ}{a^\circ}, \tag{2.52}$$

$-t_f$ fiind valoarea pentru care binomul $\left(1 + \frac{a^\circ}{v^\circ} t\right)$ se anulează, iar viteza v devine egală cu zero, $(v(t_f) = 0)$ –, rezultă condiția

$$va \lhd 0,$$

care justifică caracterul încetinit al mișcării.

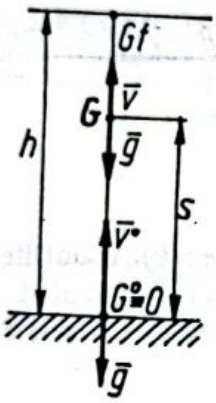


Fig. 2.13.

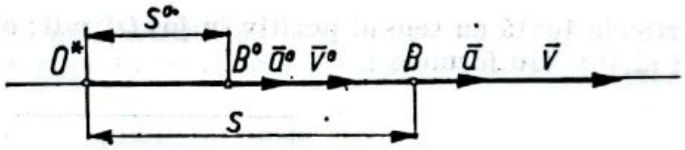


Fig. 2.14.

Ca exemplu de mișcare rectilinie uniform încetinită poate fi dată mișcarea pe verticală a centrului de masă al unui rigid aruncat cu viteza inițială v° în sus. Alegînd și acum originea în poziția inițială a centrului de masă, $(O \equiv G^\circ)$ și sensul în sus al verticalei ca sens pozitiv, $(s^\circ = 0\,;\ v^\circ > 0\,;\ a^\circ = -g < 0)$, (fig. 2.14), se obțin următoarele forme pentru ecuațiile (2.40), (2.41) și (2.43);

$$\boxed{s = v^\circ t - \frac{1}{2} g t^2,} \tag{2.53}$$

respectiv

$$\boxed{v = v^\circ - gt}\ ; \qquad \boxed{a = -g} \tag{2.54}$$

și

$$\boxed{v^2 - v^{\circ 2} = -2gs}, \tag{2.55}$$

ultima relație permițînd să se determine viteza inițială cu care trebuie aruncat mobilul pentru a atinge o anumită înălțime h: (pentru: $s = h$, rezultă $v = 0$):

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}.} \tag{2.56}$$

Scanned with CamScanner

Relația (2.56) mai este unoscută sub numele de *formula lui Galileu.*

Cazul III : corespunzător condiției

$$v^\circ a^\circ = 0, \tag{2.57}$$

— în care, pentru a exista mișcare, numai unul din factori poate fi egal cu zero—, are următoarele două variante :

Cazul III. a : mișcarea rectilinie uniform accelerată fără viteză inițială, corespunzătoare condițiilor

$$v^\circ = 0\,;\ a^\circ \neq 0, \tag{2.58}$$

pentru care ecuațiile (2.41) iau formele

$$v = a^\circ t\,;\ a = a^\circ, \tag{2.59}$$

înmulțirea lor conducînd la concluzia

$$va = a^{\circ 2} t > 0, \tag{2.60}$$

care dovedește caracterul accelerat al acestei mișcări.

Ca exemplu de asemenea mișcare poate fi dată mișcarea centrului de masă al unui corp în cădere liberă (fără viteză inițială) pe verticală. Alegînd din nou originea în poziția inițială a centrului de masă și sensul pozitiv al verticalei în jos ($s^\circ = 0\,;\ v^\circ = 0\,;\ a = g > 0$), rezultă următoarele forme particulare pentru ecuațiile (2.40), (2.41) și (2.43) ;

$$\boxed{s = \frac{1}{2} gt^2,} \tag{2.61}$$

respectiv

$$\boxed{v = gt}\ ;\quad \boxed{a = g} \tag{2.62}$$

și

$$\boxed{v^2 = 2gs}. \tag{2.63}$$

Ultima relație permite să se determine viteza finală cu care centrul de masă atinge solul (pentru : $s = h$ rezultă $v = v_f$) :

$$\boxed{v_f = \sqrt{2gh},} \tag{2.64}$$

această relație purtînd de asemenea, numele de *formula lui Galileu.*

Cazul III. b : mișcarea rectilinie uniformă, corespunzătoare condițiilor

$$v^\circ \neq 0\,;\ a^\circ = 0. \tag{2.65}$$

pentru care relațiile (2.40) și (2.41) iau formele particulare

$$\boxed{s = s^\circ + v^\circ t} \tag{2.66}$$

respectiv

$$\boxed{v = v^\circ}\ ;\quad \boxed{a = 0}, \tag{2.67}$$

ele scoțînd în evidență noi proprietăți ale mișcării efectuate în condițiile precizate mai sus și anume:

— variații ale distanței parcurse proporționale cu timpul;

— mișcare efectuată cu viteză constantă.

b) *Mișcarea rectilinie oscilatorie armonică*, definită prin ecuația

$$\boxed{s = S \sin (kt + \alpha)} \tag{2.68}$$

S — reprezentînd valoarea maximă a lui s —, k și α fiind constante — primele două obișnuit pozitive —, purtînd numele de *amplitudine*, *pulsație* și, respectiv, *fază inițială*; mărimea

$$\alpha(t) = kt + \alpha \tag{2.69}$$

este numită *fază la momentul t*, iar mărimea s este *elongația la momentul t*.

Prin derivări succesive ale relației (2.68) în raport cu timpul, se obțin expresiile vitezei și accelerației punctului în mișcare oscilatorie armonică:

$$\begin{cases} v = \dot{s} = kS' \cos (kt + \alpha); \\ a = \ddot{s} = -k^2 S \sin (kt + \alpha). \end{cases} \tag{2.70}$$

Caracterul oscilatoriu armonic al mișcării rezultă din faptul că după intervale de timp egale cu multipli întregi ai valorii

$$T = \frac{2\pi}{k}, \tag{2.71}$$

numită *perioada* mișcării oscilatorii armonice, punctul trece mereu prin aceleași poziții și în același sens, așa cum rezultă din egalitățile

$$\begin{cases} s(t + hT) = S \sin [k(t + hT) + \alpha] = S \sin \left[(kt + \alpha) + kh \cdot \dfrac{2\pi}{k} \right] = S \sin(kt + \alpha) = \\ \qquad\qquad = s(t); \\ \dot{s}(t + hT) = kS \cos [k(t + hT) + \alpha] = kS \cos \left[(kt + \alpha) + kh \cdot \dfrac{2\pi}{k} \right] = \\ \qquad = kS \cos (kt + \alpha) = \dot{s}(t), \quad (h = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases} \tag{2.72}$$

atingînd pozițiile extreme B' și B'' (fig. 2.15), determinate prin valorile

$$\begin{cases} s' = +S \\ s'' = -S \end{cases} \tag{2.73}$$

ale elongației, corespunzătoare momentelor t_λ date de relația

$$kt_\lambda + \alpha = (2\lambda + 1)\frac{\pi}{2}, \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.74}$$

În fig. 2.16 sînt prezentate graficele funcțiilor $s(t)$, $v(t)$ și $a(t)$ pentru cazul particular $\alpha = 0$.

Mișcarea oscilatorie armonică prezintă următoarele trei proprietăți importante:

— *Izocronismul oscilațiilor*, înțelegîndu-se prin aceasta că perioada mișcării este independentă de amplitudine și de faza inițială (mărimile S și α nu intră în expresia (2.71) a perioadei).

— *Tautohronismul oscilațiilor*, aceasta însemnînd că timpul $t_{B'_0}$, necesar punctului mobil să ajungă din poziția extremă B' în originea O — ultima, purtînd încă și numele de *centru de oscilație* — este independent de amplitudine.

Pentru a demonstra proprietatea, se va nota cu t'_λ unul din momentele în care punctul mobil a ajuns în poziția B', acest moment avînd, în baza relației (2.74), valoarea

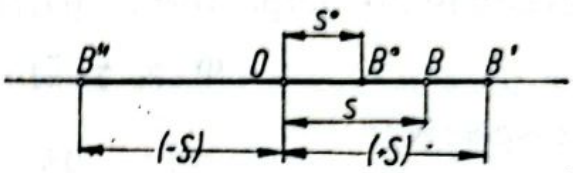


Fig. 2.15.

$$t'_\lambda = (2\lambda + 1)\frac{\pi}{2k} - \frac{\alpha}{k}$$

și cu t''_λ momentul imediat următor în care mobilul trece prin origine, acest din urmă timp satisfăcînd relația

$$kt''_\lambda + \alpha = (2\lambda + 2)\frac{\pi}{2},$$

de unde rezultă pentru el valoarea

$$t''_\lambda = (2\lambda + 2)\frac{\pi}{2k} - \frac{\alpha}{k}.$$

Timpul de revenire din poziția extremă B' în origine va fi dat de relația

$$t_{B'O} = t''_\lambda - t'_\lambda = \frac{\pi}{2k} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{k} = \frac{T}{4} \qquad (2.75)$$

și după cum se vede el nu depinde decît de pulsație.

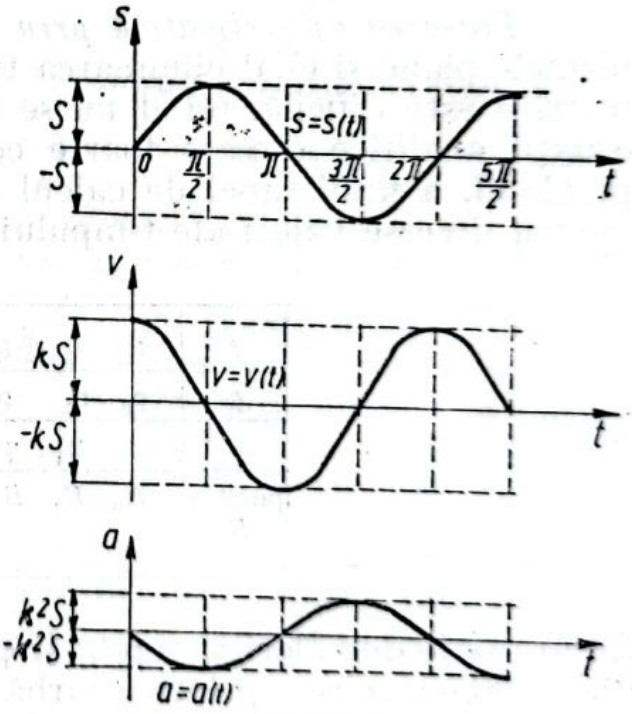


Fig. 2.16.

— *Proporționalitatea accelerației cu elongația*, ultima proprietate rezultînd chiar din expresia accelerației scrisă, în baza relației (2.68), sub forma

$$a = -k^2 s, \qquad (2.76)$$

această relație reprezentînd în fond ecuația de proiecție pe axa mișcării a relației vectoriale

$$\bar{a} = -k^2\bar{r}, \qquad (\bar{r} = \overrightarrow{OB}). \qquad (2.77)$$

2.2.2. Cinematica punctului cu ecuațiile finite date în coordonate cilindrice:

$$\rho = \rho(t)\,;\ \varphi = \varphi(t)\,;\ \zeta = \zeta(t). \tag{2.78}$$

1°. **Determinarea traiectoriei.** *Trasarea exactă* a traiectoriei va fi posibilă numai pentru anumite curbe simple, care vor putea fi recunoscute după forma particulară a ecuațiilor analitice

$$\Phi(\rho,\ \varphi,\ \zeta) = 0\,;\ \psi(\rho,\varphi,\zeta) = 0, \tag{2.79}$$

respectiv

$$f(\rho,\varphi) = 0 \tag{2.80}$$

pentru cazul plan ($\zeta \equiv 0$), ecuații obținute prin eliminarea timpului între ecuațiile finite (2.78), reduse la primele două în problemele plane.

Trasarea aproximativă prin puncte, folosită în deosebi în problemele plane și cînd eliminarea timpului între ecuațiile finite parametrice este dificilă, (cînd nu se dispune de MEC), sau conduce la ecuații analitice directe foarte complicate, implică întocmirea, în prealabil, a unui tabel de calcul al parametrilor de poziție ρ și φ, pentru diverse valori ale timpului :

t	t_0	t_1	$t_2 \ldots\ t_i \ldots\ t_n$
ρ	ρ_0	ρ_1	$\rho_2 \ldots\ \rho_i \ldots\ \rho_n$
φ	φ_0	φ_1	$\varphi_2 \ldots\ \varphi_i \ldots\ \varphi_n$
poziția B	B_0	B_1	$B_2 \ldots\ B_i \ldots\ B_n$

fiecare serie de valori $\rho_i = \rho(t_i)$ și $\varphi_i = \varphi(t_i)$ determinînd cîte o poziție B_i în plan ; unirea, printr-o curbă continuă a acestor poziții succesive va furniza, cu o aproximație determinată de mărimea intervalelor $(t_i - t_{i-1})$, porțiunea de traiectorie care interesează în problemă.

2°. **Determinarea vitezei.** Avînd în vedere relația (2.18) de definiție a vitezei, expresia (2.12) a vectorului de poziție în coordonate cilindrice, precum și semnificațiile

$$\vec{i}_\rho = \dot{\varphi}(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}] = \dot{\varphi}\vec{i}_\varphi\,;\quad \vec{i}_\varphi = -\dot{\varphi}\,[\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}] = -\dot{\varphi}\vec{i}_\rho\,;\ \vec{i}_\zeta = 0 \tag{2.81}$$

ale derivatelor în raport cu timpul ale versorilor axelor de coordonate cilindrice, se obține următoarea *expresie analitică a vitezei în coordonate cilindrice*:

$$\boxed{\bar{v} = \dot{\rho}\,\bar{i}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\bar{i}_\varphi + \dot{\zeta}\bar{i}_\zeta,} \tag{2.82}$$

cu următoarele proiecții ale vitezei pe axele cilindrice (fig. 2.17):

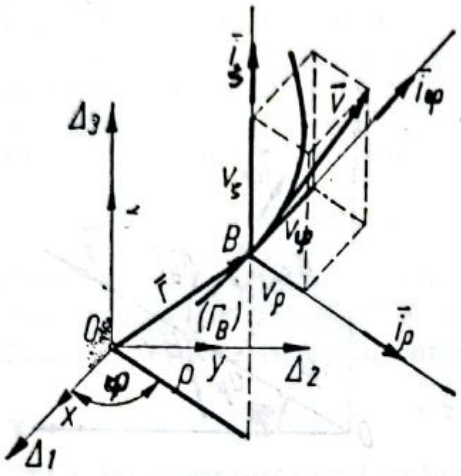


Fig. 2.17.

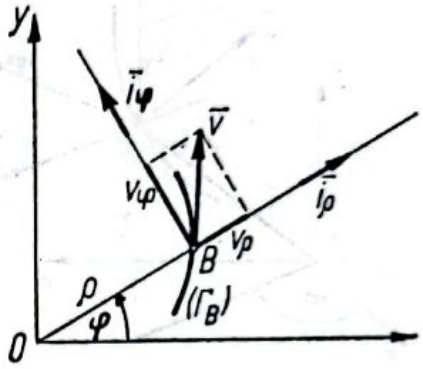


Fig. 2.18.

$$\boxed{v_\rho = \bar{v}\bar{i}_\rho = \dot{\rho};\ v_\varphi = \bar{v}\bar{i}_\varphi = \rho\dot{\varphi};\ v_\zeta = \bar{v}\bar{i}_\zeta = \dot{\zeta},} \tag{2.83}$$

care vor permite calculul modulului ei:

$$\boxed{|\bar{v}| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\zeta}^2}} \tag{2.84}$$

cu $\dot{\zeta} \equiv 0$ în cazul plan, (fig. 2.18).

3°. Determinarea accelerației. Ținînd seama de relația (2.21) de definiție a accelerației, de expresia (2.82) a vitezei, precum și de relațiile (2.81), se poate scrie și următoarea *expresie analitică a accelerației în coordonate cilindrice*:

$$\boxed{\bar{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\bar{i}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\bar{i}_\varphi + \ddot{\zeta}\bar{i}_\zeta},\ , \tag{2.85}$$

rezultînd de aici și expresiile proiecțiilor accelerației pe axele de coordonate cilindrice (fig. 2.19);

$$\boxed{a_\rho = \bar{a}\bar{i}_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2;\ a_\varphi = \bar{a}\bar{i}_\varphi = 2\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi};\ a_\zeta = \bar{a}\bar{i}_\zeta = \ddot{\zeta}}\ , \tag{2.86}$$

• • •

Scanned with CamScanner

care vor permite calculul modulului acceleraţiei :

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})^2 + \ddot{\zeta}^2}, \qquad (2.87)$$

cu $\ddot{\zeta} \equiv 0$ pentru cazul plan, (fig. 2.20).

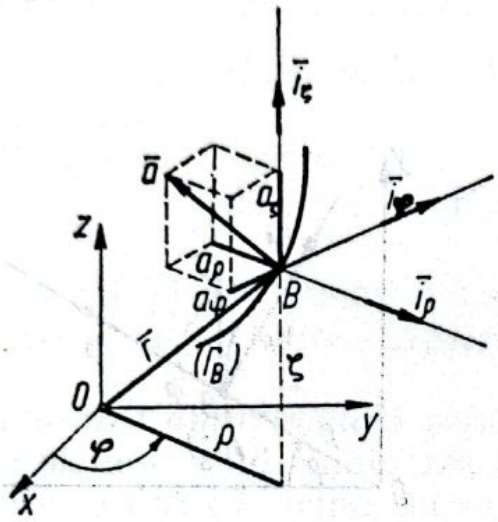


Fig. 2.19.

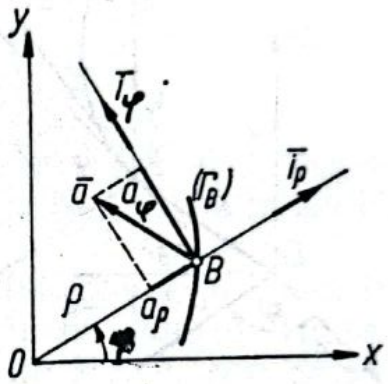


Fig. 2.20.

24

4°. Aplicaţie : mişcarea circulară a punctului

Fiind vorba de o mişcare pe un cerc de rază egală cu R (fig. 2.21), se va alege originea sistemului de referinţă în centrul cercului şi axa de referinţă Δ_1, în raport cu care vor fi măsurate unghiurile polare, astfel încît să treacă printr-un punct arbitrar O^* al cercului ; în modul acesta ecuaţiile finite, în coordonate polare, ale mişcării punctului pe traiectoria circulară vor lua formele

$$\rho = R; \qquad \varphi = \varphi(t), \qquad (2.88)$$

ultima fiind numită încă şi *ecuaţia finită unghiulară a mişcării circulare a punctului.*

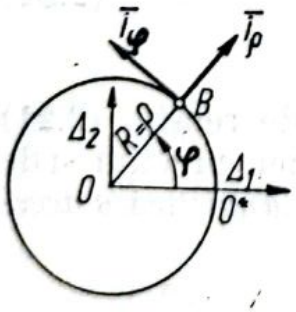


Fig. 2.21.

Derivata de ordinul întîi în raport cu timpul a funcţiei $\varphi(t)$, notată

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \qquad (2.89)$$

şi măsurată în *radiani pe secundă*, sau în *secunde la minus unu*, (rad/s=s^{-1}), (unghiurile nu au dimensiuni fizice), este numită *viteză unghiulară* a punctului şi ea indică sensul în care se produce variaţia $d\varphi$ a unghiului φ, deci sensul mişcării punctului pe cerc, lui $\omega > 0$ corespunzîndu-i sensul direct de parcurs, iar lui $\omega < 0$ sensul invers ; în mod convenţional, această viteză unghiulară este reprezentată în schiţele cinematice printr-o săgeată circulară, cu vîrful în sens direct pentru $\omega > 0$ şi în sens invers pentru $\omega < 0$, (în fig. 2.22 a şi b s-a considerat $\omega > 0$).

Derivata de ordinul doi în raport cu timpul a unghiului φ :

$$\boxed{\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega},} \tag{2.90}$$

măsurată în *radiani pe secundă la pătrat*, sau în *secunde la minus doi*, ($rad/s^2 = s^{-2}$), este numită *accelerație unghiulară* și pentru reprezentarea ei s-a adoptat o convenție analogă celei folosite în cazul vitezei unghiulare (în fig. 2.22, *a* s-a considerat $\varepsilon > 0$, iar în fig. 2.22, *b*, $\varepsilon < 0$).

Prin semnul ei, corelat cu cel al vitezei unghiulare ω, accelerația unghiulară precizează caracterul accelerat, sau încetinit al mișcării, putîndu-se întîlni următoarele trei situații distincte :

Cazul I : corespunzător condiției :

$$\omega\varepsilon = \omega\dot{\omega} > 0 \tag{2.91}$$

exprimînd creșterea în modul a funcției ω, corespunde unei *mișcări circulare accelerate*, (fig. 2.22, *a*).

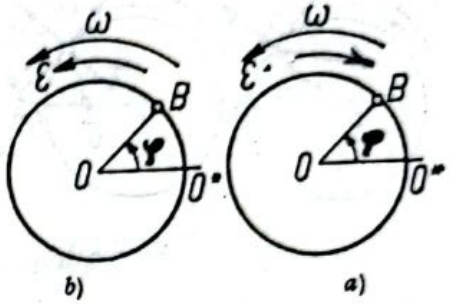


Fig. 2.22.

Cazul II : caracterizat prin condiția

$$\omega\varepsilon = \omega\dot{\omega} < 0 \tag{2.92}$$

exprimînd scăderea în modul a funcției ω, corespunde unei *mișcări circulare încetinite*, (fig. 2.22, *b*).

Cazul III : corespunzător condiției

$$\omega\varepsilon = \omega\dot{\omega} = 0, \tag{2.93}$$

cu singura concluzie acceptabilă fizic ($\omega \neq 0$) :

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 0, \tag{2.94}$$

cu consecința

$$\omega = \omega^\circ = \text{const.}, \tag{2.95}$$

definește o *mișcare circulară uniformă*.

Proiecțiile pe axele polare ale vitezei punctului mobil, calculate cu ajutorul relațiilor (2.83), vor avea expresiile

$$v_\rho = 0\,; \quad v_\varphi = R\omega, \tag{2.96}$$

rezultînd următoarea valoare pentru modulul vitezei :

$$\boxed{|\bar{v}| = R\,|\omega|}. \tag{2.97}$$

Proiecțiile accelerației punctului pe axele polare, date de primele două dintre relațiile (2.86), vor avea în cazul acestei mișcări expresiile concrete

$$a_\rho = -R\omega^2\,; \quad a_\varphi = R\varepsilon, \tag{2.98}$$

conducînd la următoarea valoare a modulului acceleraţiei :

$$\boxed{|\bar{a}| = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \tag{2.99}$$

În fig. 2.23 sînt reprezentate componentele acceleraţiei pentru cele trei cazuri de mişcări circulare, verificîndu-se şi cu acest prilej dependenţa caracterului mişcării de unghiul format de acceleraţia totală cu viteza.

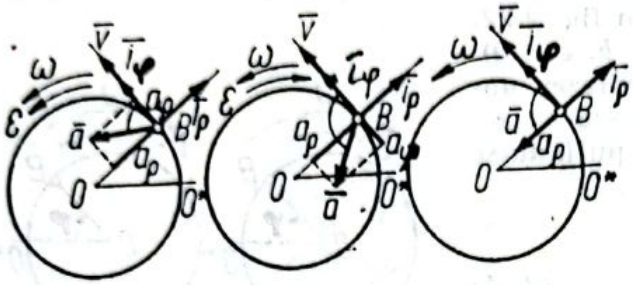


Fig. 2.23.

Mişcările circulare cele mai des întîlnite în aplicaţiile tehnice sînt următoarele două :

a) *Mişcarea circulară uniform variată*, corespunzătoare următoarei forme a ecuaţiei unghiulare finite :

$$\boxed{\varphi = \varphi^\circ + \omega^\circ t + \frac{1}{2}\varepsilon^\circ t^2,} \tag{2.100}$$

— unde φ°, ω° şi ε° sînt constante—, cu consecinţele

$$\boxed{\omega = \dot{\varphi} = \omega^\circ + \varepsilon^\circ t}\ ; \quad \boxed{\varepsilon = \ddot{\varphi} = \varepsilon^\circ}, \tag{2.101}$$

ultimele două relaţii scoţînd în evidenţă următoarele două proprietăţi, care justifică denumirea de mişcare uniform variată :

— variaţia proporţională cu timpul a vitezei unghiulare ;

— mişcare efectuată cu acceleraţie unghiulară constantă.

Făcînd, în relaţiile precedente, timpul t egal cu zero, rezultă următoarele semnificaţii fizice ale constantelor φ°, ω° şi ε° :

$$\varphi(0) = \varphi^\circ\ ;\ \omega(0) = \omega^\circ\ ;\ \varepsilon(0) = \varepsilon^\circ. \tag{2.102}$$

Viteza şi cele două proiecţii pe axele polare ale acceleraţiei vor avea, în cazul acestei mişcări circulare particulare, următoarele expresii

$$\boxed{v = R(\omega^\circ + \varepsilon^\circ t)}, \tag{2.103}$$

respectiv

$$\boxed{a_\rho = -R(\omega^\circ + \varepsilon^\circ t)^2}\ ; \quad \boxed{a_\varphi = R\varepsilon^\circ}. \tag{2.104}$$

Un raţionament identic celui folosit în cazul mişcării rectilinii uniform variate pentru stabilirea caracterului accelerat, sau încetinit, al mişcării va permite să se deosebească şi aici situaţiile :

Cazul I : *mişcarea circulară uniform accelerată*, corespunzătoare condiţiei :

$$\omega^\circ\varepsilon^\circ > 0\ ; \tag{2.105}$$

Cazul II : *mişcarea circulară uniform încetinită*, caracterizată prin condiţia

$$\omega^\circ\varepsilon^\circ < 0\ ; \tag{2.106}$$

Cazul III a: *mișcarea circulară uniform accelerată fără viteză unghiulară inițială*, corespunzătoare condițiilor

$$\omega^\circ = 0\,;\quad \varepsilon^\circ \neq 0\,; \tag{2.107}$$

Cazul III b: *mișcarea circulară uniformă*, caracterizată prin condițiile

$$\omega^\circ \neq 0\,;\quad \varepsilon^\circ = 0, \tag{2.108}$$

pentru care relațiile (2.100) și (2.101) iau formele

$$\boxed{\varphi = \varphi^\circ + \omega^\circ t,} \tag{2.109}$$

respectiv

$$\boxed{\omega = \omega^\circ}\;;\quad \boxed{\varepsilon = 0}, \tag{2.110}$$

evidențiind noi proprietăți ale acestei din urmă mișcări:
- variații ale unghiului polar proporționale cu timpul;
- mișcare efectuată cu viteză unghiulară constantă.

De asemenea, în cazul mișcării uniforme expresiile (2.103) și (2.104) iau formele particulare

$$\boxed{v = R\omega^\circ}, \tag{2.111}$$

respectiv

$$\boxed{a_\rho = -R\omega^{\circ 2}}\;;\quad \boxed{a_\varphi = 0}, \tag{2.112}$$

scoțind în evidență faptul că modulii vitezei și accelerației sînt constanți.

În legătură cu această din urmă mișcare mai trebuie menționat faptul că în lucrările de specialitate mai vechi și în deosebi în cărțile tehnice, în locul vitezei unghiulare se folosește noțiunea de *număr de cicluri pe minut*, n, (numărul de cercuri complete descrise într-un minut); observîndu-se că pentru $t = 60$ s, unghiul total, $\varphi - \varphi^\circ$, descris de mobil este de $2\pi n$ radiani, rezultă următoarea relație între mărimile ω° și n:

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi^\circ}{t} = \frac{2\pi n}{60},$$

adică

$$\boxed{\omega^\circ = \frac{\pi n}{30}}\,. \tag{2.113}$$

b) *Mișcarea circulară oscilatorie armonică*, definită prin următoarea formă a ecuației finite unghiulare:

$$\boxed{\varphi = \Phi \sin (kt + \alpha),} \tag{2.114}$$

cu Φ, k și α constante, primele două obișnuit pozitive.

Se verifică, cu uşurinţă, că mişcarea prezintă caracteristici analoge mişcării rectilinii oscilatorii armonice definită prin ecuaţia (2.68), singura deosebire constînd în faptul că de astă dată punctul mobil se deplasează pe un arc de cerc, în jurul centrului de oscilaţie O^*, între poziţiile extreme B' — corespunzătoare valorii $\varphi' = \Phi$ — şi B'' — corespunzătoare valorii $\varphi'' = -\Phi$, (fig. 2.24).

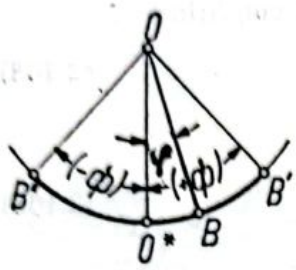


Fig. 2.24.

Constantele Φ, k şi φ vor purta şi aici numele de *amplitudine*, *pulsaţie* şi, respectiv, *fază iniţială*, iar mărimea

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

va reprezenta şi acum *perioada* mişcării.

Se verifică, de asemenea, existenţa şi în cazul acestei mişcări, a celor trei proprietăţi menţionate la mişcarea oscilatorie armonică rectilinie, adică :

- izocronismul oscilaţiilor ;
- tautohronismul oscilaţiilor ;
- proporţionalitatea acceleraţiei unghiulare cu elongaţia :

$$\varepsilon = -k^2\varphi. \tag{2.115}$$

2.2.3. Cinematica punctului cu ecuaţiile finite ale mişcării date în coordonate carteziene:

$$x = x(t)\,;\ y = y(t)\,;\ z = z(t). \tag{2.116}$$

1°. Determinarea traiectoriei. Cazurile posibile de *trasare exactă* a traiectoriei vor fi recunoscute după forma particulară a ecuaţiilor analitice directe ale traiectoriei, obţinute prin eliminarea timpului între ecuaţiile (2.116), aceste ecuaţii avînd formele generale

$$\Phi(x, y, z) = 0\,;\ \psi(x, y, z,) = 0 \tag{2.117}$$

în cazul spaţial şi forma

$$f(x, y) = 0 \tag{2.118}$$

în cazul plan ($z \equiv 0$).

Trasarea aproximativă, folosită şi aici, de regulă, în problemele plane şi în cazurile cînd eliminarea timpului este dificilă (în absenţa

MEC), sau conduce la ecuații analitice complicate, presupune întocmirea și acum a unui tabel prealabil de calcule, de forma

t	t_0	t_1	$t_2 \ldots$	$t_i \ldots$	t_n
x	x_0	x_1	$x_2 \ldots$	$x_i \ldots$	x_n
y	y_0	y_1	$y_2 \ldots$	$y_i \ldots$	y_n
Poziția B	B_0	B_1	$B_1 \ldots$	$B_i \ldots$	B_n

pe baza căruia se vor reprezenta pozițiile succesive $B_i(x_i, y_i)$ ale punctului mobil B, unindu-se apoi prin o curbă continuă aceste puncte (în ipoteza, subînțeleasă ca acceptată, a continuității funcțiilor $x(t)$ și $y(t)$).

2°. **Determinarea vitezei.** Avînd în vedere relația (2.18) de definiție a vitezei și expresia analitică (2.11) a vectorului de poziție, se obține direct *expresia analitică a vitezei în coordonate carteziene* :

$$\boxed{\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}}, \tag{2.119}$$

rezultînd de aici și expresiile proiecțiilor ei pe axele de coordonate carteziene :

$$\boxed{v_x = \bar{v}\bar{i} = \dot{x}\,; \quad v_y = \bar{v}\bar{j} = \dot{y}\,; \quad v_z = \bar{v}\bar{k} = \dot{z}}, \tag{2.120}$$

care vor permite calculul modulului vitezei :

$$\boxed{|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \tag{2.121}$$

și, eventual, și al cosinusurilor ei directoare.

Un procedeu frecvent folosit în practica inginerească pentru determinarea vitezelor unui punct în diferite momente ale mișcării lui plane ($z \equiv 0$), este cel al construcției *hodografului vitezei*, adică, de fapt, al hodografului vectorilor geometrici reprezentativi ai vitezei :

$$\bar{v}^r = \vec{\Omega V}^* = \frac{\bar{v}}{\sigma_v}, \tag{2.122}$$

unde

$$\sigma_v = \frac{q_v}{l_v}\left(\frac{\text{m/s}}{\text{cm}}\right) \tag{2.123}$$

este scara de reprezentare a vitezelor, acest hodograf fiind construit în reperul cartezian $\Omega\xi\eta$, cu axele paralele la axele sistemului de referință Oxy la care este raportată mișcarea punctului (fig. 2.25). Este ușor de observat că ecuațiile parametrice ale acestui hodograf vor avea formele

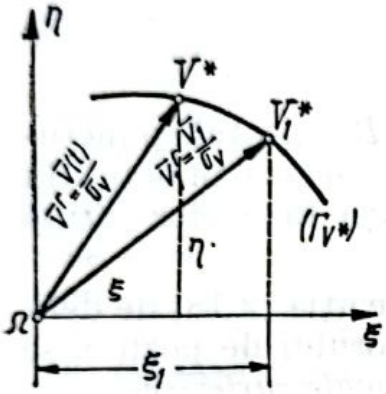


Fig. 2.25.

$$\boxed{\xi = \frac{v_x}{\sigma_v} = \frac{\dot{x}}{\sigma_v} = \xi(t)\,;\quad \eta = \frac{v_y}{\sigma_v} = \frac{\dot{y}}{\sigma_v} = \eta(t),} \tag{2.124}$$

eliminarea timpului între aceste ecuații conducînd la următoarea ecuație analitică directă a sa:

$$f(\xi,\ \eta) = 0. \tag{2.125}$$

Considerîndu-se cunoscut acest hodograf (Γ_v^*), trasat fie exact, cînd este posibil, fie aproximativ, prin puncte, viteza mobilului la un moment t_1, va putea fi obținută calculîndu-se mai întîi coordonatele $\xi_1 = \xi(t_1)$ și $\eta_1 = \eta(t_1)$ ale punctului figurativ V_1^* de pe hodograf corespunzător acestui moment și construindu-se vectorul $\bar{v}_1^{\,r} = \overrightarrow{\Omega V_1^*}$, care va permite determinarea orientării și mărimii vitezei reale $\bar{v}_1 = \bar{v}(t_1)$, în baza cunoscutei relații de reprezentare:

$$\bar{v}_1 = \sigma_v \cdot \bar{v}_1^{\,r}. \tag{2.126}$$

3°. Determinarea accelerației. În baza relației (2.21) de definiție a vitezei și a expresiei (2.119) a vitezei, rezultă direct următoarea *expresie analitică a accelerației în coordonate carteziene*:

$$\boxed{\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}} \tag{2.127}$$

și deci următoarele expresii pentru proiecțiile ei pe axele de coordonate carteziene:

$$\boxed{a_x = \bar{a}\bar{i} = \ddot{x}\,;\ a_y = \bar{a}\bar{j} = \ddot{y}\,;\ a_z = \bar{a}\bar{k} = \ddot{z}}, \tag{2.128}$$

care vor permite determinarea modulului acceleraţiei :

$$|\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}} \tag{2.129}$$

şi, eventual, şi a cosinusurilor ei directoare.

Pentru cazul plan, ($z \equiv 0$), determinarea acceleraţiilor unui punct în diverse momente ale mişcării lui mai poate fi făcută şi prin trasarea *hodografului acceleraţiei* adică hodograful vectorilor geometrici reprezentativi ai acceleraţiei :

$$\bar{a}^r = \overrightarrow{\Omega^* A^*} = \frac{\bar{a}}{\sigma_a} \tag{2.130}$$

unde

$$\sigma_a = \frac{q_a}{l_a}\left(\frac{\text{m/s}^2}{\text{cm}}\right) \tag{2.131}$$

este scara de reprezentare a ei, construcţia acestui hodograf (Γ_A^*) efectuîndu-se în reperul $\Omega^*\xi^*\eta^*$, cu axele de asemenea paralele la axele reperului cartezian la care este raportată mişcarea punctului, (fig. 2.26); ecuaţiile parametrice ale acestui hodograf vor avea acum formele

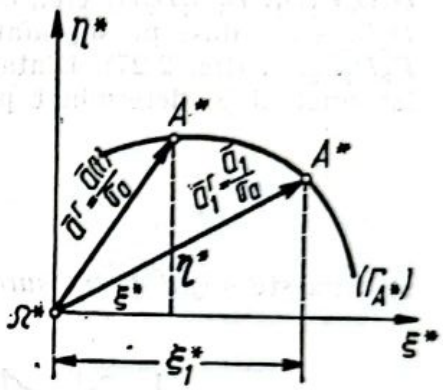


Fig. 2.26.

$$\xi^* = \frac{a_x}{\sigma_a} = \frac{\ddot{x}}{\sigma_a} = \xi^*(t): \quad \eta^* = \frac{a_y}{\sigma_a} = \frac{\ddot{y}}{\sigma_a} = \eta^*(t), \tag{2.132}$$

iar ecuaţia analitică directă, obţinută prin eliminarea timpului între relaţiile precedente, va avea forma

$$f(\xi^*, \eta^*) = 0. \tag{2.133}$$

Considerîndu-se trasat, prin unul din procedeele cunoscute, hodograful (Γ_A^*) al acceleraţiei, se va putea determina cu ajutorul lui orientarea şi mărimea acceleraţiei corespunzătoare oricărui moment t_1 din intervalul pentru care a fost trasat hodograful, calculîndu-se şi acum coordonatele $\xi_1^* = \xi^*(t_1)$ şi $\eta_1^* = \eta^*(t_1)$ ale punctului figura-

tiv A_1^* de pe hodograf și unind apoi polul Ω^* cu punctul A_1^* prin vectorul $\bar{a}_1' = \overrightarrow{\Omega^* A_1^*}$ care va reprezenta accelerația punctului la momentul t_1 în baza relației de reprezentare

$$\bar{a}_1 = \sigma_a \cdot \bar{a}_1'. \tag{2.134}$$

4°. Aplicație : mișcarea punctului pe o elice de pas constant.

Se numește *elice* de *pas constant* curba continuă pe care o formează, după reînfășurare pe cilindrul de rază R, diagonalele D_0D_1, D_1D_2, D_2D_3 etc. din dreptunghiurile $D_0D_0D_1D_1$, $D_1D_1D_2D_2$ etc., construite cu ajutorul paralelelor echidistante D_0D_0, D_1D_1, D_2D_2 etc., duse pe suprafața desfășurată a cilindrului drept tăiat după generatoarea $D_0D_1D_2$,..., (fig. 2.27). Diatanța h dintre paralelele echidistante se numește *pasul elicei*, iar unghiul β, determinat prin relația

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{2\pi R}, \tag{2.135}$$

se numește *unghi de înfășurare a elicei*.

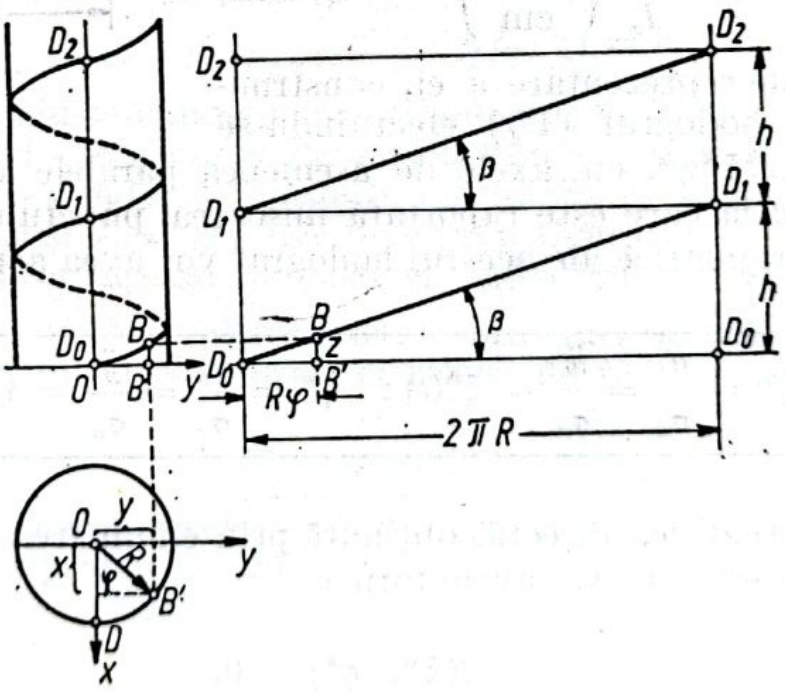


Fig. 2.27.

Alegînd reperul cartezian ca în fig. 2.27, rezultă imediat următoarele *ecuații finite, în coordonate carteziene, ale mișcării punctului pe elicea de pas constant* :

$$x = R\cos\varphi(t)\,;\quad y = R\sin\varphi\,(t)\,;\quad z = R\operatorname{tg}\beta\cdot\varphi(t) = \frac{h}{2\pi}\,\varphi(t), \tag{2.136}$$

$\varphi(t)$ fiind o funcție cunoscută de timp, exprimînd unghiul format cu axa Ox de raza OB', aceasta din urmă reprezentînd proiecția ortogonală pe planul cercului de bază al cilindrului a vectorului de poziție al punctului mobil B (fig. 2.27).

Proiecțiile pe axele de coordonate carteziene ale vitezei punctului în această mișcare vor avea expresiile

$$v_x = \dot{x} = -R\dot{\varphi}\sin\varphi\,; \quad v_y = \dot{y} = R\dot{\varphi}\cos\varphi\,; \quad v_z = \dot{z} = R\,\mathrm{tg}\beta\cdot\dot{\varphi} = \frac{h}{2\pi}\dot{\varphi}, \tag{2.137}$$

rezultînd de aici următoarele expresii pentru modulul ei:

$$\boxed{|\bar{v}| = \frac{R|\dot{\varphi}|}{\cos\beta} = |\dot{\varphi}|\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\,,} \tag{2.138}$$

prima expresie fiind folosită în cazul cînd elicea este determinată prin rază și unghi de înfășurare, iar ultima în cazul cînd determinarea elicei se face prin rază și pas.

De asemenea, se pot scrie următoarele expresii ale proiecțiilor pe axele de coordonate carteziene ale accelerației:

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = -R\ddot{\varphi}\sin\varphi - R\dot{\varphi}^2\cos\varphi\,; \quad a_y = \ddot{y} = R\ddot{\varphi}\cos\varphi - R\dot{\varphi}^2\sin\varphi\,; \\ a_z = \ddot{z} = R\,\mathrm{tg}\beta\cdot\ddot{\varphi} = \dfrac{h}{2\pi}\ddot{\varphi}, \end{cases} \tag{2.139}$$

care vor permite calculul modulului accelerației

$$\boxed{|\bar{a}| = R\sqrt{\frac{\ddot{\varphi}^2}{\cos^2\beta} + \dot{\varphi}^4} = \sqrt{R^2(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4) + \frac{h^2}{4\pi^2}\ddot{\varphi}^2}\,,} \tag{2.140}$$

prima expresie fiind folosită în cazul cînd elicea este determinată prin rază și unghi de înfășurare, iar ultima atunci cînd elicea este determinată prin rază și pas.

Egalînd prima dintre expresiile (2.140) ale modulului accelerației totale cu expresia acestui modul corespunzătoare proiecțiilor pe axele intrinseci ale accelerației

$$|\bar{a}| = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho_c^2}} = \sqrt{\frac{R^2\ddot{\varphi}^2}{\cos^2\beta} + \frac{R^4\dot{\varphi}^4}{\rho_c^2\cos^4\beta}}\,,$$

rezultă, după simplificări și reduceri, următoarea expresie a razei de curbură a elicei de pas constant:

$$\boxed{\rho_c = \frac{R}{\cos^2\beta}\,.} \tag{2.141}$$

Scanned with CamScanner

În cazul cînd funcția $\varphi(t)$ are forma particulară

$$\boxed{\varphi = kt + \alpha}, \tag{2.142}$$

$k>0$ și α fiind constante, mișcarea punctului este numită *mișcare uniformă pe elicea de pas constant*, ea fiind caracterizată, în condițiile precizate ($\dot{\varphi} = k$; $\ddot{\varphi} = 0$), prin:

— viteză de modul constant:

$$\boxed{|\bar{v}| = \frac{Rk}{\cos\beta}}; \tag{2.143}$$

— accelerație de modul constant:

$$\boxed{|\bar{a}| = Rk^2} \tag{2.144}$$

și orientată în permanență după normala la axa elicei și spre axă, așa cum rezultă din șirul de relații de mai jos

$$\bar{a} = -k^2[R\cos\varphi\bar{i} + R\sin\varphi\bar{j}] = -k^2(x\bar{i} + y\bar{j}) = -k^2[\bar{r} - z\bar{k}] = -k^2\bar{r}_n,$$

$\bar{r}_n$ fiind componenta normală la axa elicei a vectorului de poziție al punctului mobil în raport cu originea axelor de coordonate carteziene considerate (fig. 2.28).

2.2.4. Cinematica punctului cu ecuația finită dată sub forma vectorială:

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{2.145}$$

1°. **Determinarea traiectoriei.** *Trasarea exactă* a traiectoriei va fi posibilă și în acest caz numai pentru unele curbe simple, ușor

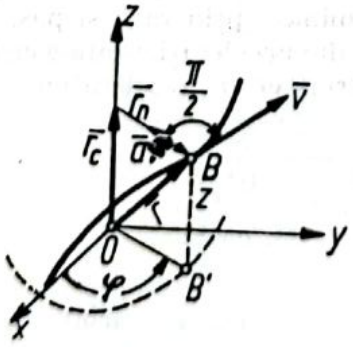


Fig. 2.28.

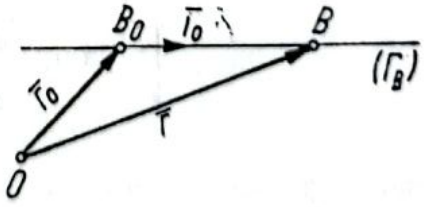


Fig. 2.29.

de recunoscut după forma particulară a ecuației (2.145), cum este, de exemplu, cea a mișcării rectilinii pe o dreaptă ce trece printr-un

punct $B_0(\bar{r}_0)$ și cu orientarea determinată prin versorul $\bar{i}^\circ$, (fig. 2.29) :

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + f(t) \cdot \bar{i}^\circ, \tag{2.146}$$

sau cea a mișcării pe o parabolă determinată prin ecuația

$$\bar{r} = \bar{v}^\circ t + \frac{1}{2}\bar{a}^\circ t^2, \tag{2.147}$$

unde $\bar{v}^\circ$ și $\bar{a}^\circ$ sînt vectori constanți, necoliniari, reprezentînd viteza inițială și accelerația inițială a punctului mobil.

În cele mai multe situații se va recurge însă la *trasarea aproximativă* prin puncte, unindu-se printr-o curbă continuă — în ipoteza continuității funcției vectoriale $\bar{r}(t)$ — pozițiile succesive $B_i[\bar{r}_i = \bar{r}(t_i)]$ ale mobilului, corespunzătoare momentelor t_i, $(i = 0, 1, 2..., n)$, (fig. 2.30).

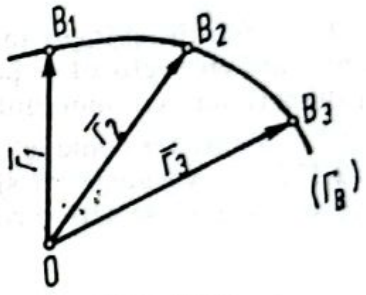


Fig. 2.30.

2°. **Determinarea vitezei.** Expresia vectorială a vitezei va rezulta chiar din relația de definiție a ei, adică

$$\boxed{\bar{v} = \dot{\bar{r}}}, \tag{2.148}$$

pentru cazurile particulare (2.146) și (2.147) de mișcări rezultînd expresiile concrete

$$\bar{v} = \dot{f}(t)\bar{i}^\circ \text{ respectiv : } \bar{v} = \bar{v}^\circ + \bar{a}^\circ t. \tag{2.149}$$

3°. **Determinarea accelerației**

În baza relației de definiție a accelerației, se va scrie direct :

$$\boxed{\bar{a} = \ddot{\bar{r}}}, \tag{2.150}$$

pentru cele două mișcări particulare menționate mai sus, rezultînd următoarele expresii concrete :

$$\bar{a} = \ddot{f}(t)\bar{i}^\circ, \text{ respectiv : } \bar{a} = \bar{a}^\circ. \tag{2.151}$$

Scanned with CamScanner

5°. Aplicație: Mișcarea periodică a punctului pe elipsă

Este vorba de o mișcare definită prin următoarea ecuație:

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_1\cos(kt) + \bar{r}_2\sin(kt),} \tag{2.152}$$

cu vectorii $\bar{r}_1$ și $\bar{r}_2$ constanți și cu k o constantă scalară.

Prin derivări în raport cu timpul a ecuației precedente se obțin expresiile vitezei

$$\boxed{\bar{v} = k[-\bar{r}_1\sin(kt) + \bar{r}_2\cos(kt)]}, \tag{2.153}$$

respectiv accelerației

$$\boxed{\bar{a} = -k^2(\bar{r}_1\cos(kt) + \bar{r}_2\sin(kt)] = -k^2\bar{r}}, \tag{2.154}$$

ultima relație evidențiind faptul că în această mișcare accelerația este în permanență coliniară cu vectorul de poziție, este orientată în sens contrar acestui vector și are modulul proporțional cu modulul vectorului de poziție.

Pentru a demonstra forma eliptică a traiectoriei mobilului în mișcare după ecuația (2.152), se va alege un sistem cartezian ortogonal de referință ca în fig. 2.31, fapt care va permite să se scrie următoarele expresii analitice ale vectorilor $\bar{r}_1$ și $\bar{r}_2$:

$$\bar{r}_1 = a_1\bar{i}\,;\ \bar{r}_2 = a_2\bar{i} + b_2\bar{j}, \tag{2.155}$$

a_1, a_2 și b_2 fiind proiecțiile lor pe axele considerate.

În consecință, proiectînd ecuația (2.152) pe axele reperului ales, rezultă următoarele ecuații parametrice echivalente:

$$\begin{cases} x = a_1\cos(kt) + a_2\sin(kt)\,; \\ y = b_2\sin(kt). \end{cases} \tag{2.156}$$

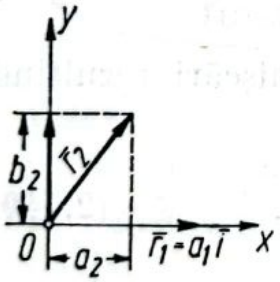


Fig. 2.31.

Eliminarea timpului între aceste ecuații conduce la ecuația unei conice

$$\frac{1}{a_1^2}x^2 - 2\frac{a_2}{a_1^2 b_2}xy + \left(\frac{1}{b_2^2} + \frac{b_2^2}{a_1^2 b_2^2}\right)y^2 - 1 = 0, \tag{2.157}$$

cu discriminantul având valoarea

$$\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{1}{a_1^2 b_2^2} > 0, \tag{2.158}$$

care justifică forma de elipsă, cu centrul în origine, a traiectoriei analizate.

Se poate arăta că vectorii $\bar{r}_1$ și $\bar{r}_2$ determină doi diametri conjugați ai acestei elipse. Într-adevăr, scriind expresiile vectorilor de poziție și ale vitezelor la momentele $t_0 = 0$ și $t_1 = \dfrac{\pi}{2k}$, rezultă valorile

$$\bar{r}(0) = \bar{r}_1\,;\ \bar{v}(0) = k\bar{r}_2, \tag{2.159}$$

respectiv

$$\bar{r}(t_1) = \bar{r}_2\,; \qquad \bar{v}(t_1) = -k\bar{r}_1, \tag{2.160}$$

care dovedesc că tangenta în punctul $B_0(\bar{r}_1)$ este paralelă la diametrul ce trece prin punctul $B_1(\bar{r}_2)$, iar tangenta în B_1 este paralelă la diametrul ce trece prin B_0 (fig. 2.32).

În cazul cînd vectorii $\bar{r}_1$ și $\bar{r}_2$ sînt ortogonali și de moduli egali, elipsa devine cerc.

În fine, în cazul cînd vectorii $\bar{r}_1$ și $\bar{r}_2$ sînt coliniari, ecuația (2.152) determină o mișcare rectilinie oscilatorie armonică. Într-adevăr, notînd cu $\bar{i}_r$ versorul comun al vectorilor $\bar{r}_1$ și $\bar{r}_2$, ecuația (2.152) va putea fi scrisă sub forma

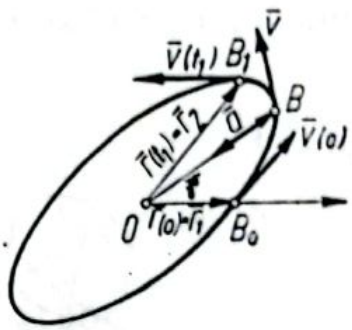


Fig. 2.32.

$$\bar{r} = r_2\left[\frac{r_1}{r_2}\cos(kt) + \sin(kt)\right]\bar{i}_r,$$

sau încă, introducînd notația

$$\frac{r_1}{r_2} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \text{ cu: } \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}{r_2},$$

mai rezultă:

$$\bar{r} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}\,\sin\,(kt + \alpha)\bar{i}_r, \tag{2.161}$$

aceasta fiind ecuația unei mișcări oscilatorii armonice de aplitudine $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$, de pulsație k și de fază inițială α.

§ 3. Cinematica mișcării absolute generale a rigidului

3.1. *Parametrii de poziție ai rigidului în mișcare generală*

3.1.1. Definirea parametrilor de poziție ai unui rigid în mișcare generală

Deoarece problemele fundamentale ale cinematicii rigidului se reduc, în cele din urmă, tot la cele ale cinematicii punctului — și aici va fi vorba tot de determinarea traiectoriei, vitezei și accelerației unui punct arbitrar, B, al rigidului—, o primă problemă care va trebui rezolvată în cinematica rigidului este aceea a precizării poziției punctului B în solid, precizare care implică raportarea acestui punct la un reper $Qx'y'z'$, sau $(\mathscr{R}')$, invariabil legat de rigid și în mișcare odată cu acesta, această poziție fiind determinată fie prin coordo-

natele constante x', y', z', (fig. 3.1), fie prin vectorul de poziție $\bar{r}'$, de modul constant și avînd expresia analitică

$$\bar{r}' = \vec{QB} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}'. \tag{3.1}$$

unde $\bar{i}'$, $\bar{j}'$ și $\bar{k}'$ sînt versorii axelor Qx', Qy' și, respectiv, Qz'.

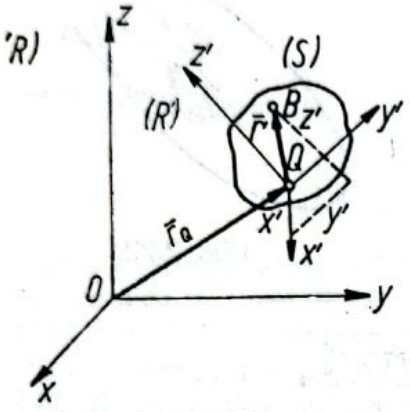


Fig. 3.1.

Prin introducerea acestui nou reper, studiul mișcării generale a rigidului se reduce la studiul mișcării reperului $(\mathscr{R}')$ în raport cu reperul fix $(\mathscr{R})$, poziția în spațiu, la un moment dat, a primului reper fiind determinată în raport cu cel de-al doilea prin cele trei coordonate — x_Q, y_Q și z_Q — ale originii Q, aceste coordonate reprezentînd proiecțiile pe axele reperului fix ale vectorului de poziție

$$\bar{r}_Q = x_Q\bar{i} + y_Q\bar{j} + z_Q\bar{k}, \tag{3.2}$$

precum și printr-un număr de 3 dintre cele nouă cosinusuri directoare ale axelor reperului $(\mathscr{R}')$ în raport cu axele fixe, cosinusuri notate cu simbolurile indicate fie în notația tabelară, fie în cea matriceală, de mai jos :

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}'$	α_{xx}	α_{xy}	α_{xz}
$\bar{j}'$	α_{yx}	α_{yy}	α_{yz}
$\bar{k}'$	α_{zx}	α_{zy}	α_{zz}

, respectiv : $\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{Vmatrix}$. (3.3)

Faptul că numai trei dintre aceste nouă cosinusuri directoare sînt independente, este consecința relațiilor evidente :

$$\begin{aligned}
&\bar{i}'\bar{i}' = \alpha_{xx}^2 + \alpha_{xy}^2 + \alpha_{xz}^2 = 1; \quad \bar{i}'\bar{j}' = \alpha_{xx}\alpha_{yx} + \alpha_{xy}\alpha_{yy} + \alpha_{xz}\alpha_{yz} = 0; \\
&\bar{j}'\bar{j}' = \alpha_{yx}^2 + \alpha_{yy}^2 + \alpha_{xz}^2 = 1; \quad \bar{j}'\bar{k}' = \alpha_{yx}\alpha_{zx} + \alpha_{yy}\alpha_{zy} + \alpha_{yz}\alpha_{zz} = 0; \\
&\bar{k}'\bar{k}' = \alpha_{zx}^2 + \alpha_{zy}^2 + \alpha_{zz}^2 = 1; \quad \bar{k}'\bar{i}' = \alpha_{zx}\alpha_{xx} + \alpha_{zy}\alpha_{xy} + \alpha_{zz}\alpha_{xz} = 0,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

existente între ele prin orientarea triortogonală a axelor reperului $(\mathscr{R}')$.

Scanned with CamScanner

Deși în rezolvarea problemelor de cinematica rigidului vor fi utilizate peste tot cosinusurile directoare, totuși ele nu vor fi folosite direct pentru determinarea orientărilor axelor reperului $(\mathscr{R}')$ — ceea ce ar presupune rezolvarea, în prealabil, a sistemului de ecuații (3.4) — ci prin intermediul unui număr de trei unghiuri, numite *unghiurile lui Euler*, care precizează direct orientările axelor Qx', Qy' și Qz' față de un nou reper $(\mathscr{R}^*) \equiv Qx^*y^*z^*$, (fig. 3.2), cu axele paralele la axele reperului fix; intersecția planelor de coordonate $Qx'y'$ și Qx^*y^* este o dreaptă QN, numită *linia nodurilor*, pe care se alege un sens pozitiv indicat printr-un versor $\bar{n}$, numit *versorul liniei nodurilor*.

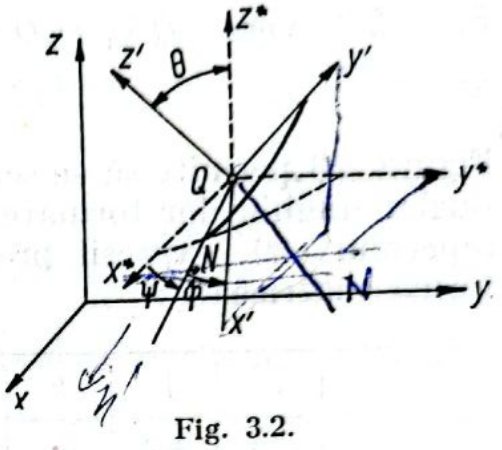


Fig. 3.2.

Cele trei unghiuri ale lui Euler sînt:

— *unghiul de precesie*, ψ, format de linia nodurilor cu axa Qx^*, considerat pozitiv, sau negativ, după cum, privit dinspre sensul pozitiv al axei Qz^* — normală la planul unghiului ψ —, este descris în sens direct (antiorar), sau în sens invers (orar);

— *unghiul de rotație proprie*, φ, format de axa Qx' cu linia nodurilor, considerat pozitiv, sau negativ, după cum, privit dinspre sensul pozitiv al axei Qz' — normală la planul unghiului φ —, este descris în sens direct, sau în sens invers;

— *unghiul de nutație*, θ, format de axa Qz' cu axa Qz^*, considerat pozitiv, sau negativ, după cum, privit dinspre sensul pozitiv al liniei nodurilor — normală la planul unghiului θ —, este descris în sens direct, sau în sens invers.

Mărimile $x_Q, y_Q, z_Q, \psi, \varphi$ și θ, care determină complet poziția reperului $(\mathscr{R}')$ în raport cu reperul fix, poartă numele de *parametri de poziție* ai reperului $(\mathscr{R}')$ și deci și ai rigidului (S); în cazul mișcării acestuia din urmă în raport cu reperul fix, acești parametri de poziție vor fi funcții de timp, relațiile

$$\begin{array}{ll} x_Q = x_Q(t); & \psi = \psi(t); \\ y_Q = y_Q(t); & \varphi = \varphi(t); \\ z_Q = z_Q(t); & \theta = \theta(t)t, \end{array} \tag{3.5}$$

purtînd numele de *ecuațiile finite ale mișcării rigidului.*

În continuare, se vor stabili expresiile celor 9 cosinusuri directoare ca funcţiuni de unghiurile lui Euler, în care scop vor mai fi construite următoarele două repere triortogonale auxiliare:

Reperul $(\mathscr{R}_n) \equiv QN_1N_2N_3$ (fig. 3.3), cu sensurile pozitive ale axelor determinate prin versorii

$$\bar{n}_1 = \bar{n} = \text{vers}\ \ (QN_1 \equiv QN);\ \ \bar{n}_3 = \bar{k} = \text{vers}\ \ (QN_3 \equiv Qz^*);\ \ \bar{n}_2 = \bar{n}_3 \times \bar{n}_1 = \text{vers}\ \ (QN_2). \tag{3.6}$$

Figura 3.3 permite să se scrie direct următoarele expresii ale cosinusurilor unghiurilor formate de axele acestui reper auxiliar cu axele reperului $(\mathscr{R})$, expresii prezentate fie sub formă tabelară, fie sub formă matriceală:

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{n}_1$	$\cos\psi$	$\sin\psi$	0
$\bar{n}_2$	$-\sin\psi$	$\cos\psi$	0
$\bar{n}_3$	0	0	1

respectiv:

$$\Psi = \begin{Vmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{3.7}$$

Rezultă de aici următoarele expresii analitice ale versorilor axelor fixe în raport cu reperul $(\mathscr{R}_n)$:

$$\bar{i} = \cos\psi\bar{n}_1 - \sin\psi\bar{n}_2;\ \bar{j} = \sin\psi\bar{n}_1 + \cos\psi\bar{n}_2;\ \bar{k}_3 = \bar{n}_3; \tag{3.8}$$

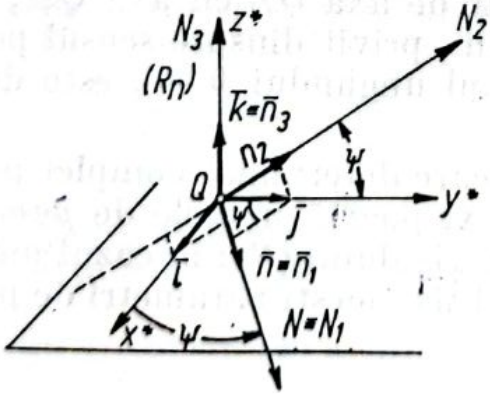


Fig. 3.3.

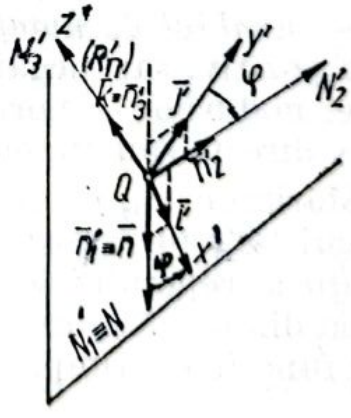


Fig. 3.4.

Reperul $(\mathscr{R}'_n) = QN'_1N'_2N'_3$, (fig. 3.4), cu sensurile pozitive ale axelor lui determinate prin versorii:

$$\bar{n}'_1 = \bar{n} = \text{vers}(QN'_1 \equiv QN);\ \ \bar{n}'_3 = \bar{k}' = \text{vers}\ \ (QN'_3 \equiv Qz');\ \ \bar{n}'_2 = \bar{n}'_3 \times \bar{n}'_1 = \text{vers}\ \ (QN'_2). \tag{3.9}$$

Cosinusurile unghiurilor formate de axele acestui din urmă reper auxiliar cu axele reperului ($\mathscr{R}$) au expresiile date în tabelul, respectiv matricea, prezentate mai jos :

	$\bar{n}'_1$	$\bar{n}'_2$	$\bar{n}'_3$
$\bar{i}'$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
$\bar{j}'$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\bar{k}'$	0	0	1

respectiv : $$\Phi = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad (3.10)$$

ele permiţînd exprimarea analitică a versorilor axelor reperului ($\mathscr{R}'$) în raport cu reperul ($\mathscr{R}'_n$) :

$$\bar{i}' = \cos\varphi \cdot \bar{n}'_1 + \sin\varphi \cdot \bar{n}'_2 ; \; \bar{j}' = -\sin\varphi \cdot \bar{n}'_1 + \cos\varphi \cdot \bar{n}'_2 ; \; \bar{k}' = \bar{n}'_3. \quad (3.11)$$

Examinînd şi planul normal la linia nodurilor, care conţine axele $Qz' \equiv QN'_3$ şi $Qz^* \equiv QN_3$ (fig. 3.5), şi în care se vor găsi deci şi axele QN_2 şi QN'_2, se mai pot stabili şi expresiile cosinusurilor directoare ale axelor reperului ($\mathscr{R}'_n$) în raport cu reperul ($\mathscr{R}_n$), aceste expresii fiind date, de asemenea, sub formă tabelară şi sub formă matricială :

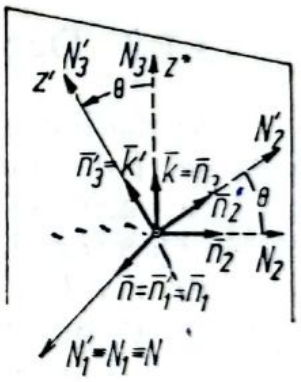


Fig. 3.5.

	$\bar{n}_1$	$\bar{n}_2$	$\bar{n}_3$
$\bar{n}'_1$	1	0	0
$\bar{n}'_2$	0	$\cos\theta$	$\sin\theta$
$\bar{n}'_3$	0	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

, respectiv : $$\Theta = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}. \quad (3.12)$$

Relaţiile (3.8) şi (3.11) vor permite, ţinînd seama şi de tabelul 3.12, să se stabilească *expresiile cosinusurilor directoare ale rigidului în funcţie de unghiurile lui Euler* :

$$\alpha_{xx}=\bar{i}'\bar{i}=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta;\quad \alpha_{yx}=\bar{j}'\bar{i}=-\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi\cos\theta;$$
$$\alpha_{xy}=\bar{i}'\bar{j}=\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\theta;\quad \alpha_{yy}=\bar{j}'\bar{j}=-\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta;$$
$$\alpha_{xz}=\bar{i}'\bar{k}=\sin\varphi\sin\theta;\qquad \alpha_{yz}=\bar{j}'\bar{k}=\cos\varphi\sin\theta; \tag{3.13}$$
$$\alpha_{zx}=\bar{k}'\bar{i}=\sin\psi\sin\theta;$$
$$\alpha_{zy}=\bar{k}'\bar{j}=-\cos\psi\sin\theta;$$
$$\alpha_{zz}=\bar{k}'\bar{k}=\cos\theta.$$

Se poate verifica cu ușurință că formele (3.13) pot fi obținute cu ajutorul următorului produs al matricelor înlănțuite definite în cadrul acestui subpunct* :

$$\boxed{\mathbf{A}=\mathbf{\Phi\Theta\Psi}}. \tag{3.14}$$

3.1.3. Deplasările elementare generale ale rigidului

Variațiile elementare dx_Q, dy_Q, dz_Q, $d\psi$, $d\varphi$ și $d\theta$ ale celor 6 parametri de poziție ai unui rigid în mișcare generală, corespunzătoare variației elementare dt a timpului, permit definirea a două mărimi vectoriale elementare, purtînd numele de *deplasări elementare ale rigidului*, acestea fiind :

1°. Vectorul translație elementară a rigidului În cazul cînd dintre cei 6 parametri de poziție ai rigidului variază în timp numai coordonatele polului Q invariabil legat de solid, unghiurile lui Euler rămînînd constante, variațiile elementare dx_Q, dy_Q și dz_Q ale acestor coordonate definesc un vector elementar :

$$d\bar{r}_Q=dx_Q\bar{i}+dy_Q\bar{j}+dz_Q\bar{k}, \tag{3.15}$$

avînd semnificația matematică de diferențială a vectorului de poziție $\bar{r}_Q$ și numit *vector translație elementară a rigidului*.

Este ușor de înțeles că în cazul unei asemenea deplasări elementare vectorul de poziție $\bar{r}'=\vec{QB}$, al unui punct B, arbitrar, al rigidului în raport cu polul Q, nu-și va modifica nici modulul — ca urmare a ipotezei de rigiditate — și nici orientarea — ca urmare a

* În notațiile adoptate pentru consinusurile directoare, primul indice va desemna axa din reperul ($\mathscr{R}'$), iar al doilea indice axa din reperul fix ($\mathscr{R}$).

menținerii unghiurilor lui Euler constante—, rezultînd de aici condiția

$$d\bar{r}' = 0, \tag{3.16}$$

valabilă și pentru vectorii de poziție ai punctelor A'_0, B'_0 și C'_0, situate pe axele reperului $(\mathscr{R}')$ la distanța egală cu unitatea de polul Q și deci și pentru versorii axelor reperului $(\mathscr{R}')$, (fig. 3.6):

$$d\bar{i}' = 0\,; \quad d\bar{j}' = 0\,; \quad d\bar{k}' = 0. \tag{3.17}$$

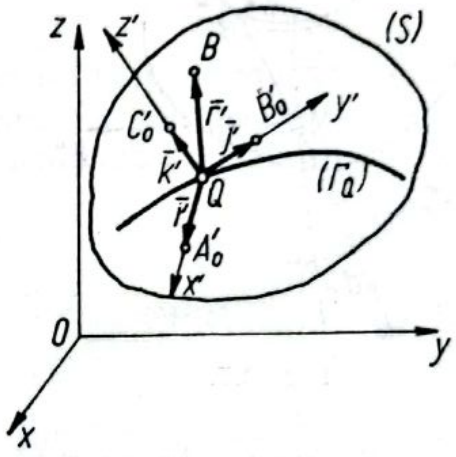


Fig. 3.6.

30 2°. **Vectorul rotație elementară instantanee a rigidului.** În ipoteza că cele trei coordonate ale polului Q rămîn constante și variază numai unghiurile lui Euler, vor fi analizate următoarele două situații distincte:

— variază numai unul singur dintre unghiurile lui Euler, celelalte două rămînînd constante:

— variază simultan toate trei unghiurile lui Euler.

a) *Vectorii rotații elementare corespunzători variației unuia singur dintre unghiurile lui Euler.*

Se va arăta mai întîi că în cazul cînd dintre toți parametrii de poziție variază numai unul singur dintre unghiurile lui Euler, punctele rigidului descriu arce de cercuri situate în plane paralele la planul unghiului lui Euler variabil și cu centrele situate pe normala în polul Q la planul unghiului variabil. Din acest motiv, variația elementară a unghiului lui Euler considerat variabil este numită *deplasare elementară la rotația în jurul normalei la planul unghiului Euler variabil* și este reprezentată convențional în mecanică printr-un *vector rotație elementară*, avînd ca suport axa de rotație (normala în polul Q la planul unghiului Euler variabil) și sensul astfel ales încît să verifice, corelat cu sensul de variație a unghiului Euler considerat, regula burghiului drept. Un asemenea vector va indica deci nu numai axa în jurul căreia se efectuează rotația, ci și sensul în care se produce variația unghiului Euler.

Vor trebui examinate, în consecință, următoarele situații:

Cazul I: singurul parametru de poziție variabil în timp este unghiul de precesie:

$$\psi = \psi(t). \tag{3.18}$$

Considerînd un punct arbitrar $B(\bar{r}')$ al rigidului (S), (fig. 3.7), se găseşte următoarea valoarea pentru cosinusul unghiului format de acest vector cu axa Qz^*, fixă în spaţiu în aceste condiţii :

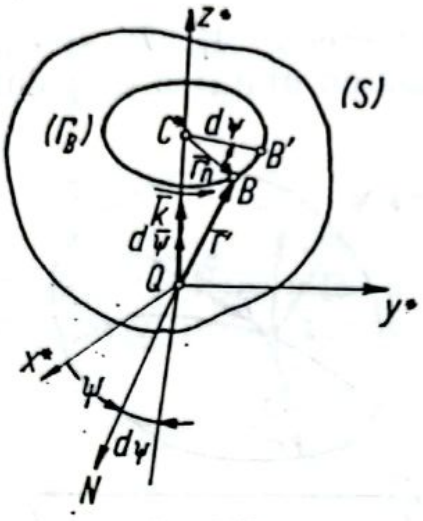


Fig. 3.7.

$$\cos(\bar{r}', \bar{k}) = \frac{\bar{r}'\bar{k}}{|\bar{r}'|} = \frac{x'\alpha_{xz} + y'\alpha_{yz} + z'\alpha_{zz}}{|\bar{r}'|} = \text{const}, \tag{3.19}$$

cu consecinţa directă

$$|\bar{r}'_n| = |\overrightarrow{C^*B}| = \text{const}, \tag{3.20}$$

unde $\bar{r}'_n$ este componenta normală la axa Qz^* a vectorului $\bar{r}'$, ultima relaţie scoţînd în evidenţă faptul că locul geometric al poziţiilor punctului B, la variaţia unghiului de precesie, este cercul (Γ_B), normal la axa Qz^* şi cu centrul C^* pe această axă, (fig. 3.7).

Se spune, în această situaţie, că rigidul (S) execută, la variaţia $d\psi$ a unghiului de precesie, *o rotaţie elementară în jurul axei* Qz^*, determinată prin *vectorul rotaţie elementară de precesie*, definit prin relaţia

$$d\bar{\psi} = d\psi \cdot \bar{k}. \tag{3.21}$$

Cazul II : *singurul parametru de poziţie variabil în timp este unghiul de rotaţie proprie* :

$$\varphi = \varphi(t). \tag{3.22}$$

Observînd, pe de o parte, că în aceste condiţii axa Qz' rămîne fixă în spaţiu ($\psi = \text{const}$; $\theta = \text{const}$) şi, pe de altă parte, poate fi scrisă relaţia

$$\cos(\bar{r}', \bar{k}') = \text{const}, \tag{3.23}$$

ca urmare a ipotezei rigidităţii, se poate trage concluzia că locul geometric al poziţiilor punctului $B(\bar{r}')$ la deplasarea provocată de variaţia unghiului φ este cercul (Γ_B), (fig. 3.8), normal la axa Qz' şi cu centrul C^* situat pe această axă.

Se va spune, în consecinţă, că la variaţia $d\varphi$ a unghiului de rotaţie proprie, rigidul execută *o rotaţie elementară în jurul axei* Qz',

determinată prin *vectorul rotaţie elementară proprie* definit prin relaţia

$$\mathrm{d}\bar{\varphi} = \mathrm{d}\varphi \cdot \bar{k}'. \tag{3.24}$$

Cazul III : *singurul parametru de poziţie variabil în timp este unghiul de nutaţie* :

$$\theta = \theta(t). \tag{3.25}$$

Remarcînd mai întîi faptul că, în condiţiile acestei delasări, linia nodurilor rămîne fixă în spaţiu şi apoi că vectorul de poziţie $\bar{r}'$ al unui punct arbitrar $B(\bar{r}')$ al rigidului formează cu linia nodurilor un unghi constant, conform relaţiei

$$\cos\,(\bar{r}', \bar{n}) = \frac{\bar{r}'\bar{n}}{|\bar{r}'|} = \frac{x'\cos\varphi - y'\sin\varphi}{|\bar{r}'|} = \text{const}, \tag{3.26}$$

se poate trage şi de astă dată concluzia că locul geometric al poziţiilor punctului B, la variaţia unghiului de nutaţie, este cercul (Γ_B), normal la linia nodurilor şi cu centrul pe această linie (fig. 3.9).

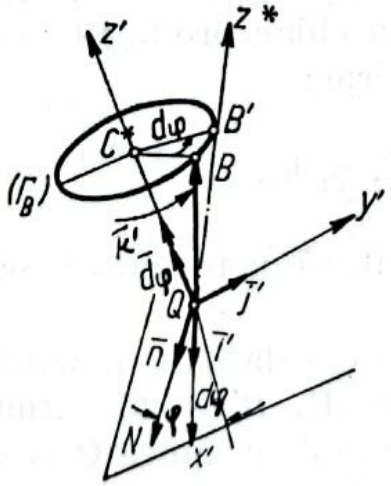


Fig. 3.8.

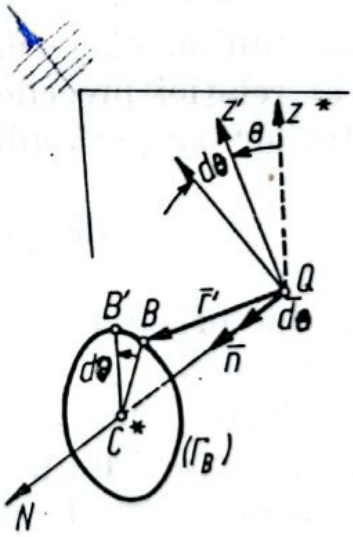


Fig. 3.9.

Se va spune şi acum că la variaţia elementară $\mathrm{d}\theta$ a unghiului de nutaţie, rigidul execută *o rotaţie elementară în jurul liniei nodurilor*, determinată prin *vectorul rotaţie elementară de nutaţie* definit prin relaţia

$$\mathrm{d}\bar{\theta} = \mathrm{d}\theta \cdot \bar{n}. \tag{3.27}$$

Scanned with CamScanner

Rămîne, în continuare, să se stabilească expresia variației $d\bar{r}'$ a vectorului de poziție $\bar{r}'$ al unui punct arbitrar $B(\bar{r}')$ al rigidului, la variația elementară a unuia singur dintre cele trei unghiuri ale lui Euler. Pentru a nu repeta de trei ori aceeași demonstrație, se va nota cu χ unul, oricare, dintre unghiurile lui Euler și cu $\Delta\bar{\chi} = \Delta\chi \bar{i}_\chi$ vectorul rotație corespunzător unui interval de timp $\Delta t = t' - t$ (fig. 3.10), $\bar{i}_\chi$ fiind versorul axei de rotație (axa normală în polul Q la planul unghiului lui Euler variabil). Acestei deplasări elementare a rigidului îi va corespunde o deplasare a punctului $B(\bar{r}')$ pe cercul (Γ_B), de rază

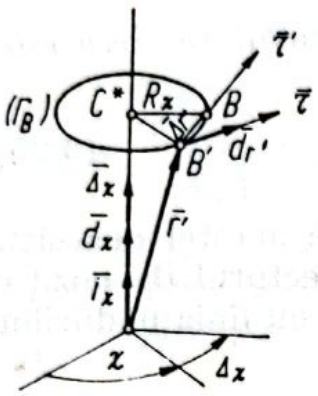


Fig. 3.10.

$$R_\chi = |\bar{r}'|\sin(\Delta\bar{\chi}, \bar{r}') \tag{3.28}$$

din poziția $B(\bar{r}(t)]$ în poziția $B'(\bar{r}'(t + \Delta t))$, vectorul $\bar{r}'$ căpătînd astfel creșterea geometrică

$$\Delta\bar{r}' = \overline{BB'}.\bar{\tau}' = R_\chi|\Delta\bar{\chi}|.\bar{\tau}' = |\Delta\bar{\chi}|\,|\bar{r}'|\sin\,(\Delta\bar{\chi},\bar{r}')\,\bar{\tau}'.$$

La limită, $(\Delta\bar{r}' \to d\bar{r}'\,;\ \Delta\bar{\chi} \to d\bar{\chi}\,;\ \bar{\tau}' \to \bar{\tau})$, expresia din membrul drept al relației precedente va reprezenta chiar produsul vectorial al vectorilor $d\bar{\chi}$ și $\bar{r}'$, adică se va putea scrie:

$$d\bar{r}' = d\bar{\chi} \times \bar{r}',\ (\chi = \psi, \varphi, \theta), \tag{3.29}$$

ordinea factorilor fiind astfel aleasă încît să corespundă sensului vectorului $d\bar{r}'$.

Se înțelege că relația precedentă este valabilă, în particular, și pentru vectorii de poziție ai punctelor A_0', B_0' și C_0', situate pe axele reperului $(\mathscr{R}')$ la distanța de o unitate de originea Q și deci și pentru versorii axelor acestui reper, putîndu-se scrie, în consecință, relațiile

$$d\bar{i}' = d\bar{\chi} \times \bar{i}'\,;\ d\bar{j}' = d\bar{\chi} \times \bar{j}'\,;\ d\bar{k}' = d\bar{\chi} \tag{3.30}$$
$$(\chi = \psi, \varphi, \theta).$$

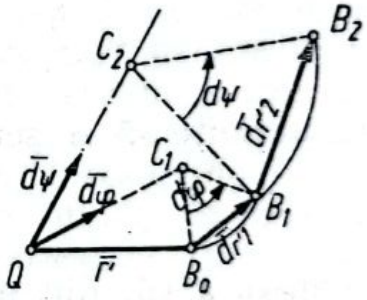
b) *Vectorul rotație elementară instantanee, corespunzător variațiilor tuturor unghiurilor lui Euler.*

Pentru a examina modul mai general de deplasare, corespunzător cazului cînd variază simultan două, sau chiar toate cele trei unghiuri ale lui Euler, se va demonstra următoarea

Teoremă de compunere a rotaţiilor elementare: două rotaţii elementare, determinate prin vectorii $d\bar{\varphi}$ şi $d\bar{\psi}$, vor putea fi înlocuite cu o rotaţie elementară unică, cu vectorul rotaţie corespunzător, $d\bar{\Theta}$, determinat de suma geometrică a vectorilor rotaţii elementare componenţi adică

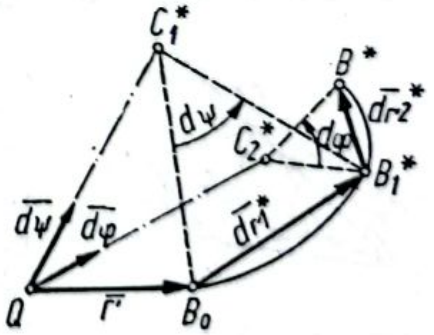
$$\boxed{d\bar{\Theta} = d\bar{\varphi} + d\bar{\psi}}. \qquad (3.31)$$

Demonstraţia acestei teoreme se va reduce deci la demonstrarea valabilităţii, şi pentru această categorie de vectori, a principiului paralelogramului, respectiv a principiului independenţei acţiunilor lor. În acest scop, va fi suficient să se arate că variaţia totală a vectorului de poziţie $\bar{r}'$ al unui punct arbitrar $B(\bar{r}')$ al rigidului, corespunzătoare celor două rotaţii componente, $d\bar{\varphi}$ şi $d\bar{\psi}$, este aceeaşi, fie că rotaţiile se efectuează simultan, fie că ele se efectuează succesiv, fiecare cu aceeaşi durată de desfăşurare, dar independent de ordinea în care se succed.



a

Considerînd, mai întîi, că rotaţiile se succed în ordinea $d\bar{\varphi}$, $d\bar{\psi}$ (fig. 3.11, *a*), variaţia elementară totală a vectorului de poziţie $\bar{r}'$, care aduce punctul $B(\bar{r}')$ din poziţia iniţială $B_0(\bar{r}')$ în poziţia finală $B_2(\bar{r}' + d\bar{r}_1' + d\bar{r}_2')$, trecînd prin poziţia intermediară $B_1(\bar{r}' + d\bar{r}_1')$, este dată de relaţia



b

Fig. 3.11.

$$d\bar{r}' = d\bar{r}_1' + d\bar{r}_2' = d\bar{\varphi} \times \bar{r}' + d\bar{\psi} \times$$
$$\times (\bar{r}' + d\bar{r}_1') = (d\bar{\varphi} + d\bar{\psi}) \times \bar{r}' + d\bar{\psi} \times$$
$$\times (d\bar{\varphi} \times \bar{r}'). \qquad (3.32)$$

În cazul cînd se consideră că rotaţiile se efectuează în ordinea $d\bar{\psi}$, $d\bar{\varphi}$, (fig. 3.11, *b*), aducînd punctul B mai întîi în poziţia interme-

diară B_1^* $(\bar{r}' + d\bar{r}_1'^*)$ și apoi în poziția finală $B_2^*(\bar{r}' + d\bar{r}_1'^* + d\bar{r}_2'^*)$, deplasarea elementară totală este dată de relația

$$d\bar{r}'^* = d\bar{r}_1'^* + d\bar{r}_2'^* = \bar{d}\psi \times \bar{r}' + d\bar{\varphi} \times (\bar{r}' + d\bar{r}_1'^*) = (d\bar{\psi} + d\bar{\varphi}) \times \bar{r}' + \\ + d\bar{\varphi} \times (d\bar{\psi} \times \bar{r}'). \qquad (3.33)$$

Comparînd între ele relațiile (3.32) și (3.33), se observă că ele diferă prin ultimul termen $(d\bar{\psi} \times (d\bar{\varphi} \times \bar{r}') \neq d\bar{\varphi} \times (d\bar{\psi} \times \bar{r}')$. Întrucît este vorba însă numai de rotații elementare, produsele dublu vectoriale din cele două expresii, conținînd cîte doi factori cu modulii mărimi elementare, sînt neglijabili în raport cu primii termeni, astfel încît, *pentru rotații elementare*, rezultă concluzia

$$d\bar{r}' = d\bar{r}'^* = (d\bar{\varphi} + d\bar{\psi}) \times \bar{r}' = (d\bar{\psi} + d\bar{\varphi}) \times \bar{r}', \qquad (3.34)$$

care justifică enunțul teoremei.

Introducînd vectorul rezultant

$$d\bar{\Theta} = d\bar{\varphi} + d\bar{\psi}, \qquad (3.35)$$

care permite să se scrie

$$d\bar{r}' = d\bar{\Theta} \times \bar{r}', \qquad (3.36)$$

se constată că, din punctul de vedere al deplasărilor elementare, totul se întîmplă ca și cum rigidul (S) ar efectua o singură rotație elementară determinată prin vectorul $d\bar{\Theta}$ (fig. 3.12).

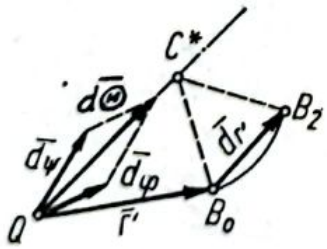


Fig. 3.12.

Este ușor de înțeles că această concluzie poate fi extinsă la un număr oarecare, determinat, de vectori rotații elementare componenți și, în particular, la cazul celor trei vectori rotații elementare — de precesie, proprie și de nutație — corespunzător variațiilor simultane ale tuturor unghiurilor lui Euler, introducîndu-se astfel *vectorul rotație elementară instantanee*, definit prin relația

$$d\bar{\Theta} = d\bar{\psi} + d\bar{\varphi} + d\bar{\theta} = d\psi\bar{k} + d\varphi\bar{k}' + d\theta\bar{n}, \qquad (3.37)$$

denumirea de „instantanee" fiind justificată de modificarea, după fiecare interval de timp dt, a direcției suportului acestui vector.

Scanned with CamScanner

Variația totală a vectorului de poziție $\bar{r}'$ al unui punct arbitrar $B(\bar{r}')$ al rigidului, provocată de variația simultană a tuturor unghiurilor lui Euler, va fi dată de relația

$$d\bar{r}' = d\bar{\Theta} \times \bar{r}' = d\bar{\psi} \times \bar{r}' + d\bar{\varphi} \times \bar{r}' + d\bar{\theta} \times \bar{r}', \qquad (3.38)$$

iar variațiile versorilor axelor reperului $(\mathscr{R}')$ vor avea expresiile

$$d\bar{i}' = d\bar{\Theta} \times \bar{i}'; \quad d\bar{j}' = d\bar{\Theta} \times \bar{j}'; \quad d\bar{k}' = d\bar{\Theta} \times \bar{k}'. \qquad (3.39)$$

Trebuie de făcut precizarea că în timp ce în cazul variației unuia singur dintre unghiurile lui Euler vectorii $d\bar{\psi}$, $d\bar{\varphi}$ sau $d\bar{\theta}$ au semnificații de diferențiale, cu operatorul diferențial aplicat unghiurilor variabile, vectorul $d\bar{\Theta}$ nu mai are o asemenea semnificație, neexistînd un unghi plan Θ, a cărui diferențială să poată fi considerată mărimea $d\Theta$.

3°. **Torsorul roto-translație elementară instantanee.** În cazul cînd toți cei șase parametri de poziție ai rigidului sînt variabili în timp, mișcarea rigidului este numită *mișcare generală*, iar variațiile parametrilor de poziție într-un interval de timp elementar dt determină, pe de o parte, vectorul translație elementară $d\bar{r}_Q$, cu expresia dată de relația (3.15) și, pe de altă parte, vectorul rotație elementară instantanee, definit prin relația (3.37); întrucît, așa cum se va arăta ulterior, acești doi vectori se comportă ca și componentele unui torsor rezultant la schimbarea polului, ei vor fi numiți, în continuare, *componente ale torsorului roto-translației elementare instantanee* al rigidului în mișcare generală, acest torsor fiind definit sub forma

$$\boxed{\bar{\mathscr{T}}_Q\{d\bar{r}_Q, d\bar{\Theta}\} = \begin{Bmatrix} d\bar{r}_Q = dx_Q\bar{i} + dy_Q\bar{j} + dz_Q\bar{k} \\ d\bar{\Theta} = d\psi\cdot\bar{k} + d\varphi\cdot\bar{k}' + d\theta\cdot\bar{n} \end{Bmatrix}}. \qquad (3.40)$$

În această deplasare elementară generală a rigidului, variațiile vectorilor de poziție $\bar{r}'$ ale punctelor $B(\bar{r}')$ ale rigidului, precum și ale versorilor axelor reperului $(\mathscr{R}')$, au expresiile

$$\boxed{d\bar{r}' = d\bar{\Theta} \times \bar{r}'}, \qquad (3.41)$$

respectiv

$$\boxed{d\bar{i}' = d\bar{\Theta} \times \bar{i}; \quad d\bar{j}' = d\bar{\Theta} \times \bar{j}'; \quad d\bar{k}' = d\bar{\Theta} \times \bar{k}'}, \qquad (3.42)$$

deoarece numai rotațiile instantanee provoacă asemenea variații.

Scanned with CamScanner

În cazul cînd vectorii $d\bar{r}_Q$ şi $d\bar{\Theta}$ sînt coliniari, deplasarea elementară a rigidelor este numită *roto-translaţie elementară elicoidală instantanee*, iar ansamblul celor doi vectori este numit *răsucitorul roto-translaţiei elementare instantanee.*

3.2. *Parametrii cinematici ai mişcării generale a rigidului*

Mişcarea generală a unui rigid va putea fi caracterizată, într-un moment oarecare, cu ajutorul următoarelor două categorii de mărimi fizice, purtînd numele de *parametrii cinematici ai mişcării rigidului.*

3.2.1. *Parametrii cinematici de ordinul întîi,* reprezentaţi prin următoarele două mărimi vectoriale:

1°. Viteza de translaţie a rigidului definită prin relaţia

$$\boxed{\bar{v}_Q = \frac{d\bar{r}_Q}{dt} = \dot{x}_Q\bar{i} + \dot{y}_Q\bar{j} + \dot{z}_Q\bar{k}}, \tag{3.43}$$

acest parametru cinematic, reprezentînd viteza polului Q invariabil legat de rigid (fig. 3.13), fiind determiat în aplicaţii fie cu ajutorul proiecţiilor lui pe axele reperului fix, proiecţii date de relaţiile:

$$\boxed{v_{Qx} = \bar{v}_Q\bar{i} = \dot{x}_Q\,;\ v_{Qy} = \bar{v}_Q\bar{j} = \dot{y}_Q\,;\ v_{Qz} = \bar{v}_Q\bar{k} = \dot{z}_Q}, \tag{3.44}$$

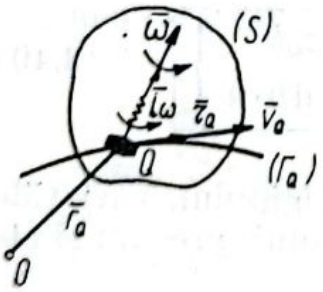


Fig. 3.13.

fie — şi aceasta cel mai adesea — cu ajutorul proiecţiilor lui pe axele reperului $(\mathscr{R}')$, proiecţii avînd expresiile

$$\boxed{\begin{aligned} v'_{Qx} &= \bar{v}_Q\bar{i}' = \dot{x}_Q\alpha_{xx} + \dot{y}_Q\alpha_{xy} + \dot{z}_Q\alpha_{xz}\,; \\ v'_{Qy} &= \bar{v}_Q\bar{j}' = \dot{x}_Q\alpha_{yx} + \dot{y}_Q\alpha_{yy} + \dot{z}_Q\alpha_{yz}\,; \\ v'_{Qz} &= \bar{v}_Q\bar{k}' = \dot{x}_Q\alpha_{zx} + \dot{y}_Q\alpha_{zy} + \dot{z}_Q\alpha_{zz}. \end{aligned}} \tag{3.45}$$

Se înţelege că viteza de translaţie este, în general, un vector variabil în timp, atît ca mărime, cît şi ca direcţie, putîndu-se scrie deci

$$\bar{v}_Q = v_Q(t)\bar{\tau}_Q(t), \tag{3.46}$$

Scanned with CamScanner

$\bar{\tau}_Q$ fiind versorul tangenţial la traiectoria (Γ_Q), în poziţia polului Q corespunzătoare momentului t (fig. 3.13).

2°. **Viteza unghiulară instantanee,** definită prin relaţia

$$\boxed{\bar{\omega} = \frac{d\bar{\Theta}}{dt} = \dot{\psi}\bar{k} + \dot{\varphi}\bar{k}' + \dot{\theta}\bar{n} = \bar{\omega}_p + \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_n} \qquad (3.47)$$

cu componentele $\bar{\omega}_p$, $\bar{\omega}_r$ şi $\bar{\omega}_n$ purtînd numele de *viteză unghiulară de precesie*, *viteză unghiulară de rotaţie proprie* şi, respectiv, *viteză unghiulară de nutaţie.*

Acest vector caracterizează rotaţia instantanee în jurul polului Q, precizînd, în baza regulii burghiului drept folosită la determinarea sensului vectorului $d\bar{\Theta}$, sensul în care se produce rotaţia instantanee a rigidului la momentul t.

Determinarea, în aplicaţii, a vectorului $\bar{\omega}$ se face fie cu ajutorul proiecţiilor lui pe axele reperului fix, date de relaţiile

$$\boxed{\omega_x = \bar{\omega}\bar{i} = \dot{\varphi}\alpha_{zx} + \dot{\theta}\cos\psi\,;\quad \omega_y = \bar{\omega}\bar{j} = \dot{\varphi}\alpha_{zy} + \dot{\theta}\sin\psi\,;\quad \omega_z = \bar{\omega}\bar{k} = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\alpha_{zz},} \qquad (3.48)$$

fie cu ajutorul proiecţiilor pe axele reperului invariabil legat de rigid, ultimele avînd expresiile

$$\boxed{\omega'_x = \bar{\omega}\bar{i}' = \dot{\psi}\alpha_{xz} + \dot{\theta}\cos\varphi\,;\quad \omega'_y = \bar{\omega}\bar{j}' = \dot{\psi}\alpha_{yz} - \dot{\theta}\sin\varphi\,;\quad \omega'_z = \bar{\omega}\bar{k}' = \dot{\psi}\alpha_{zz} + \dot{\varphi}.} \qquad (3.49)$$

Se înţelege că, în general, şi vectorul $\bar{\omega}$ va fi variabil în timp, atît ca mărime, cît şi ca orietare, scriindu-se :

$$\bar{\omega} = \omega(t)\bar{i}_\omega\,(t). \qquad (3.50)$$

Introducerea noţiunii de viteză unghiulară permite să se stabilească următoarele expresii pentru derivatele în raport cu timpul ale vectorilor de poziţie $\bar{r}'$, ale punctelor rigidului în raport cu polul Q :

$$\boxed{\dot{\bar{r}}' = \frac{d\bar{r}'}{dt} = \frac{d\bar{\Theta}}{dt} \times \bar{r}' = \bar{\omega} \times \bar{r}'}, \qquad (3.51)$$

Scanned with CamScanner

precum şi pentru derivatele în raport cu timpul ale versorilor axelor reperului $(\mathscr{R}')$:

$$\boxed{\dot{\bar{i}}' = \bar{\omega} \times \bar{i}' ; \ \dot{\bar{j}}' = \bar{\omega} \times \bar{j}' ; \ \dot{\bar{k}}' = \bar{\omega} \times \bar{k}'}, \qquad (3.52)$$

ultimele expresii fiind cunoscute în literatura de specialitate sub numele de *formulele lui Poisson.*

3.2.2. *Parametrii cinematici de ordinul doi,* reprezentaţi prin mărimile:

1°. **Acceleraţia de translaţie,** definită prin relaţia

$$\boxed{\bar{a}_Q = \dot{\bar{v}}_Q = \ddot{x}_Q \bar{i} + \ddot{y}_Q \bar{j} + \ddot{z} \bar{k}}. \qquad (3.53)$$

Prin unghiul pe care îl formează cu viteza de translaţie, acest vector scoate în evidenţă caracterul — accelerat, încetinit, sau uniform — al translaţiei, această primă componentă a mişcării generale fiind :

— *accelerată,* atunci cînd unghiul format de vectorii $\bar{a}_Q$ şi $\bar{v}_Q$ este ascuţit într-un anume interval de timp $(v_Q a_{Q\tau} > 0)$, (fig. 3.14,*a*) ;

— *încetinită,* atunci cînd vectorii $\bar{a}_Q$ şi $\bar{v}_Q$ formează între ei un unghi obtuz, $(v_Q a_{Q\tau} < 0)$, (fig. 3.14, *b*) ;

— *uniformă,* în cazul cînd unghiul dintre vectorii $\bar{a}_Q$ şi $\bar{v}_Q$ este drept, $(a_{Q\tau} = 0)$, (fig. 3.14, *c*).

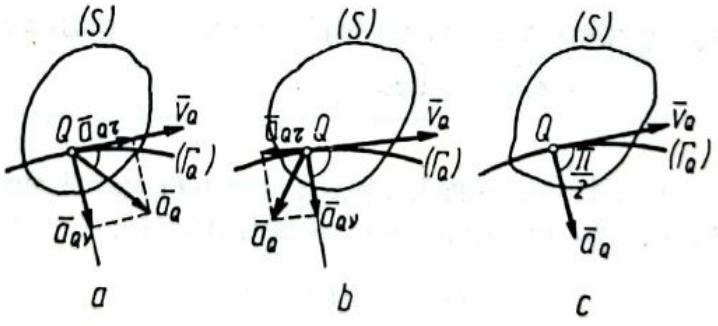


Fig. 3.14.

Determinarea, în aplicaţii, a acceleraţiei de translaţie se face fie cu ajutorul proiecţiilor ei pe axele reperului fix, proiecţii date de relaţiile :

$$\boxed{a_{Qx} = \bar{a}_Q \bar{i} = \ddot{x}_Q ; \ a_{Qy} = \bar{a}_Q \bar{j} = \ddot{y}_Q ; \ a_{Qz} = \bar{a}_Q \bar{k} = \ddot{z}_Q}, \qquad (3.54)$$

Scanned with CamScanner

fie — cel mai adesea — cu ajutorul proiecţiilor pe axele reperului $(\mathscr{R}')$, proiecţii avînd expresiile :

$$\boxed{\begin{gathered} a'_{Qx} = \bar{a}_Q \bar{i}' = \ddot{x}_Q \alpha_{xx} + \ddot{y}_Q \alpha_{xy} + \ddot{z}_Q \alpha_{xz}\,; \quad a'_{Qy} = \bar{a}_Q \bar{j}' = \ddot{x}_Q \alpha_{yx} + \ddot{y}_Q \alpha_{yy} + \ddot{z}_Q \alpha_{yz}\,; \\ a'_{Qz} = \bar{a}_Q \bar{k}' = \ddot{x}_Q \alpha_{zx} + \ddot{y}_Q \alpha_{zy} + \ddot{z}_Q \alpha_{zz}. \end{gathered}} \tag{3.55}$$

2°. **Acceleraţia unghiulară instantanee,** definită prin relaţia

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \ddot{\psi}\bar{k} + \ddot{\varphi}\,\bar{k}' + \ddot{\theta}\,\bar{n} + \bar{\omega}_p \times \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_n \times \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_p \times \bar{\omega}_n}, \tag{3.56}$$

ultimii trei termeni rezultînd de la derivarea în raport cu timpul a versorilor $\bar{k}'$ şi $\bar{n}$, $(\dot{\varphi}\dot{\bar{k}}' = \dot{\varphi}(\bar{\omega} \times \bar{k}') = \bar{\omega} \times (\dot{\varphi}\bar{k}') = \bar{\omega} \times \bar{\omega}_r = (\bar{\omega}_p + \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_n) \times \bar{\omega}_r = \bar{\omega}_p \times \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_n \times \bar{\omega}_r$; $\dot{\theta}\dot{\bar{n}} = \dot{\theta}(\bar{\omega}_p \times \bar{n}) = \bar{\omega}_p \times \dot{\theta}\bar{n} = \bar{\omega}_p \times \bar{\omega}_n)$,

variaţia ultimului fiind provocată numai de variaţia unghiului de precesie.

Pe de altă parte, prin dezvoltarea în raport cu timpul a expresiei (3.50) a vitezei unghiulare se obţine şi o a doua expresie a acceleraţiei unghiulare :

$$\varepsilon = \dot{\omega}\,\bar{i}_\omega + \omega\,\dot{\bar{i}}_\omega = \bar{\varepsilon}_c + \bar{\varepsilon}_n, \tag{3.57}$$

care scoate în evidenţă existenţa a două componente ortogonale ale ei, una, $\bar{\varepsilon}_c = \dot{\omega}\bar{i}_\omega$, coliniară cu vectorul $\bar{\omega}$ şi a doua, $\bar{\varepsilon}_n = \omega\dot{\bar{i}}_\omega$, normală la vectorul $\bar{\omega}$, $(\dot{\bar{i}}_\omega \bar{i}_\omega = 0)$.

Semnele valorilor scalare, raportate la vectorul $\bar{i}_\omega$ ale vectorilor $\bar{\varepsilon}_c$ şi $\bar{\omega}$ vor indica caracterul — accelerat, încetinit, sau uniform — al rotaţiei instantanee efectuate în jurul polului Q, această rotaţie fiind :

— *accelerată*, în cazul

$$\omega\varepsilon_c = \omega\dot{\omega} > 0, \tag{3.58}$$

condiţia precedentă, recunoscută în schiţele cinematice prin acelaşi sens al vectorilor $\bar{\varepsilon}_c$ şi $\bar{\omega}$, respectiv prin unghiul ascuţit format de vectorul ε_c cu vectorul $\bar{\omega}$ (fig. 3.15, *a*), indicînd creşterea în modul a funcţiei $\omega(t)$;

Scanned with CamScanner

— *încetinită*, în cazul

$$\omega\varepsilon_c = \omega\dot{\omega} < 0, \tag{3.59}$$

această condiție, recunoscută în schițe prin sensul contrar al vectorilor $\bar{\varepsilon}_c$ și $\bar{\omega}$, respectiv prin unghiul obtuz între vectorii $\bar{\varepsilon}$ și $\bar{\omega}$ (fig. 1.15, *b*) indicînd scăderea în modul a funcției $\omega(t)$;

— *uniformă*, în cazul

$$\varepsilon_c = \dot{\omega} = 0, \tag{3.60}$$

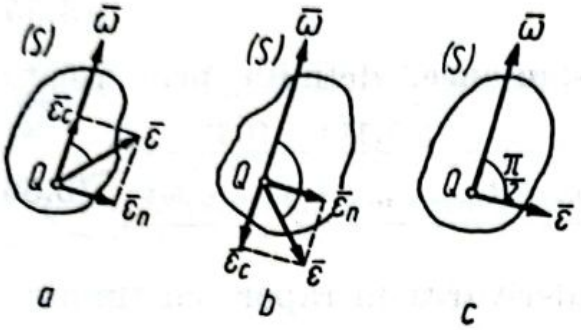


Fig. 3.15.

ultima condiție, scoasă în evidență în reprezentările cinematice prin absența componentei ε_c, respectiv prin unghiul drept format de vectorii $\bar{\varepsilon}$ și $\bar{\omega}$ (fig. 1.15, *c*), arătînd că mărimea vitezei unghiulare rămîne constantă în timpul mișcării.

În mod curent, calculul accelerației unghiulare se face plecîndu-se de la expresiile analitice ale vectorului $\bar{\omega}$ în raport cu cele două repere, $(\mathscr{R})$ și $(\mathscr{R}')$, adică

$$\bar{\omega} = \omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k} = \omega'_x\bar{i}' + \omega'_y\bar{j}' + \omega'_z\bar{k}'. \tag{3.61}$$

Observîndu-se că la derivarea în raport cu timpul a primei expresii versorii i, j și $\bar{k}$ sînt constanți și că la derivarea celei de-a doua expresii, grupul de termeni conținînd derivatele versorilor are valoarea zero:

$$\omega'_x\dot{\bar{i}}' + \omega'_y\dot{\bar{j}}' + \omega'_z\dot{\bar{k}}' = \omega'_x(\bar{\omega} \times \bar{i}') + \omega'_y(\bar{\omega} \times \bar{j}') + \omega'_z(\bar{\omega} \times \bar{k}') =$$
$$= \bar{\omega} \times (\omega'_x\bar{i}' + \omega'_y\bar{j}' + \omega'_z\bar{k}') = 0,$$

rezultă următoarele expresii analitice ale vectorului $\bar{\varepsilon}$:

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = \dot{\omega}_x\bar{i} + \dot{\omega}_y\bar{j} + \dot{\omega}_z\bar{k} = \dot{\omega}'_x\bar{i}' + \dot{\omega}'_y\bar{j}' + \dot{\omega}'_z\bar{k}'} \tag{3.62}$$

și deci următoarele proiecții ale lui pe axele celor două repere:

$$\boxed{\varepsilon_x = \bar{\varepsilon}\bar{i} = \dot{\omega}_x;\ \varepsilon_y = \bar{\varepsilon}\bar{j} = \dot{\omega}_y;\ \varepsilon_z = \bar{\varepsilon}\bar{k} = \dot{\omega}_z}, \tag{3.63}$$

Scanned with CamScanner

respectiv

$$\boxed{\varepsilon'_x = \bar{\varepsilon}\bar{i}' = \dot{\omega}'_x;\quad \varepsilon'_y = \bar{\varepsilon}\bar{j}' = \dot{\omega}'_y;\quad \varepsilon'_z = \bar{\varepsilon}\bar{k}' = \dot{\omega}'_z}. \qquad (3.64)$$

3.3. *Problemele cinematicii rigidului*

Problema generală a cinematicii rigidului poate fi formulată astfel: cunoscîndu-se ecuaţiile finite ale mişcării generale a unui rigid

$$\begin{cases} x_Q = x_Q(t); & \psi = \psi(t); \\ y_Q = y_Q(t); & \varphi = \varphi(t); \\ z_Q = z_Q(t); & \theta = \theta(t), \end{cases} \qquad (3.65)$$

precum şi coordonatele — constante — în raport cu reperul legat de rigid ale unui punct arbitrar $B(\bar{r}')$ al lui:

$$x' = a;\ y' = b;\ z' = c, \qquad (3.66)$$

se cere să se determine traiectoria, viteza şi acceleraţia acestui punct.

Modul de rezolvare a acestor probleme va fi arătat în continuare.

3.3.1. Determinarea traiectoriei punctului *B*

Observînd, din fig. 3.16, că între vectorii de poziţie $\bar{r} = \overrightarrow{OB}$, $\bar{r}' = \overrightarrow{QB}$ şi $\bar{r}_Q = \overrightarrow{OQ}$ poate fi scrisă relaţia

$$\bar{r} = \bar{r}_Q + \bar{r}' = (x_Q\bar{i} + y_Q\bar{j} + z_Q\bar{k}) + (x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}'), \qquad (3.67)$$

numită încă şi *ecuaţia vectorială parametrică a traiectoriei punctului B*, rezultă, prin proiectare pe axele reperului fix, următoarele *ecuaţii analitice pa-*

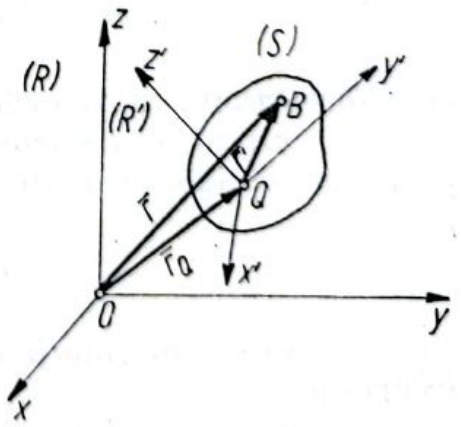


Fig. 3.16.

Scanned with CamScanner

rametrice ale traiectoriei aceluiaşi punct :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \bar{r}\bar{i} = x_Q + x'\alpha_{xx} + y'\alpha_{yx} + z'\alpha_{zx} = x(t); \\ y &= \bar{r}\bar{j} = y_Q + x'\alpha_{xy} + y'\alpha_{yy} + z'\alpha_{zy} = y(t); \\ z &= \bar{r}\bar{k} = z_Q + x'\alpha_{xz} + y'\alpha_{yz} + z'\alpha_{zz} = z(t). \end{aligned}} \tag{3.68}$$

Introducînd matricele coloană

$$\mathbf{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{r}_Q = \begin{Vmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{r}' = \begin{Vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Vmatrix} \tag{3.69}$$

şi notînd cu $\mathbf{A}^T$ transpusa matricei $\mathbf{A}$, definită sub forma (3.3), a cosinusurilor directoare ale axelor reperului $(\mathscr{R}')$ în raport cu reperul fix $(\mathscr{R})$, se verifică cu uşurinţă că ecuaţiile parametrice (3.68) pot fi transcrise matriceal sub forma

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{A}^T\mathbf{r}'}. \tag{3.70}$$

3.3.2. Determinarea vitezei punctului B

Plecînd de la relaţia (2.18) de definiţie a vitezei, precum şi de la relaţia (3.67) dintre vectorii de poziţie $\bar{r}$, $\bar{r}'$ şi $\bar{r}_Q$, se va putea scrie

$$\bar{v}_B = \bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_Q + \dot{\bar{r}}', \tag{3.71}$$

cei doi termeni ai vitezei punctului B avînd următoarele denumiri :

— *viteza de translaţie a punctului* B, reprezentată prin primul parametru cinematic de ordinul întîi al mişcării rigidului :

$$\dot{\bar{r}}_Q = \bar{v}_Q = \bar{v}_{trans}, \tag{3.72}$$

— *viteza de rotaţie a punctului* B, avînd, în baza relaţiei (3.51) expresia

$$\dot{\bar{r}}' = \bar{v}_{rot} = \bar{v}_{QB} = \bar{\omega} \times \bar{r}' \tag{3.73}$$

Scanned with CamScanner

și numită uneori și *viteză a punctului B în rotația în jurul polului Q.*

Rezultă deci următoarele expresii vectoriale ale vitezei punctului B al rigidului în mișcare generală :

$$\boxed{\bar{v} = \bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}' = \bar{v}_Q + \bar{v}_{QB} = \bar{v}_{trans} + \bar{v}_{rot}} \,. \tag{3.74}$$

Calculul, în aplicații, al vitezei se face, de regulă, cu ajutorul proiecțiilor ei pe axele reperului invariabil legat de rigid, datorită prezenței, în expresia vectorială a ei, a vectorului de poziție $\bar{r}'$, ale cărui proiecții pe axele reperului $(\mathscr{R}')$ sînt cunoscute și constante.

Aceste proiecții au expresiile

$$\boxed{\begin{aligned} v'_x = \bar{v}\bar{i}' = v'_{Qx} + (\omega'_y z' - \omega'_z y')\,; \quad v'_y = \bar{v}\bar{j}' = v'_{Qy} + (\omega'_z x' - \omega'_x z')\,; \\ v'_z = \bar{v}\bar{k}' = v'_{Qz} + \omega'_x y' - \omega'_y x'), \end{aligned}} \tag{3.75}$$

cu proiecțiile vitezei de translație date de relațiile (3.45) și cu proiecțiile vitezei unghiulare determinate prin relațiile (3.49).

Introducînd matricea coloană

$$\boldsymbol{\omega}' = \left\| \begin{matrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{matrix} \right\|, \text{ cu matricea antisimetrică } \tilde{\boldsymbol{\omega}}' = \left\| \begin{matrix} 0 & -\omega'_z & \omega'_y \\ \omega'_z & 0 & -\omega'_x \\ -\omega'_y & \omega'_x & 0 \end{matrix} \right\|, \tag{3.76}$$

viteza punctului B mai poate fi exprimată sub următoarea formă matriceală :

$$\boxed{\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_Q + \tilde{\boldsymbol{\omega}}'\,\mathbf{r}'}, \tag{3.77}$$

unde $\mathbf{v}'$ și $\mathbf{v}'_Q$ sînt matricele coloană

$$\mathbf{v}' = \left\| \begin{matrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{matrix} \right\| \quad \text{și} \quad \mathbf{v}'_Q = \left\| \begin{matrix} v'_{Qx} \\ v'_{Qy} \\ v'_{Qz} \end{matrix} \right\|. \tag{3.78}$$

Scanned with CamScanner

În figura 3.17 sînt arătate orientările celor două componente ale vitezei punctului $B(\bar{r}')$ corespunzătoare parametrilor cinematici $\bar{v}_Q$ și $\bar{\omega}$ precizați în schiță.

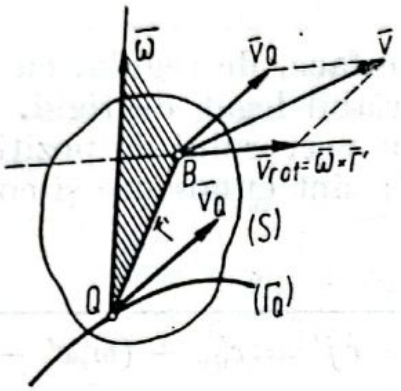


Fig. 3.17.

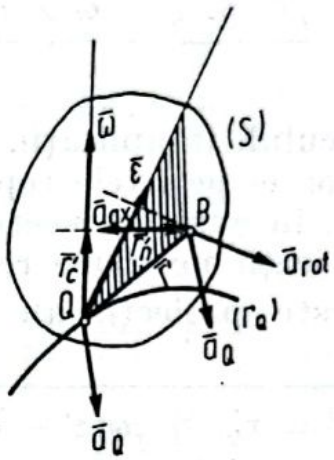


Fig. 3.18.

36

3.3.3. Determinarea acceleraţiei punctului B

Prin derivarea în raport cu timpul a expresiei vectoriale (3.74) a vitezei punctului B se obţine, conform relaţiei de definiţie (2.21), acceleraţia acestui punct :

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \dot{\bar{v}}_Q + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}', \tag{3.79}$$

cele trei componente ale ei primind următoarele denumiri :

— *acceleraţia de translaţie*, reprezentată prin primul parametru cinematic de ordinul doi al mișcării rigidului :

$$\dot{\bar{v}}_Q = \bar{a}_{trans} = \bar{a}_Q ; \tag{3.80}$$

— *acceleraţia de rotaţie*, reprezentată prin termenul

$$\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}' = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' = \bar{a}_{rot} ; \tag{3.81}$$

— *acceleraţia axipetă*, reprezentată prin ultima componentă :

$$\bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}' = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') = -\bar{\omega}^2 \bar{r}'_n = \bar{a}_{ax}, \tag{3.82}$$

cu penultima expresie — în care $\bar{r}'_n$ este componenta normală la

Scanned with CamScanner

vectorul $\bar{\omega}$ a vectorului de poziție $\bar{r}'$ (fig. 3.18), $(\bar{a}_{ax} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times r') =$
$= \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (\bar{r}'_c + \bar{r}'_n)] = \underbrace{\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'_c)}_{0} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'_n) = \underbrace{(\bar{\omega}\bar{r}'_n)}_{0}\bar{\omega} -$
$- \bar{\omega}^2\bar{r}'_n = -\bar{\omega}^2\bar{r}'_n)$ indicînd orientarea acestei componente după normala la axa instantanee de rotație și spre această axă, justificîndu-se în modul acesta și denumirea de „axipetă" ce i s-a dat.

Rezultanta ultimelor două componente, notată

$$\bar{a}_{QB} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') = \bar{a}_{rot} + \bar{a}_{ax}, \tag{3.83}$$

este numită *accelerație a punctului B în rotația în jurul polului Q.*

Rezultă astfel următoarele expresii vectoriale ale accelerației punctului B al unui rigid în mișcare generală :

$$\boxed{\bar{a} = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' - \bar{\omega}^2\bar{r}'_n = \bar{a}_{trans} + \bar{a}_{rot} + \bar{a}_{ax} = \bar{a}_Q + \bar{a}_{QB}.} \tag{3.84}$$

Orientările celor trei componente ale accelerației sînt arătate în fig. 3.18 pentru parametrii cinematici precizați în schiță.

Expresiei vectoriale a accelerației, scrisă, prin descompunerea produsului dublu vectorial pe care-l conține, sub forma

$$\bar{a} = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' + (\bar{\omega}\bar{r}')\bar{\omega} - \bar{\omega}^2\bar{r}', \tag{3.85}$$

îi vor corespunde următoarele proiecții pe axele reperului $(\mathscr{R}')$:

$$\boxed{\begin{aligned} a'_x &= \bar{a}\bar{i}' = a'_{Qx} + (\varepsilon'_y z' - \varepsilon'_z y') + (\omega'_x x' + \omega'_y y' + \omega'_z z')\omega'_x - \omega^2 x' ; \\ a'_y &= \bar{a}\bar{j}' = a'_{Qy} + (\varepsilon'_z x' - \varepsilon'_x z') + (\omega'_x x' + \omega'_y y' + \omega'_z z')\omega'_y - \omega^2 y' ; \\ a'_z &= \bar{a}\bar{k}' = a'_{Qz} + (\varepsilon'_x y' - \varepsilon'_y x') + (\omega'_x x' + \omega'_y y' + \omega'_z z')\omega'_z - \omega^2 z' \end{aligned}} \tag{3.86}$$

proiecțiile accelerației de translație fiind date de relațiile (3.55), cele ale vitezei unghiulare de relațiile (3.49), iar cele ale accelerației unghiulare de relațiile (3.64).

Scanned with CamScanner

Prin introducerea matricelor coloană

$$\mathbf{a}' = \left\| \begin{matrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{matrix} \right\| ; \quad \mathbf{a}'_Q = \left\| \begin{matrix} a'_{Qx} \\ a'_{Qy} \\ a'_{Qz} \end{matrix} \right\| ; \quad \boldsymbol{\varepsilon}' = \left\| \begin{matrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \varepsilon'_z \end{matrix} \right\| \text{ cu } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \left\| \begin{matrix} 0 & -\varepsilon'_z & \varepsilon'_y \\ \varepsilon'_z & 0 & -\varepsilon'_x \\ -\varepsilon'_y & \varepsilon'_n & 0 \end{matrix} \right\|, \tag{3.87}$$

proiecțiile pe axele reperului $(\mathscr{R}')$ ale acceleraţiei punctului mai pot fi exprimate sub următoarea formă matriceală :

$$\boxed{\mathbf{a}' = \mathbf{a}'_Q + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'\mathbf{r}' + (\bar{\omega}\bar{r}')\boldsymbol{\omega}' - \omega^2\mathbf{r}'.} \tag{3.88}$$

3.4. *Proprietăți ale mișcării generale a rigidului*

3.4.1. Variația parametrilor cinematici de ordinul întîi la schimbarea polului în rigid

Considerînd doi poli, Q, și Q_1 ($\bar{r}'_{Q_1} = \overrightarrow{QQ_1}$), (fig. 3.19), invariabil legaţi de un rigid (S) în mișcare generală, se demonstrează următoarele două teoreme privind legătura dintre parametrii cinematici de ordinul întîi corespunzători celor doi poli, $\bar{v}_Q$ și $\bar{\omega}$ în polul Q și $\bar{v}_{Q_1}$ și $\bar{\omega}_1$, în polul Q_1.

Teorema I : la trecerea de la polul Q la polul Q_1 ($\bar{r}'_{Q_1}$) viteza de translaţie se modifică după relaţia

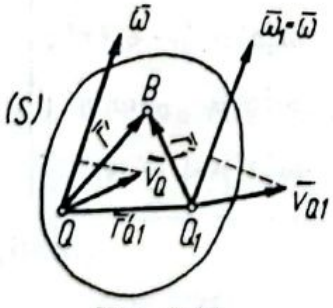


Fig. 3.19.

$$\boxed{\bar{v}_{Q_1} = \bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}'_{Q_1} = \bar{v}_Q + \bar{\mathscr{M}}_{Q_1}(\bar{\omega})}, \tag{3.89}$$

$\bar{\mathscr{M}}_{Q_1}(\bar{\omega})$ fiind momentul vectorului $\bar{\omega}$ în raport cu polul Q_1 ($\bar{\omega} \times \bar{r}'_{Q_1} = (-\bar{r}'_{Q_1}) \times \bar{\omega} = \bar{r}'_{Q_1Q} \times \bar{\omega} = \bar{\mathscr{M}}_{Q_1}(\bar{\omega})$).

Relaţia precedentă rezultă direct, prin aplicarea formulei (3.74) la calculul vitezei punctului, Q_1 ($B \to Q_1$; $\bar{r}' \to \bar{r}'_{Q_1}$).

Scanned with CamScanner

Teorema a II-a: viteza unghiulară instantanee a unui rigid în mișcare generală este independentă de polul ales în solid, adică

$$\boxed{\bar{\omega} = \bar{\omega}_1}. \tag{3.90}$$

Egalînd, între ele, expresiile vitezei unui punct arbitrar B al rigidului, scrise pentru parametrii cinematici corespunzători celor doi poli consideraţi, adică

$$\bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}' = \bar{v}_{Q_1} + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}'_1,$$

rezultă, ţinînd seama și de relaţia (3.89), șirul de egalităţi:

$$\bar{\omega} \times (\bar{r}' - \bar{r}'_{Q_1}) - \bar{\omega}_1 \times \bar{r}'_1 = \bar{\omega} \times \bar{r}'_1 - \bar{\omega} \times \bar{r}'_1 = (\bar{\omega} - \bar{\omega}_1) \times \bar{r}'_1 = 0,$$

cu consecinţa, ($\bar{r}'_1 \neq 0$):

$$\bar{\omega} - \bar{\omega}_1 = 0,$$

care justifică relaţia (3.90).

Se înţelege că în baza relaţiei (3.90) rezultă și condiţia

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1}, \tag{3.91}$$

adică și acceleraţia unghiulară instantanee este independentă de pol, în timp ce acceleraţia de translaţie se va modifica după relaţia

$$\boxed{\bar{a}_{Q_1} = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_{Q_1} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'_{Q_1})}, \tag{3.92}$$

rezultînd din aplicarea formulei (3.84), (cu $B \to Q_1$; $\bar{r}' \to \bar{r}'_{Q_1}$).

3.4.2. Invarianţii mișcării generale a rigidului

Mișcarea generală a rigidului se caracterizează prin următorii doi invarianţi la trecerea de la un pol la altul:

— *invariantul vectorial al mișcării*, reprezentat prin vectorul viteză unghiulară instantanee:

$$\boxed{\mathscr{I}_1 = \bar{\omega}_1}, \tag{3.93}$$

Scanned with CamScanner

existența lui fiind justificată de relația (3.90);

— *invariantul scalar al mișcării*, reprezentat prin produsul scalar al celor doi parametri cinematici de ordinul întîi, adică

$$\boxed{\mathcal{I}_2 = \bar{v}_Q \bar{\omega}}, \tag{3.94}$$

ultimul fiind justificat de șirul evident de relații:

$$\bar{v}_{Q_1}\bar{\omega}_1 = (\bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}'_{Q_1})\bar{\omega} = \bar{v}_Q\bar{\omega} + \underbrace{(\bar{\omega} \times \bar{r}'_{Q_1})\,\bar{\omega}}_{0} = \bar{v}_Q\bar{\omega}.$$

Se înțelege că tot invariant la schimbarea polului rămîne și raportul

$$\boxed{\frac{\mathcal{I}_2}{|\bar{\mathcal{I}}_1|} = \frac{\bar{v}_Q\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} = \mathrm{pr}_{\bar{\omega}}\bar{v}_Q}, \tag{3.95}$$

cu semnificație de *proiecție a vitezei de translație pe vectorul viteză unghiulară instantanee* (fig. 3.19).

Comportarea analogă componentelor unui torsor rezultant a parametrilor cinematici de ordinul întîi ai mișcării unui rigid la schimbarea polului justifică acum și denumirile de „componente ale torsorului loto-translației instantanee" date vectorilor

$$\mathrm{d}\bar{r}_Q = \bar{v}_Q \mathrm{d}t \quad \text{și:} \quad \mathrm{d}\bar{\Theta} = \bar{\omega}\mathrm{d}t. \tag{3.96}$$

38

3.4.3. Axa centrală a mișcării generale a unui rigid

Observațiile precedente permit să se extindă noțiunea de axă centrală din teoria vectorilor alunecători la cazul vectorilor $\bar{v}_Q$ și $\bar{\omega}$, *axa centrală a mișcării* fiind definită ca:

— loc geometric al punctelor $C(\bar{r}'_C)$, (fig. 3.20), cu vitezele $\bar{v}_C$ coliniare cu vectorul viteză unghiulară, ele satisfăcînd deci condiția

$$\bar{\omega} \times \bar{v}_C = \bar{\omega} \times (\bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}'_C) = 0; \tag{3.97}$$

Scanned with CamScanner

— loc geometric al punctelor $C(\bar{r}'_C)$ cu viteză minimă, această viteză minimă avînd valoarea :

$$\boxed{\bar{v}_{min} = \bar{v}_C = \bar{v}_{Q_c} = \frac{\bar{v}_Q \bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} \bar{i}_\omega = \frac{\bar{v}_Q \bar{\omega}}{\omega^2} \bar{\omega}} . \qquad (3.98)$$

Ecuația vectorială a acestui loc geometric în raport cu reperul $(\mathscr{R}')$ va putea fi obținută plecîndu-se de la condiția (3.97) și repetîndu-se calculele făcute la stabilirea ecuației axei centrale a unui sistem de vectori alunecători; rezultă astfel următoarea *ecuație vectorială a axei centrale a mișcării generale* a unui rigid :

$$\boxed{\bar{r}'_C = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_Q}{\bar{\omega}^2} + \lambda \bar{\omega}}, \qquad (3.99)$$

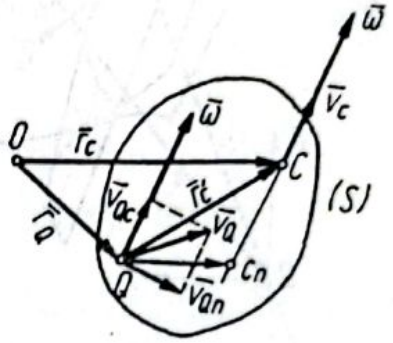


Fig. 3.20.

ecuație reprezentînd și acum o dreaptă trecînd prin punctul $C_n(\bar{r}'_{C_n})$, determinat prin vectorul de poziție

$$\bar{r}'_{C_n} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_Q}{\bar{\omega}^2} \qquad (3.100)$$

și paralelă la vectorul $\bar{\omega} \neq 0$, (fig. 3.20).

Ecuația aceleiași axe centrale în raport cu reperul fix va avea (fig. 3.20), forma :

$$\boxed{\bar{r}_C = \bar{r}_Q + \bar{r}'_C = \bar{r}_Q + \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_Q}{\bar{\omega}^2} + \lambda \bar{\omega}} . \qquad (3.101)$$

39

3.4.4. Axoidele mișcării generale a rigidului

Întrucît vectorii $\bar{v}_Q$, ω și $\bar{r}_Q$ din ecuațiile (3.99) și (3.101) ale axei centrale sînt funcții de timp, este evident că această axă își va schimba în timp poziția și orientarea, atît în raport cu reperul legat

Scanned with CamScanner

de rigid, cît și în reperul fix, generînd astfel două suprafețe riglate numite *axoidele mișcării*, și anume :

Axoida fixă, reprezentată prin suprafața riglată (Σ) (fig. 3.21), generată de axa centrală a mișcării în timpul deplasării ei în reperul fix, *ecuația vectorială a axoidei fixe* fiind deci aceeași ca și a axei centrale scrise în raport cu reperul ($\mathscr{R}$), cu deosebire că punctul C devenind un punct curent al suprafeței, se va renunța la indicele respectiv de la vectorul de poziție, scriindu-se :

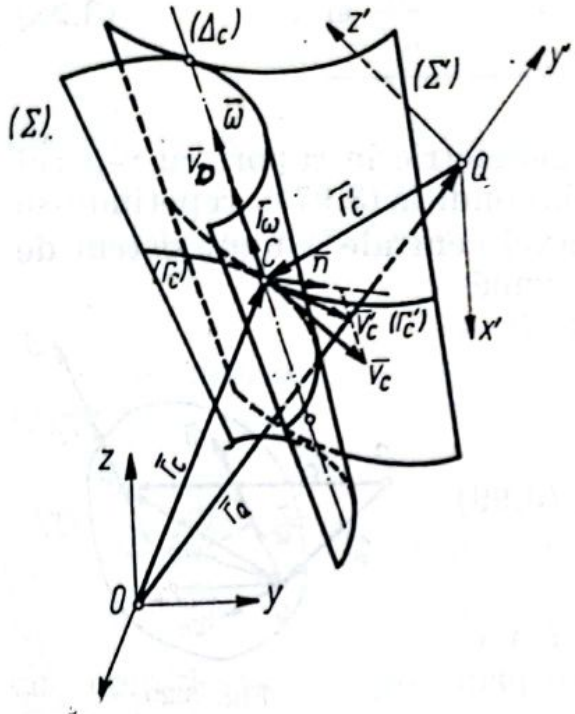


Fig. 3.21.

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_Q + \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_Q}{\bar{\omega}^2} + \lambda \bar{\omega}}, \tag{3.102}$$

cu următoarele ecuații analitice scalare :

$$\boxed{\frac{x - x_Q - \frac{1}{\omega^2}(\omega_y \dot{z}_Q - \omega_z \dot{y}_Q)}{\omega_x} = \frac{y - y_Q - \frac{1}{\omega^2}(\omega_z \dot{x}_Q - \omega_x \dot{z}_Q)}{\omega_y} = \frac{z - z_Q - \frac{1}{\omega^2}(\omega_x \dot{y}_Q - \omega_y \dot{x}_Q)}{\omega_z}}, \tag{3.103}$$

obținute prin proiectarea ecuației (3.102) pe axele fixe și prin eliminarea lui λ între ecuațiile de proiecții.

Axoida mobilă, reprezentată prin suprafața riglată (Σ'), (fig. 3.21), generată de axa centrală a mișcării în timpul deplasării ei în reperul legat de rigid, are *ecuația vectorială parametrică* — aceeași ca și a axei centrale scrisă în raport cu reperul ($\mathscr{R}'$), dar

Scanned with CamScanner

renunțîndu-se la indicele (o) — de forma

$$\boxed{\bar{r}' = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_Q}{\omega^2} + \lambda \bar{\omega}}, \tag{3.104}$$

ei corespunzîndu-i ecuațiile analitice scalare:

$$\boxed{\frac{x' - \frac{1}{\omega^2}(\omega'_y v'_{Qz} - \omega'_z v'_{Qy})}{\omega'_x} = \frac{y' - \frac{1}{\omega^2}(\omega'_z v'_{Qx} - \omega'_x v'_{Qz})}{\omega'_y} = \frac{z' - \frac{1}{\omega^2}(\omega'_x v'_{Qy} - \omega'_y v'_{Qx})}{\omega'_z}}, \tag{3.105}$$

obținute prin proiectarea ecuației (3.104) pe axele reperului $(\mathscr{R}')$ și prin eliminarea lui λ între ecuațiile de proiecții.

Eliminarea timpului între ecuațiile (3.103), sau (3.105), conduce și la ecuațiile analitice directe ale celor două axoide.

În continuare, se va demonstra că cele două axoide sînt în permanență tangente una la alta, tangenta comună fiind chiar axa centrală.

Considerînd un punct C, fix pe axa centrală, el va genera, în mișcarea efectuată odată cu axa centrală, curbele (Γ_C) — pe axoida fixă — și (Γ'_C) — pe axoida mobilă — , (fig. 3.21), între vectorii de poziție ai acestui punct în raport cu originile celor două repere existînd relația:

$$\bar{r}_C = \bar{r}_Q + \bar{r}'_C = \bar{r}_Q + (x'_C \bar{i}' + y'_C \bar{j}' + z'_C \bar{k}'), \tag{3.106}$$

în expresia analitică a vectorului $\bar{r}'_C$ variind, de astă dată, atît versorii $\bar{i}'$, $\bar{j}'$ și $\bar{k}'$, cît și coordonatele x'_C, y'_C și z'_C.

Prin derivarea în raport cu timpul a relației precedente rezultă egalitatea

$$\dot{\bar{r}}_C = \dot{\bar{r}}_Q + (\dot{x}'_C \bar{i}' + \dot{y}'_C \bar{j}' + \dot{z}'_C \bar{k}') + (x'_C \dot{\bar{i}}' + y'_C \dot{\bar{j}}' + z'_C \dot{\bar{k}}'), \tag{3.107}$$

Scanned with CamScanner

cu următoarele semnificații pentru diversele grupuri de termeni:

$$\dot{\bar{r}}_C = \bar{v}_C\,;\ \dot{\bar{r}}_Q = \bar{v}_Q\,;\ \dot{x}'_C\bar{i}' + \dot{y}'_C\bar{j}' + \dot{z}'_C\bar{k}' = \bar{v}'_C \tag{3.108}$$

și

$$x'_C\dot{\bar{i}}' + y'_C\dot{\bar{j}}' + z'_C\dot{\bar{k}}' = x'_C(\bar{\omega} \times \bar{i}') + y'_C(\bar{\omega} \times \bar{j}') + z'_C(\bar{\omega} \times \bar{k}') = \bar{\omega} \times \bar{r}'_C, \tag{3.109}$$

$\bar{v}_C$ fiind viteza punctului C în deplasarea pe curba (Γ_C), orientată după tangenta în C la această curbă și situată în planul tangent în C la axoida fixă (fig. 3.21), iar $\bar{v}'_C$ reprezentînd viteza punctului C în mișcarea efectuată în raport cu reperul $(\mathscr{R}')$, orientată după tangenta în C la curba (Γ'_C) și situată în planul tangent în C la axoida mobilă.

Rezultă deci relația

$$\bar{v}_C = \bar{v}'_C + (\bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}'_C),$$

sau, încă, observînd că suma celor doi termeni din paranteză reprezintă viteza unui punct D al rigidului care coincide, în momentul considerat în figură, cu punctul C situat pe axa centrală, $(\bar{r}'_C \equiv \bar{r}'_D)$, această din urmă viteză fiind orientată după axa centrală, se mai poate scrie

$$\bar{v}_C = \bar{v}'_C + \bar{v}_D. \tag{3.110}$$

Această relație de coplanaritate a vectorilor $\bar{v}_C$, $\bar{v}'_C$ și $\bar{v}_D$, — primii doi situați în planele tangente în C la cele două axoide, iar ultimul fiind situat pe axa centrală, comună ambelor plane tangente —, arată că cele două plane tangente sînt confundate, deci că axoidele sînt tangente între ele în toate punctele axei centrale.

Se poate trage deci concluzia că în timpul mișcării generale a rigidului axoida mobilă se deplasează peste axoida fixă, cele două suprafețe rămînînd însă în permanență tangente una la alta, în lungul axei centrale.

Proiectînd relația (3.110) pe direcția normalei în C la axa centrală și situată în planul tangent comun celor două axoide — direcție determinată prin versorul $\bar{n}$ (fig. 3.21) — și pe direcția axei centrale — ultima determinată prin versorul $\bar{i}_\omega$ al vitezei unghiulare instan-

Scanned with CamScanner

tanee — , rezultă, ținînd seama și de ortogonalitatea vectorilor $\bar{v}_D$ și $\bar{n}$, relațiile

$$\begin{cases} \text{pr}_{\bar{n}}\ \bar{v}_C = \text{pr}_{\bar{n}}\ \bar{v}'_C ; \\ \text{pr}_{\bar{\omega}}\ \bar{v}_C = \text{pr}_{\bar{\omega}}\ \bar{v}'_C + v_D \end{cases} \tag{3.111}$$

care vor explica modul în care se produce deplasarea axoidei mobile peste cea fixă.

Într-adevăr, prima dintre relațiile (3.111) arată că în direcție normală la axa centrală punctul C se deplasează cu aceeași viteză pe ambele axoide, această situație fiind specifică unei deplasări prin *rostogolire pură* : cea de-a doua relație, în schimb, arată că în direcția axei centrale punctul C se deplasează cu viteze diferite pe cele două axoide, această situație fiind caracteristică unei deplasări prin *alunecare pură*, *viteza de alunecare* fiind dată de diferența celor două viteze ale punctului C, adică de viteza punctului D, respectiv, de viteza minimă $\bar{v}_{min}$.

Se poate trage deci concluzia finală că în mișcarea generală a rigidului axoida mobilă se deplasează pe axoida fixă, cu o mișcare de rostogolire în direcție normală la axa centrală și cu o mișcare de alunecare în lungul axei centrale, ultima efectuată cu viteza de alunecare dată de relația

$$\boxed{\bar{v}_{al} = \bar{v}_D = \bar{v}_{min} = \frac{\bar{v}_Q \bar{\omega}}{|\bar{\omega}|}\,\bar{i}_\omega = \frac{\bar{v}_Q \bar{\omega}}{\omega^2}\,\bar{\omega}}\ . \tag{3.112}$$

Problema axoidelor prezintă o importanță deosebită pentru aplicațiile tehnice, deoarece cu ajutorul acestor suprafețe se pot realiza mult mai simplu, în multe cazuri, mecanismele de comandă a unei mișcări prestabilite a unui rigid, de regulă, o unealtă : plecîndu-se de la ecuațiile de mișcare date, se stabilesc ecuațiile celor două axoide, se materializează suprafețele respective și se imprimă apoi suprafeței mobile — de care se leagă invariabil și unealta respectivă — mișcările corespunzătoare, de rostogolire în direcție normală la generatoarea comună și de alunecare în lungul acelei generatoare.

3.4.5. Centrul instantaneu al accelerațiilor

Ideea determinării punctelor de viteză minimă a sugerat și ideea determinării unor puncte ale rigidului în mișcare generală cu accelerații minime și anume egale chiar cu zero.

Scanned with CamScanner

Condiția de existență a unui asemenea punct I cu accelerație zero se va traduce deci matematic prin ecuația vectorială

$$\bar{a}_I = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_I + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'_I) = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_I + (\bar{\omega}\bar{r}'_I)\bar{\omega} - \bar{\omega}^2\bar{r}'_I = 0, \tag{3.113}$$

căreia îi corespunde următorul sistem echivalent de ecuații scalare de proiecție pe axele reperului invariabil legat de rigid, scris, prin ordonarea convenabilă a termenilor, sub forma unui sistem de ecuații algebrice liniare neomogene în coordonatele x'_I, y'_I și z'_I ale punctului I:

$$\begin{aligned}
&-(\omega^2 - \omega_x'^2)x'_I + (\omega'_x\omega'_y - \varepsilon'_z)y'_I + (\omega'_x\omega'_z + \varepsilon'_y)z'_I = -a'_{Qx};\\
&(\omega'_x\omega'_y + \varepsilon'_z)x'_I - (\omega^2 - \omega_y'^2)y'_I + (\omega'_y\omega'_z - \varepsilon'_x)z'_I = -a'_{Qy};\\
&(\omega'_x\omega'_z - \varepsilon'_y)x'_I + (\omega'_y\omega'_z + \varepsilon'_x)y'_I - (\omega^2 - \omega_z'^2)z'_I = -a'_{Qz}.
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Se poate verifica că determinantul coeficienților acestui sistem de ecuații liniare are valoarea

$$\Delta = -(\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon})^2, \tag{3.115}$$

putîndu-se trage de aici concluzia că, întrucît în mișcarea generală a rigidului este satisfăcută condiția

$$\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon} \neq 0, \tag{3.116}$$

($\bar{\omega} \neq 0$; $\bar{\varepsilon} \neq 0$; $\bar{\varepsilon} \neq \lambda\bar{\omega}$), sistemul de ecuații (3.114) admite o soluție unică, determinată, adică, că există realmente un punct I de accelerație zero într-un moment determinat, acest punct purtînd numele de *centru instantaneu al accelerațiilor*.

Denumirea de „centru" se justifică prin faptul că în cazul cînd, în momentul considerat, s-ar putea alege acest punct drept pol în rigid ($Q \equiv I$), atunci pentru accelerația oricărui punct $B(\bar{r}'_{IB} = \overrightarrow{IB})$ al rigidului poate fi scrisă expresia

$$\bar{a} = \bar{a}_B = \bar{a}_I + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_{IB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'_{IB}),$$

sau încă, ținîd seama de modul în care a fost definit punctul I ($\bar{a}_I = 0$), expresia redusă la ultimii doi termeni:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_{IB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'_{IB}) = \bar{a}_{IB}, \tag{3.117}$$

Scanned with CamScanner

care arată că, din punctul de vedere al distribuţiei acceleraţiilor, totul se întîmplă ca şi cum mişcarea rigidului ar rezulta numai dintr-o rotaţie instantanee efectuată în jurul punctului I, (fig. 3.22).

Denumirea de „instantaneu" se explică prin faptul că cele trei coordonate — x'_I y'_I, z'_I — ale punctului I, reprezentînd soluţia sistemului (3.114) de ecuaţii, sînt funcţii de timp prin intermediul proiecţiilor pe axele mobile ale vectorilor $\bar{\omega}$ şi $\bar{\varepsilon}$, ceea ce înseamnă că în fiecare moment un alt punct al rigidului va deveni centru al acceleraţiilor, putîndu-se vorbi deci numai de un centru I la un moment dat.

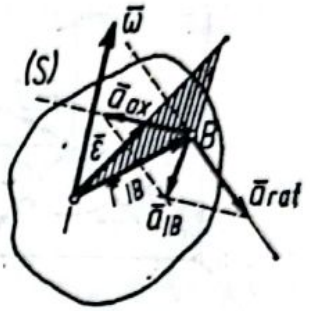


Fig. 3.22.

§ 4. Cinematica unor cazuri particulare de mişcări absolute ale rigidului

Se numesc *mişcări particulare*, acele mişcări ale unui rigid în care, fie datorită unui anumit mod de solicitare, fie datorită utilizării unor mijloace tehnice speciale, cunoscute sub denumirea generală de *cuple cinematice* şi care vor fi examinate ulterior, unii dintre cei 6 parametri de poziţie ai solidului sînt împiedicaţi să varieze, rămînînd constanţi în tot timpul mişcării ; printr-o alegere convenabilă a celor două repere-fix şi invariabil legat de rigid — valorile constante ale parametrilor de poziţie invariabili în timp pot fi făcute chiar egale cu zero.

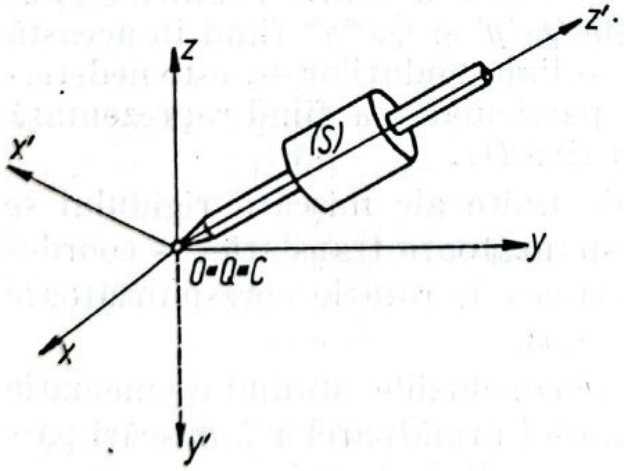


Fig. 4.1.

Astfel, în unele cazuri, mişcarea particulară va rezulta din faptul că cel puţin unul din punctele rigidului, C, (fig. 4.1), va fi imobilizat cu ajutorul unor cuple cinematice adecvate ; în asemenea situaţii, alegerea punctului C ca origine comună a celor două repere $(C \equiv Q \equiv 0)$ are drept consecinţă condiţiile

$$x_Q = y_Q = z_Q \equiv 0, \tag{4.1}$$

Scanned with CamScanner

astfel că ecuațiile finite ale mișcării rigidului respectiv se vor reduce numai la cele care determină rotația instantanee în jurul punctului C (unghiurile lui Euler exprimate ca funcții de timp).

În alte cazuri, mișcarea se efectuează astfel încît axa de rotație corespunzătoare unui anumit pol Q al rigidului își păstrează direcția fixă și în rigid — deci în reperul $(\mathscr{R}')$ invariabil atașat acestuia — și în spațiu — deci în reperul fix; în aceste cazuri, alegerea acestei axe ca axă Qz' în rigid și orientarea axei fixe Oz după paralela la această axă (fig. 4.2), conduce la condițiile

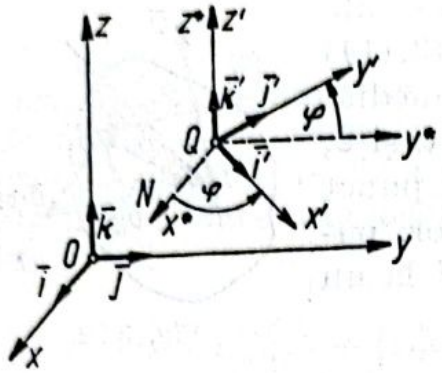


Fig. 4.2.

$$\psi = \theta \equiv 0, \tag{4.2}$$

cu consecințele

$$\Psi = \Theta = \mathbf{E} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \text{ și deci: } \mathbf{A} = \Phi, \tag{4.3}$$

— unde $\mathbf{E}$ este matricea unitară —, prima dintre condițiile (4.2) fiind justificată de faptul că planele $Qx'y'$ și Qx^*y^* fiind în această situație confundate, intersecția lor — linia nodurilor —, este nedeterminată, putînd fi considerată, în particular, ca fiind reprezentată chiar prin axa Qx^*, paralelă la axa fixă Ox.

În asemenea situații, ecuațiile finite ale mișcării rigidului se vor reduce deci numai la cele corespunzătoare translației — coordonatele carteziene ale polului Q — și la cea de rotație corespunzătoare unicului unghi Euler variabil, $\varphi = \varphi(t)$.

În continuare, vor fi aplicate concluziile studiului cinematic al mișcării generale a rigidului la studiul următoarelor 5 mișcări particulare, întîlnite curent în aplicațiile tehnice:

— mișcarea de translație;
— mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe;
— mișcarea în jurul unui punct fix;
— mișcarea plan-paralelă;
— mișcarea elicoidală.

Scanned with CamScanner

4.1. *Cinematica mișcării de translație a rigidului*

Se numește *mișcare de translație* a unui rigid, mișcarea în care, fie datorită modului particular de solicitare, ce va fi examinat în dinamică, fie datorită cuplelor cinematice aplicate, unghiurile lui Euler rămîn în permanență constante.

4.1.1. Parametrii de poziție ai rigidului în translație

Prin alegerea axelor reperului fix astfel încît să coincidă, în momentul inițial, cu axele reperului invariabil legat de rigid, unghiurile lui Euler vor avea în permanență valorile zero, rezultînd de aici următoarele *ecuații finite ale mișcării de translație a rigidului* :

$$\boxed{x_Q = x_Q(t) : y_Q = y_Q(t) ;\ z_Q = z_Q(t)}\ , \tag{4.4}$$

aceste condiții reducîndu-se la primele două în cazul unei *translații plane*, (polul Q se deplasează numai în planul Oxy) și numai la prima, în cazul *translației rectilinii* (polul Q se deplasează numai în lungul axei Ox).

Datorită condițiilor acestei mișcări particulare a rigidului ($\psi = \varphi = \theta \equiv 0$; $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Theta} = \mathbf{E}$) tabelul cosinusurilor directoare, respectiv matricea lor $\mathbf{A}$, vor lua formele particulare :

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}'$	1	0	0
$\bar{j}'$	0	1	0
$\bar{k}'$	0	0	1

respectiv : $\mathbf{A} = \mathbf{E} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. (4.5)

4.1.2. Parametrii cinematici ai rigidului în mișcare de translație

1°. **Parametrii cinematici de ordinul întîi** ai acestei mișcări particulare satisfac condițiile (fig. 4.3) ;

$$\boxed{\bar{v}_Q = \dot{x}_Q\bar{i} + \dot{y}_Q\bar{j} + \dot{z}_Q\bar{k} \neq 0 ;\ \bar{\omega} \equiv 0,} \tag{4.6}$$

Scanned with CamScanner

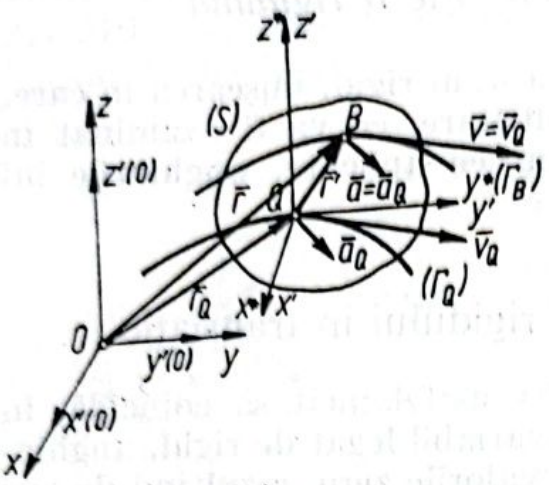


Fig. 4.3.

ultima conducînd la concluzia

$$\dot{\bar{r}}' = \bar{\omega} \times \bar{r}' = 0,$$

cu consecința

$$\bar{r}' = \bar{r}'^{\circ} = \overrightarrow{\text{const}},$$

care ilustrează următoarea proprietate importantă a acestei mișcări particulare:

În mișcarea de translație a unui rigid orice segment de dreaptă invariabil legat de solid rămîne paralel cu el însuși.

2°. **Parametrii cinematici de ordinul doi** ai mișcării de translație au valorile

$$\boxed{\bar{a}_Q = \ddot{x}_Q\bar{i} + \ddot{y}_Q\bar{j} + \ddot{z}_Q\bar{k} \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}; \quad \bar{\varepsilon} \equiv 0}, \tag{4.7}$$

accelerația polului Q fiind egală cu zero numai în cazul cu totul particular al translației rectilinii uniforme.

4.1.3. Problemele cinematicii rigidului în mișcare de translație

1°. **Determinarea traiectoriei unui punct** B $(\bar{r}')$. Ecuației vectoriale parametrice a traiectoriei, avînd și acum forma generală (3.67), adică

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_Q + \bar{r}'}, \tag{4.8}$$

îi vor corespunde, în condițiile acestei mișcări ($\mathbf{A} = \mathbf{E}$) următoarele ecuații parametrice sclare

$$\boxed{x = x_Q + x'; \quad y = y_Q + y'; \quad z = z_Q + z'}, \tag{4.9}$$

Scanned with CamScanner

sau, în transcrierea matriceală ($\mathbf{A}^T\mathbf{r}' = \mathbf{E}\mathbf{r}' = \mathbf{r}'$):

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{r}'}. \tag{4.10}$$

2°. Determinarea vitezei unui punct B $(\bar{r}')$. În condițiile cinematice (4.6), expresiile generale ale vitezei — expresia vectorială (3.74) și expresia matriceală (3.77) — iau următoarele forme particulare:

$$\boxed{\bar{v} = \bar{v}_Q}, \tag{4.11}$$

cu proiecțiile pe axe având expresiile

$$\boxed{v'_x = v'_{Qx} = v_{Qx} = \dot{x}_Q\,;\quad v'_y = v'_{Qy} = v_{Qy} = \dot{y}_Q\,;\quad v'_z = v'_{Qz} = v_{Qz} = \dot{z}_Q}, \tag{4.12}$$

respectiv

$$\boxed{\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_Q = \mathbf{v}_Q}. \tag{4.13}$$

3°. Determinarea acceleraţiei unui punct $B(\bar{r}')$. Ca urmare a condițiilor cinematice (4.8), expresiile generale (3.84) și (3.88) ale acceleraţiei iau formele particulare

$$\boxed{\bar{a} = \bar{a}_Q}, \tag{4.14}$$

cu proiecțiile pe axe:

$$\boxed{a'_x = a'_{Qx} = a_{Qx} = \ddot{x}_Q\,;\ a'_y = a'_{Qy} = a_{Qy} = \ddot{y}_Q\,;\ a'_z = a'_{Qz} = a_{Qz} = \ddot{z}_Q}, \tag{4.15}$$

respectiv

$$\boxed{\mathbf{a}' = \mathbf{a}'_Q = \mathbf{a}_Q}. \tag{4.16}$$

Scanned with CamScanner

Relațiile (4.9), (4.11) și (4.14) permit să se facă o nouă caracterizare a mișcării de translație a rigidului (fig. 4.3): În mișcarea de translație a unui rigid toate punctele lui descriu traiectorii identice, cu aceleași viteze și cu aceleași accelerații.

4.1.4. Problema axei centrale și a axoidelor

Absența, în această mișcare particulară, a parametrului cinematic $\bar{\omega}$ arată că în mișcarea de translație a rigidului nu au sens noțiunile de axă centrală și de axoide.

4.1.5. Problema centrului instantaneu al accelerațiilor

Relația (4.14) permite să se tragă concluzia că în mișcarea de translație sau nu există centru instantaneu al accelerațiilor — atunci cînd mișcarea polului Q este accelerată — , sau toate punctele rigidului sînt centre instantanee ale accelerațiilor — atunci cînd polul Q execută o mișcare rectilinie uniformă.

4.1.6. Aplicație: Translația rectilinie uniform variată

Alegînd axa după care se deplasează polul Q ca axă Ox, această translație va fi caracterizată prin următoarea formă a ecuației sale finite:

$$\boxed{x_Q = x_Q^\circ + v_Q^\circ t + \frac{1}{2} a_Q^\circ t^2}, \tag{4.17}$$

x_Q°, v_Q°, și a_Q° fiind constante, avînd semnificațiile:

$$x_Q^\circ = x_Q(0)\,;\; v_Q^\circ = v_Q(0) = \dot{x}_Q(0)\,;\; a_Q^\circ = a_Q(0) = \ddot{x}_Q(0). \tag{4.18}$$

În funcție de semnele și valorile acestor constante inițiale, vor putea fi întîlnite, ca și în cinematica mișcării rectilinii uniform variate a punctului, următoarele situații:

Cazul I: *translația rectilinie uniform accelerată cu viteză inițială*, corespunzătoare condiției:

$$v_Q^\circ a_Q^\circ > 0\,; \tag{4.19}$$

Scanned with CamScanner

Cazul II : *translația rectilinie uniform încetinită* în cazul

$$v_Q^\circ a_Q^\circ < 0 ; \tag{4.20}$$

Cazul III a : translația rectilinie uniform accelerată fără viteză inițială, în condițiile

$$v_Q^\circ = 0 ; \quad a_Q^\circ \neq 0 ; \tag{4.21}$$

Cazul III b : translația rectilinie uniformă, corespunzătoare condițiilor :

$$v_Q^\circ \neq 0 ; \quad a_Q^\circ = 0. \tag{4.22}$$

4.2. *Cinematica mișcării de rotație în jurul unei axe fixe a rigidului*

Mișcarea unui rigid este numită *rotație în jurul unei axe fixe* atunci cînd două puncte ale lui, C_1 și C_2, (fig. 4.4), sînt imobilizate în spațiu cu ajutorul unor cuple speciale numite *lagăre*, dreapta ce unește centrele C_1 și C_2 ale acestor lagăre fiind *axa de rotație* ; aceste lagăre, care vor fi examinate mai îndeaproape în dinamică, se reprezintă schematic ca în fig. 4.4, (Lg_2) fiind un *lagăr cilindric*, iar (Lg_1) un *lagăr pivot*, care împiedică și deplasarea rigidului în lungul axei de rotație.

4.2.1. Parametrii de poziție ai rigidului în rotație în jurul unei axe fixe

Prin alegerea centrului unuia din lagăre ca origine comună a reperelor ($\mathscr{R}'$) și ($\mathscr{R}$), (în fig. 4.4, $Q \equiv O \equiv C_1$), și a axei de rotație, fixă și în rigid și în spațiu, ca axă comună $Qz' \equiv Oz$, ($x_Q = y_Q = z_Q \equiv \equiv 0$; $\psi = \theta \equiv 0$), parametrii de poziție ai rigidului se reduc numai la unghiul de rotație proprie, relația

$$\boxed{\varphi = \varphi(t),} \tag{4.23}$$

reprezentînd deci *ecuația finită a mișcării de rotație în jurul unei axe fixe a rigidului.*

În condițiile acestei mișcări particulare, ($\psi = \theta = 0$; $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{E}$), tabelul, respectiv matricea cosinusurilor directoare ale axelor

Scanned with CamScanner

reperului legat de rigid în raport cu reperul fix vor lua formele particulare

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}'$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
$\bar{j}'$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\bar{k}'$	0	0	1

, respectiv : $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{\Phi}} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. (4.24)

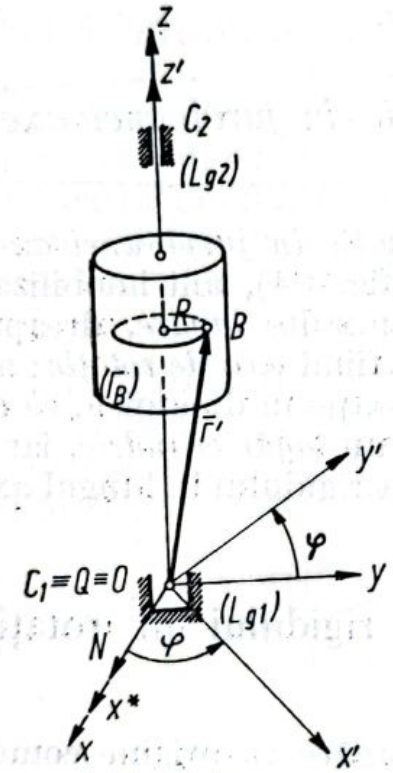


Fig. 4.4.

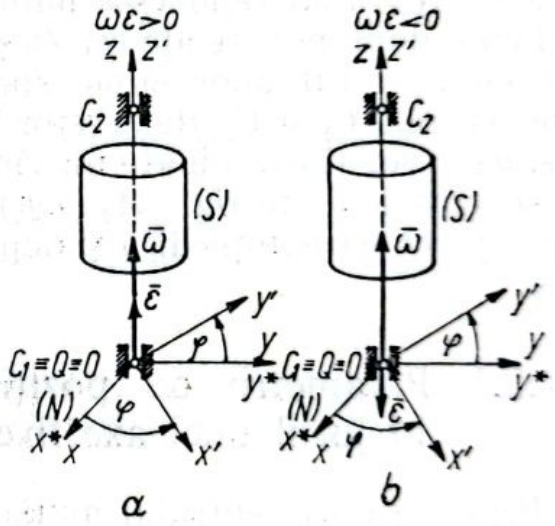


Fig. 4.5.

4.2.2. Parametrii cinematici ai rigidului în mișcare de rotație în jurul unei axe fixe

1°. Parametrii cinematici de ordinul întîi. În condițiile acestei mișcări ($x_Q = y_Q = z_Q \equiv 0$; $\psi = 0 \equiv 0$), vor rezulta următoarele valori ale parametrilor cinematici de ordinul întîi :

$$\boxed{\bar{v}_Q \equiv 0\,;\ \bar{\omega} = \dot{\varphi}\,\bar{k}' = \dot{\varphi}\bar{k} = \omega\bar{k}' \neq 0}\ , \qquad (4.25)$$

Scanned with CamScanner

vectorul $\bar{\omega}$ fiind reprezentat în fig. 4.5, *a* şi *b* în ipoteza unei rotaţii efectuate în sens direct ($\omega = \dot{\varphi} > 0$).

2°. **Parametrii cinematici de ordinul doi.** În baza condiţiilor cinematice (4.25) rezultă următoarele valori ale parametrilor cinematici de ordinul doi:

$$\boxed{\bar{a}_Q \equiv 0\,;\ \ \bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\,\bar{k}' = \ddot{\varphi}\,\bar{k} = \varepsilon\,\bar{k}' \begin{matrix} \neq 0 \\ = 0 \end{matrix}}\,; \tag{4.26}$$

vectorul $\bar{\varepsilon}$ fiind reprezentat în fig. 4.5, *a* pentru rotaţia accelerată ($\omega\varepsilon > 0$) şi în fig. 4.5, *b* pentru rotaţia încetinită ($\omega\varepsilon < 0$); absenţa, în schiţele cinematice ale rigidelor în rotaţie în jurul unor axe fixe, a vectorului $\bar{\varepsilon}$, va indica existenţa rotaţiilor uniforme în jurul axelor respective.

4.2.3. Problemele cinematicii rigidului în mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe

1°. **Determinarea traiectoriei unui punct** $B(\bar{r}')$. Deşi în cazul acestei mişcări particulare traiectoriile punctelor rigidului sînt cunoscute — toate sînt cercuri normale la axa de rotaţie şi cu centrele pe axa de rotaţie — vor fi stabilite totuşi ecuaţiile parametrice ale traiectoriei unui punct $B(\bar{r}')$ arbitrar al unui rigid în această mişcare, pentru a se da posibilitatea determinării poziţiei punctului în spaţiu într-un moment oarecare *t*.

În condiţiile acestei mişcări, ($\bar{r}_Q \equiv 0$; $\mathbf{A} = \mathbf{\Phi}$), ecuaţia vectorială parametrică generală (3.67) va lua forma particulară

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}'}\,, \tag{4.27}$$

ei corespunzîndu-i ecuaţiile scalare parametrice

$$\boxed{x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\,;\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\,;\ z = z'}\,, \tag{4.28}$$

sau, în exprimarea matriceală

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{r}'}\,. \tag{4.29}$$

Scanned with CamScanner

2°. **Determinarea vitezei unui punct** $B(\bar{r}')$. Avînd în vedere condițiile cinematice (4.25), va rezulta următoarea formă particulară a expresiei generale (3.74) a vitezei

$$\boxed{\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}' = \bar{v}_{rot} = \bar{v}_{QB}}, \tag{4.30}$$

a cărei orientare este arătată în fig. 4.6 și în fig. 4.7 *a* și *b*.

Calculul, în aplicații, al vitezei se efectuează :

— *cu ajutorul modulului ei*, cînd se cunoaște raza R a cercului descris de punct ($R = |\bar{r}'|\sin\ (\bar{\omega},\bar{r}') = |\bar{r}'_n|$), acest modul avînd valoarea :

$$\boxed{|\bar{v}| = |\bar{\omega} \times \bar{r}'| = R|\bar{\omega}|}; \tag{4.31}$$

— *cu ajutorul proiecțiilor ei pe axele reperului legat de rigid*, proiecții avînd expresiile

$$\boxed{v'_x = -\omega y';\ v'_y = \omega x';\ v'_z = 0}, \tag{4.32}$$

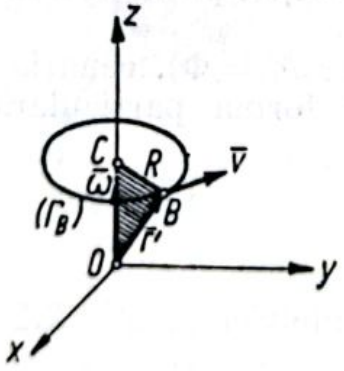


Fig. 4.6.

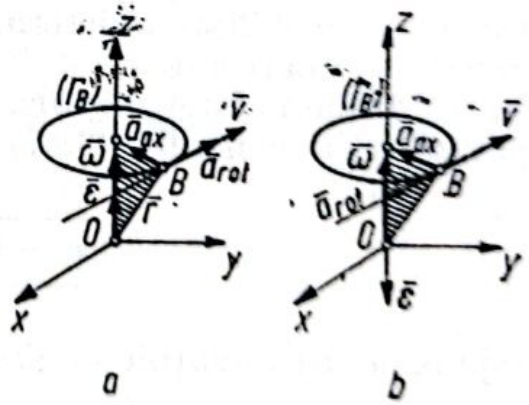


Fig. 4.7.

sau, în exprimarea matriceală

$$\boxed{\mathbf{v}' = \tilde{\boldsymbol{\omega}}'\,\mathbf{r}'}, \tag{4.33}$$

Scanned with CamScanner

cu matricea antisimetrică a vectorului $\bar{\omega}$ redusă acum la forma

$$\tilde{\omega}' = \tilde{\omega} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{4.34}$$

3°. Determinarea acceleraţiei punctului $B(\bar{r}')$. Ţinînd seama de condiţiile cinematice (4.26), rezultă următoarea formă particulară, corespunzătoare mișcării de rotaţie în jurul unei axe fixe, a expresiei generale (3.84) a acceleraţiei unui punct $B(\bar{r}')$:

$$\boxed{\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' - \bar{\omega}^2 \bar{r}'_n = \bar{a}_{rot} + \bar{a}_{ax} = \bar{a}_{QB}}, \tag{4.35}$$

orientările celor două componente fiind arătate în fig. 4.7, *a* pentru rotaţia accelerată şi în fig. 4.7, *b* pentru rotaţia încetinită.

Calculul, în aplicaţii, al acceleraţiei se efectuează:

— *cu ajutorul modulilor componentelor ei*, cînd se cunoaşte raza cercului descris de punct, scriindu-se

$$|\bar{a}_{rot}| = |\bar{\varepsilon} \times \bar{r}'| = R|\bar{\varepsilon}|; \quad |\bar{a}_{ax}| = |-\omega^2 \bar{r}'_n| = R\omega^2, \tag{4.36}$$

şi deci, avînd în vedere ortogonalitatea componentelor:

$$\boxed{|\bar{a}| = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}; \tag{4.37}$$

— *cu ajutorul proiecţiilor ei pe axele reperului legat de rigid*, cînd se cunosc coordonatele punctului B în raport cu acest reper, aceste proiecţii avînd acum forma

$$\boxed{a'_x = -\varepsilon y' - \omega^2 x'; \; a'_y = \varepsilon x' - \omega^2 y'; \; a'_z = 0}, \tag{4.38}$$

sau, în exprimarea matriceală

$$\boxed{\mathbf{a}' = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}' \mathbf{r}' + (\bar{\omega}\bar{r}') \; \boldsymbol{\omega}' - \omega^2 \mathbf{r}'}, \tag{4.39}$$

Scanned with CamScanner

cu matricea antisimetrică a vectorului $\bar{\varepsilon}$ avînd forma

$$\tilde{\varepsilon}' = \tilde{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} 0 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{4.40}$$

4.2.4. Problema axei centrale a mișcării și a axoidelor

Deoarece în condițiile cinematice (4.25) viteza minimă, dată de relația (3.98), ia valoarea zero :

$$\bar{v}_{min} = \frac{\bar{v}_Q \bar{\omega}}{\bar{\omega}^2} \bar{\omega} = 0, \tag{4.41}$$

iar ecuațiile vectoriale (3.99) și (3.101) — ultima cu $\bar{r}_Q \equiv 0$ — se reduc numai la termenul coliniar cu vectorul $\bar{\omega}$, adică

$$\bar{r}_C = \bar{r}'_C = \lambda \bar{\omega},$$

se poate trage concluzia că în cazul mișcării de rotație în jurul unei axe fixe, axa centrală a mișcării coincide cu axa de rotație, iar axoidele degenerează în două drepte confundate și ele cu axa de rotație.

4.2.5. Problema centrului instantaneu al accelerațiilor

Coliniaritatea vectorilor $\bar{\omega}$ și $\bar{\varepsilon}$, deci egalitatea cu zero a determinantului $\Delta = -(\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon})^2$ în cazul acestei mișcări, precum și absența termenului $\bar{a}_Q$, arată că în mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe există o infinitate de centre instantanee ale accelerațiilor ; pe de altă parte, expresia (4.37) a modulului accelerației, în care, în expresia de sub radical cel puțin ω este diferit de zero, arată că locul geometric al acestor puncte cu accelerație zero trebuie să se caracterizeze prin condiția $R = 0$.

Se poate trage deci concluzia că în mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe există o infinitate de centre instantanee ale accelerațiilor, locul lor geometric fiind axa de rotație.

Scanned with CamScanner

4.2.6. Aplicație: Mișcarea de rotație uniform variată

Ecuația finită a acestei mișcări de rotație are forma

$$\boxed{\varphi = \varphi^\circ + \omega^\circ t + \frac{1}{2}\varepsilon^\circ t^2}, \tag{4.42}$$

cu următoarele semnificații ale constantelor φ°, ω° și ε°:

$$\varphi^\circ = \varphi(0); \quad \omega^\circ = \omega(0) = \dot{\varphi}(0); \quad \varepsilon^\circ = \varepsilon(0) = \ddot{\varphi}(0). \tag{4.43}$$

Ca și în cazul mișcării circulare uniform variate, vor fi întîlnite și aici situațiile:

Cazul I: *mișcarea de rotație uniform accelerată cu viteză unghiulară inițială*, în cazul

$$\omega^\circ \varepsilon^\circ > 0; \tag{4.44}$$

Cazul II: *mișcarea de rotație uniform încetinită*, caracterizată prin condiția

$$\omega^\circ \varepsilon^\circ < 0; \tag{4.45}$$

Cazul III a: *mișcarea de rotație uniform accelerată fără viteză unghiulară inițială* în condițiile

$$\omega^\circ = 0; \quad \varepsilon^\circ \neq 0; \tag{4.46}$$

Cazul III b: *mișcarea de rotație uniformă*, în cazul

$$\omega^\circ \neq 0; \quad \varepsilon^\circ = 0. \tag{4.47}$$

În ultima situație se mai folosește încă, în locul noțiunii de viteză unghiulară noțiunea de *turație*, reprezentînd numărul n de rotații complete efectuate de rigid într-un minut; un calcul analog celui folosit la mișcarea circulară uniformă a punctului conduce la următoarea relație între viteza unghiulară și turația n:

$$\boxed{|\bar{\omega}| = \frac{\pi n}{30}\ (s^{-1})}, \tag{448}$$

4.3. Cinematica mișcării în jurul unui punct fix a rigidului

Deplasarea unui rigid este numită *mișcare în jurul unui punct fix*, atunci cînd un punct al său este imobilizat în spațiu cu ajutorul unei cuple cinematice de tip *articulație sferică*, reprezentată schematic în fig. 4.8.

Scanned with CamScanner

4.3.1. Parametrii de poziție ai rigidului cu punct fix

Prin alegerea punctului imobilizat ca origine comună a celor două repere — fix și invariabil legat de rigid ($O \equiv Q \equiv C$) —, parametrii de poziție ai rigidului se reduc numai la cele trei unghiuri ale lui Euler, *ecuațiile finite ale mișcării rigidului în jurul unui punct fix* având deci formele :

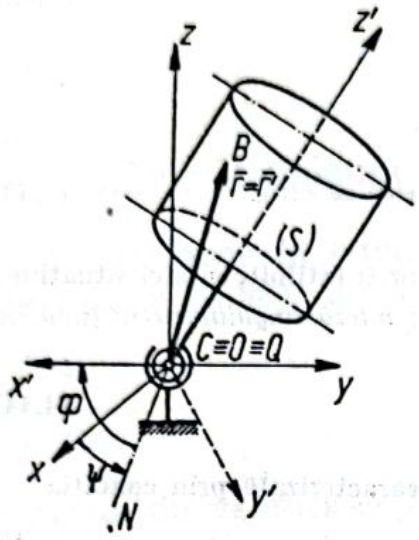


Fig. 4.8.

$$\boxed{\psi = \psi(t)\,;\ \varphi = \varphi(t)\,;\ \theta = \theta(t).} \qquad (4.49)$$

Se înțelege că în această situație, tabelul cosinusurilor directoare ale axelor reperului ($\mathscr{R}'$) în raport cu reperul fix, respectiv matricea acestor cosinusuri directoare, își vor păstra formele generale (3.3), cu cosinusurile directoare date de relațiile (3.13).

4.3.2. Parametrii cinematici ai rigidului în mișcare în jurul unui punct fix

1°. Parametrii cinematicī de ordinul întîi. Avînd în vedere coincidența, în permanență, a originilor celor două repere, ($x_Q = y_Q = z_Q \equiv 0$), se pot scrie următoarele condiții pentru parametrii cinematici de ordinul întîi ai acestei mișcări particulare :

$$\boxed{\bar{v}_Q \equiv 0\,;\ \bar{\omega} = \dot{\psi}\bar{k} + \dot{\varphi}\bar{k}' + \dot{\theta}\bar{n} \neq 0}\,. \qquad (4.50)$$

2°. Parametrii cinematici de ordinul doi. În baza condițiilor cinematice precedente, rezultă următoarele valori pentru parametrii cinematici de ordinul doi ai acestei mișcări particulare :

$$\boxed{\bar{a}_Q \equiv 0\,;\ \bar{\varepsilon} = \ddot{\psi}\bar{k} + \ddot{\varphi}\bar{k}' + \ddot{\theta}\bar{n} + \bar{\omega}_p \times \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_n \times \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_p \times \bar{\omega}_n \neq 0.} \qquad (4.51)$$

Scanned with CamScanner

4.3.3. Problemele cinematicii rigidului în mișcare în jurul unui punct fix

1°. **Determinarea traiectoriei unui punct** $B(\bar{r}')$. În condițiile acestei mișcări particulare ($\bar{r}_Q \equiv 0$), ecuația vectorială parametrică generală a traiectoriei unui punct arbitrar al rigidului capătă forma particulară

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}'}, \tag{4.52}$$

ei corespunzîndu-i ecuațiile parametrice scalare:

$$\boxed{x = x'\alpha_{xx} + y'\alpha_{yx} + z'\alpha_{zx};\ y = x'\alpha_{xy} + y'\alpha_{yy} + z'\alpha_{zy};\ z = x'\alpha_{xz} + y'\alpha_{yz} + z'\alpha_{zz}} \tag{4.53}$$

sau, în transcrierea matriceală

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{A}^T \mathbf{r}'}. \tag{4.54}$$

2°. **Determinarea vitezei unui punct** $B(\bar{r}')$. Avînd în vedere condițiile cinematice (4.50), rezultă următoarea formă particulară a expresiei vectoriale generale (3.74) a vitezei unui punct $B(\bar{r}')$ al rigidului:

$$\boxed{\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}' = \bar{v}_{rot} = \bar{v}_{QB}}, \tag{4.55}$$

orientarea acestei viteze fiind arătată în fig. 4.9.

Calculul vitezei în aplicații se face cu ajutorul proiecțiilor ei pe axele reperului legat de rigid:

$$\boxed{v'_x = \omega'_y z' - \omega'_z y';\ v'_y = \omega'_z x' - \omega'_x z';\ v'_z = \omega'_x y' - \omega'_y x'}, \tag{4.56}$$

sau, în transcrierea matriceală:

$$\boxed{\mathbf{v}' = \tilde{\boldsymbol{\omega}}' \mathbf{r}'}. \tag{4.57}$$

3°. **Determinarea accelerației punctului** $B(\bar{r}')$. Avînd în vedere condițiile cinematice (4.51), se obține următoarea formă particulară

Scanned with CamScanner

a expresiei vectoriale generale (3.84) a acceleraţiei unui punct $B(\bar{r}')$ al rigidului:

$$\boxed{\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' - \bar{\omega}^2 \bar{r}'_n = \bar{a}_{rot} + \bar{a}_{ax} = \bar{a}_{QB}}, \tag{4.58}$$

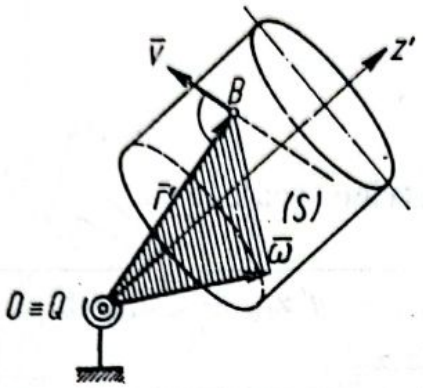


Fig. 4.9.

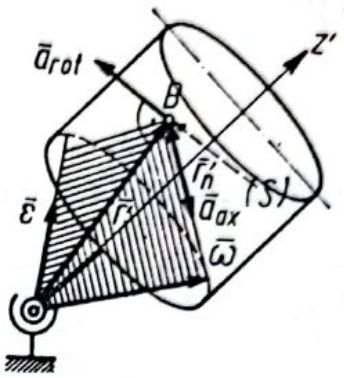


Fig. 4.10.

cele două componente ale acceleraţiei fiind reprezentate în fig. 4.10 pentru parametrii cinematici indicaţi.

Proiecţiile pe axele reperului $(\mathscr{R}')$ ale acceleraţiei punctului $B(\bar{r}')$ au expresiile

$$\boxed{\begin{aligned} a'_x &= \varepsilon'_y z' - \varepsilon'_z y' + (\omega'_x x' + \omega'_y y' + \omega'_z z')\omega'_x - \omega^2 x' \\ a'_y &= \varepsilon'_z x' - \varepsilon'_x z' + (\omega'_x x' + \omega'_y y' + \omega'_z z')\omega'_y - \omega^2 y' \\ a'_z &= \varepsilon'_x y' - \varepsilon'_y x' + (\omega'_x x' + \omega'_y y' + \omega'_z z')\omega'_z - \omega^2 z' \end{aligned}} \tag{4.59}$$

cu transcrierea matriceală:

$$\boxed{\mathbf{a}' = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}' \mathbf{r}' + (\bar{\omega}\bar{r}')\boldsymbol{\omega}' - \omega^2 \mathbf{r}'}. \tag{4.60}$$

4.3.4. Problema axei centrale a mişcării şi a axoidelor

Condiţiile cinematice (4.50), precum şi coincidenţa originilor reperelor $(\mathscr{R}')$ şi $(\mathscr{R})$, $(\bar{r}_Q \equiv 0)$, conduc la concluziile

$$\bar{v}_{min} = \frac{\bar{v}_Q \bar{\omega}}{\bar{\omega}^2} \bar{\omega} = 0 \tag{4.61}$$

Scanned with CamScanner

și :

$$\boxed{\bar{r}_C = \bar{r}'_C = \lambda\,\bar{\omega}}, \tag{4.62}$$

rezultînd de aici că axa centrală a acestei mișcări particulare, definită acum ca loc geometric al punctelor de viteză zero, coincide cu axa instantanee de rotație corespunzătoare punctului imobilizat $C \equiv Q \equiv O$; aceasta înseamnă că axoidele acestei mișcări sînt două suprafețe conice, (Σ') și (Σ), (fig. 4.11), axoida mobilă deplasîndu-se numai prin rostogolire pură ($\bar{v}_{al} = \bar{v}_{m/n} = 0$), pe axoida fixă, în direcția normală la axa instantanee de rotație.

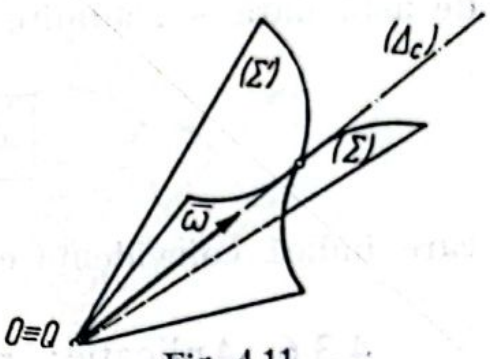


Fig. 4.11.

Axoida mobilă, numită și *con polodic*, este determinată prin ecuația parametrică vectorială

$$\boxed{\bar{r}' = \lambda\,\bar{\omega}}, \tag{4.63}$$

căreia îi corespund ecuațiile scalare

$$\boxed{\frac{x'}{\omega'_x} = \frac{y'}{\omega'_y} = \frac{z'}{\omega'_z}}, \tag{4.64}$$

iar axoida fixă, numită și *con herpolodic*, are ecuația vectorială parametrică

$$\boxed{\bar{r} = \lambda\,\bar{\omega}}, \tag{4.65}$$

cu ecuațiile scalare parametrice echivalente

$$\boxed{\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}}. \tag{4.66}$$

Scanned with CamScanner

4.3.5. Problema centrului instantaneu al accelerațiilor

Întrucît în cazul acestei mișcări particulare rezultă condițiile

$$\bar{a}_Q = 0\,;\ \bar{\omega} \times \bar{\varepsilon} \neq 0 \quad \text{și deci} \quad \Delta = -(\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon})^2 \neq 0, \tag{4.67}$$

se poate trage concluzia că sistemul (3.114) de ecuații liniare în coordonatele centrului instantaneu al accelerațiilor — ecuații omogene de astă dată — , admite numai soluția banală

$$\boxed{x'_I = y'_I = z'_I = 0}, \tag{4.68}$$

care indică coincidența centrului I al accelerațiilor cu polul $Q \equiv C$.

4.3.6. Aplicație: mișcarea de precesie regulată

Se numește *precesie regulată*, mișcarea rigidului cu un punct fix, determinată prin ecuațiile finite

$$\boxed{\psi = \omega_p t\,;\ \varphi = \omega_r t\,;\ \theta = \theta^\circ}, \tag{4.69}$$

ω_p, ω_r și θ° fiind constante, această mișcare prezentînd următoarele trei proprietăți:

Proprietatea I: *viteza unghiulară are modulul constant.* Observînd că expresia acestei viteze are forma

$$\bar{\omega} = \dot{\psi}\bar{k} + \dot{\varphi}\bar{k}' = \omega_p\bar{k} + \omega_r\bar{k}' = \bar{\omega}_p + \bar{\omega}_r, \tag{4.70}$$

precesia numindu-se *directă*, sau *inversă*, după cum unghiul format de vectorii $\bar{\omega}_p$ și $\bar{\omega}_r$ este ascuțit (ca în fig. 4.12), sau obtuz, rezultă pentru modulul vitezei unghiulare valoarea

$$\boxed{|\bar{\omega}| = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_r^2 + 2|\omega_p||\omega_r|\cos\theta^\circ} = \text{const.}} \tag{4.71}$$

Proprietatea a II-a: *accelerația unghiulară are modulul constant și este orientată după linia nodurilor.* În condițiile acestei mișcări, ($\dot{\theta} \equiv 0\,;\ \ddot{\psi} = \ddot{\varphi} = \ddot{\theta} \equiv 0$), expresia (4.51) a accelerației unghiulare se reduce numai la termenul

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = \bar{\omega}_p \times \bar{\omega}_r}, \tag{4.72}$$

rezultînd de aici expresia

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = |\bar{\omega}_p|\,|\bar{\omega}_r|\sin(\bar{\omega}_p, \bar{\omega}_r)\bar{l}_\varepsilon}, \tag{4.73}$$

cu $\bar{l}_\varepsilon = \pm\bar{n}$ (în fig. 4.12, $\bar{l}_\varepsilon = -\bar{n}$).

Scanned with CamScanner

Proprietatea a III-a : Axoidele mișcării sînt conuri circulare drepte, cu axele reprezentate prin axele de coordonate Oz' și Oz (fig. 4.13).

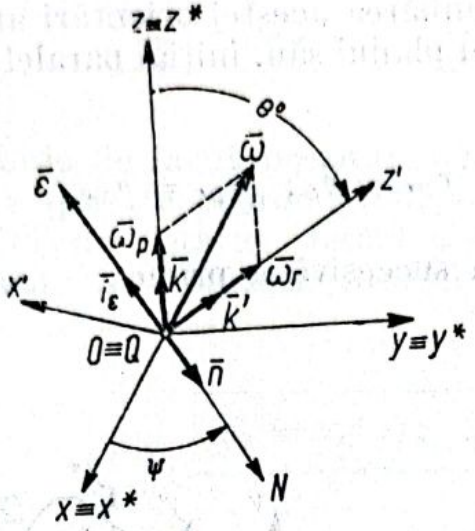


Fig. 4.12.

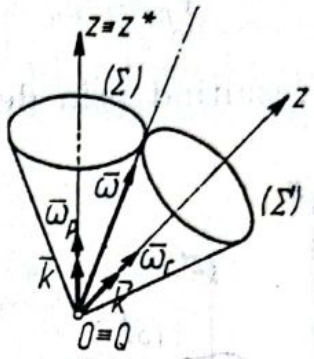


Fig. 4.13.

Proprietatea ultimă este justificată de egalitățile

$$\cos(\bar{\omega}, \bar{k}') = \frac{\bar{\omega}\,\bar{k}'}{|\bar{\omega}|} = \frac{\omega_p \cos\theta^\circ + \omega_r}{\sqrt{\omega_p^2 + \omega_r^2 + 2|\omega_p|\,|\omega_r|\cos\theta^\circ}} = \text{const}, \qquad (4.74)$$

respectiv :

$$\cos(\bar{\omega}, \bar{k}) = \frac{\bar{\omega}\,\bar{k}}{|\bar{\omega}|} = \frac{\omega_p + \omega_r \cos\theta^\circ}{\sqrt{\omega_p^2 + \omega_r^2 + 2|\omega_p|\,|\omega_r|\cos\theta^\circ}} = \text{const}. \qquad (4.75)$$

4.4. *Cinematica mișcării plan-paralele a rigidului*

Se numește *mișcare plan-paralelă* mișcarea rigidului în care o anumită secțiune plană a lui (Σ_s), rămîne în permanență într-un același plan paralel la un plan fix din spațiu, ultimul numit *plan director* al mișcării plan-paralele a rigidului. Este ușor de înțeles, în această situație, că toate secțiunile rigidului paralele la planul director se vor deplasa numai în plane paralele la planul director.

O asemenea mișcare se realizează fie în anumite condiții particulare de solicitare, care vor fi examinate în dinamica rigidului, fie prin aplicarea unor cuple cinematice adecvate.

Considerînd o astfel de secțiune (Σ_s), în mișcare în planul ei ales ca plan de coordonate fix Oxy (fig. 4.14), se va alege un punct $B(\bar{r}_B \doteq \overrightarrow{OB})$ în această secțiune și un punct $B'(\bar{r}_{B'} = \overrightarrow{OB'})$ situat pe normala în B la planul secțiunii considerate; observîndu-se că vec-

torul $\bar{r}'_{BB'} = \overrightarrow{BB'}$ este constant în cazul acestei mișcări particulare — modulul său nu variază ca urmare a ipotezei rigidității, iar orientarea lui nu se modifică, deoarece schimbarea acestei orientări ar avea ca urmare scoaterea punctului B' din planul său, inițial paralel la planul Oxy — se pot scrie relațiile :

$$\bar{r}_{B'} = \bar{r}_B + \bar{r}'_{BB'} \; ; \quad \bar{v}_{B'} = \bar{v}_B \; ; \quad \bar{a}_{B'} = \bar{a}_B, \tag{4.76}$$

ultimele rezultînd prin derivarea succesivă a primei.

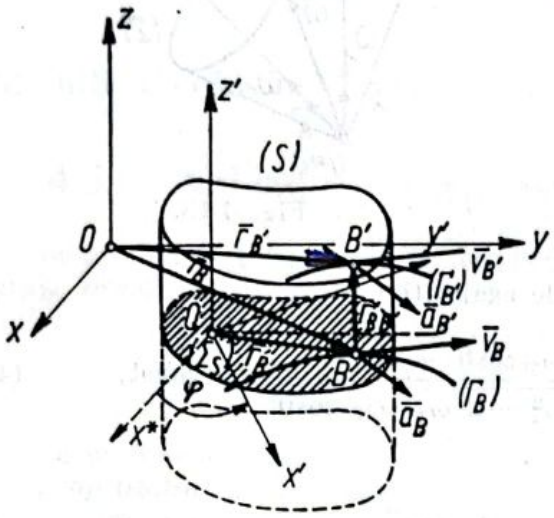


Fig. 4.14.

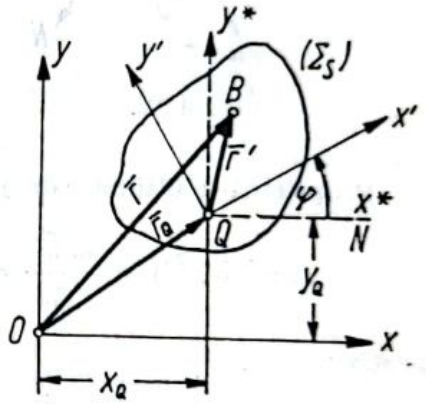


Fig. 4.15.

Relațiile (4.76) permit să se tragă următoarea concluzie generală privind mișcarea plan-paralelă a rigidului : în mișcarea plan-paralelă a unui rigid toate punctele lui situate pe o aceeași normală la planul director al mișcării descriu traiectorii identice, cu aceleași viteze și aceleași accelerații ; această concluzie permite reducerea studiului mișcării plan-paralele a rigidului la studiul mișcării secțiunii (Σ_s) în planul Oxy (fig. 4.15).

4.4.1. Parametrii de poziție ai rigidului în mișcare plan-paralelă

Atașînd secțiunii (Σ_s) reperul plan $Ox'y'$ (fig. 4.15), parametrii de poziție, în raport cu reperul fix Oxy, ai acestui reper — și deci și ai secțiunii (Σ_s) — , se vor reduce numai la mărimile x_Q, y_Q și φ, rezultînd deci următoarele forme pentru *ecuațiile finite ale mișcării*

plan-paralele a rigidului :

$$\boxed{x_Q = x_Q(t)\,;\;\; y_Q = y_Q(t)\,;\;\; \varphi = \varphi(t)}\,. \tag{4.77}$$

Trebuie de făcut precizarea însă că, uneori, datorită cuplelor cinematice aplicate, coordonatele polului Q pot fi exprimate ca funcţii de unghiul de rotaţie, acesta fiind unicul parametru de poziţie independent; în asemenea situaţii, ecuaţiile finite ale mişcării iau formele

$$\boxed{x_Q = x_Q(\varphi)\,;\;\; y_Q = y_Q(\varphi)}\,. \tag{4.78}$$

Se reaminteşte faptul că unghiul de rotaţie φ trebuie măsurat de la paralela dusă din polul Q la axa Ox — paralelă ce joacă rolul atît al liniei nodurilor, cît şi al axei Qx^* — către axa Qx', acest unghi fiind considerat pozitiv cînd este descris în sens direct şi negativ în caz contrar, deoarece axa Qz', nereprezentată în figură, se consideră orientată de la desen spre observator (reper drept).

În condiţiile acestei mişcări particulare, ($\psi = \theta \equiv 0$; $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Theta} = \mathbf{E}$), tabelul cosinusurilor directoare ale axelor reperului ($\mathscr{R}'$) în raport cu reperul fix, respectiv matricea lor, capătă formele

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}'$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
$\bar{j}'$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\bar{k}'$	0	0	1

respectiv : $\mathbf{A} = \mathbf{\Phi} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ (4.78′)

4.4.2. Parametrii cinematici ai rigidului în mişcare plan-paralelă

1°. **Parametrii cinematici de ordinul întîi.** Ca urmare a condiţiilor în care se execută această mişcare particulară ($z_Q \equiv 0$; $\psi = \theta \equiv 0$), parametrii cinematici de ordinul întîi ai ei au valorile

$$\boxed{\bar{v}_Q = \dot{x}_Q\bar{i} + \dot{y}_Q\bar{j} \neq 0\,;\;\; \bar{\omega} = \dot{\varphi}\,\bar{k}' = \dot{\varphi}\,\bar{k} \neq 0}\,, \tag{4.79}$$

Scanned with CamScanner

pentru reprezentarea vectorului $\bar{\omega}$ recurgîndu-se la o convenție analogă celei adoptate pentru reprezentarea momentelor vectorilor situați în planul Oxy : cu ajutorul săgeții circulare cu centrul în polul Q, cu vîrful săgeții în sens direct pentru $\omega = \dot{\varphi} > 0$ și în sens invers în cazul $\omega = \dot{\varphi} < 0$, în dreptul săgeții scriindu-se simbolul valorii scalare a vectorului $\bar{\omega}$, raportate la versorul $\bar{k}'$. În fig. 4.16, *a* și *b* sînt arătate reprezentările convenționale ale vitezei unghiulare pentru cele două sensuri posibile de rotație, iar în fig. 4.16, *c* și *d* sînt indicate, în vederea stabilirii corespondențelor, reprezentările reale ale vectorului $\bar{\omega}$.

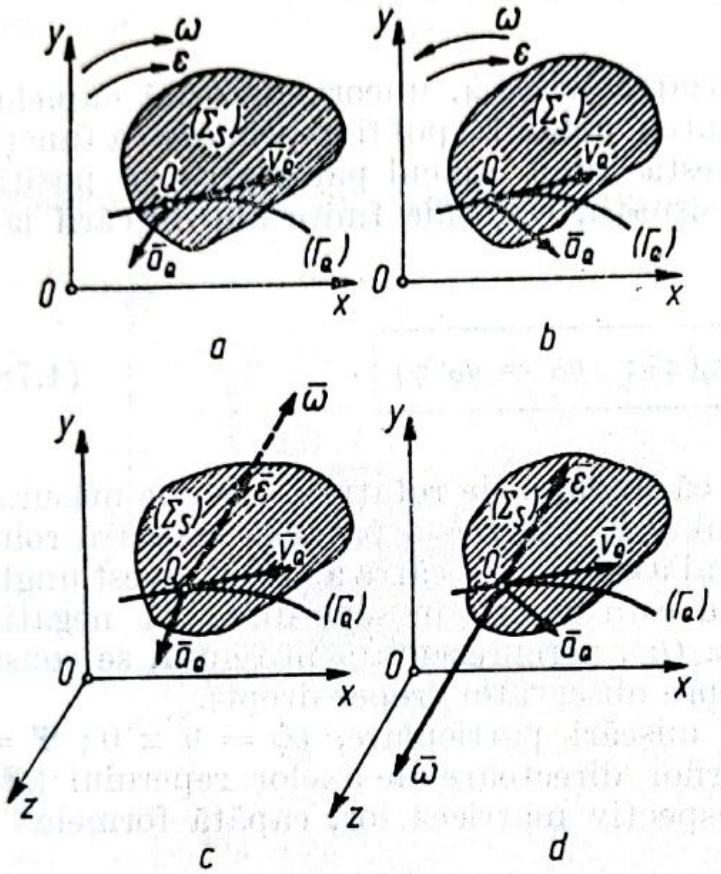


Fig. 4.16.

2°. **Parametrii cinematici de ordinul doi.** Plecînd de la relațiile (4.79), se stabilesc următoarele condiții pentru parametrii cinematici de ordinul doi ai acestei mișcări particulare :

$$\boxed{\bar{a}_Q = \ddot{x}_Q\bar{i} + \ddot{y}_Q\bar{j} \begin{cases} \neq 0 \\ =0 \end{cases}; \quad \bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\,\bar{k}' = \ddot{\varphi}\,\bar{k} \begin{cases} \neq 0 \\ =0 \end{cases}} \tag{4.80}$$

pentru reprezentarea lui $\bar{\varepsilon}$ folosindu-se o convenție analogă celei adoptate pentru viteza unghiulară (fig. 4.16, *a* : $\varepsilon = \ddot{\varphi} < 0$; fig. 4.16, *b* : $\varepsilon = \ddot{\varphi} < 0$) ; figurile 4.16, *c* și *d* stabilesc și aici corespondențele cu reprezentările vectoriale obișnuite.

Coincidența sensurilor săgeților circulare ce reprezintă vectorii $\bar{\omega}$ și $\bar{\varepsilon}$ va indica o rotație accelerată, iar sensurile contrare ale acestor săgeți vor evidenția o rotație încetinită ; absența, într-o schiță cine-

Scanned with CamScanner

matică, a săgeții reprezentînd pe ε va sublinia caracterul uniform al rotației.

4.4.3. Problemele cinematicii mișcării plan-paralele a rigidului

1.° **Determinarea traiectoriei punctului** $B(\bar{r}')$. Ecuației vectoriale parametrice a traiectoriei a unui punct $B(\bar{r}')$, avînd și acum forma generală (3.67), adică

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_Q + \bar{r}'}, \tag{4.81}$$

îi vor corespunde, de astă dată, ($\mathbf{A} = \mathbf{\Phi}$; $z_Q \equiv 0$; $z' = 0$), următoarele ecuații parametrice scalare :

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x_Q + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi = x(t) ; \\ y = y_Q + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi = y(t) \end{array}}, \tag{4.82}$$

sau, în transcrierea matriceală :

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{r}'}, \tag{4.83}$$

cu matricele $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_Q$ și $\mathbf{r}'$ avînd însă formele de mai jos :

$$\mathbf{r} = \left\| \begin{array}{c} x \\ y \\ 0 \end{array} \right\| ; \quad \mathbf{r}_Q = \left\| \begin{array}{c} x_Q \\ y_Q \\ 0 \end{array} \right\| ; \quad \mathbf{r}' = \left\| \begin{array}{c} x' \\ y' \\ 0 \end{array} \right\| . \tag{4.84}$$

Eliminarea timpului între ecuațiile (4.82) va conduce la ecuația analitică directă a traiectoriei punctului $B(\bar{r}')$:

$$f(x,y) = 0. \tag{4.85}$$

2°. **Determinarea vitezei punctului** $B(\bar{r}')$. Datorită condițiilor cinematice (4.79), expresia vectorială generală (3.74) a vitezei unui

Scanned with CamScanner

punct $B(\bar{r}')$ își va păstra valabilitatea și n cazul acestei mișcări, adică se va scrie

$$\boxed{\bar{v} = \bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}'}, \tag{4.86}$$

cu orientările componentelor indicate în fig. 4.17.

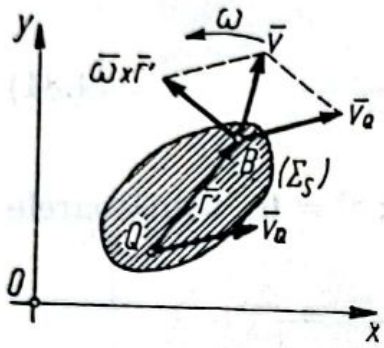


Fig. 4.17.

Calculul, în aplicații, al vitezei se face în două moduri :

— *cu ajutorul modulilor componentelor ei*, atunci cînd se cunoaște distanța QB a punctului B la polul Q și unghiul $(\bar{v}_Q, \bar{v}_{QB})$, format de cele două componente ale vitezei, scriindu-se

$$|\bar{v}_Q| = \sqrt{\dot{x}_Q^2 + \dot{y}_Q^2} \tag{4.87}$$

și

$$|\bar{v}_{QB}| = |\bar{\omega} \times \bar{r}'| = |\bar{\omega}|\,|\bar{r}'| = \overline{QB} \cdot |\bar{\omega}| \tag{4.88}$$

și deci

$$\boxed{|\bar{v}| = \sqrt{v_Q^2 + v_{QB}^2 + 2\,|\bar{v}_Q|\,|\bar{v}_{QB}| \cos(\bar{v}_Q, \bar{v}_{QB})}} \tag{4.89}$$

— *cu ajutorul proiecțiilor ei pe axele reperului legat de secțiunea* (Σ_s), proiecții avînd, în condițiile acestei mișcări, $(\dot{z}_Q \equiv 0\,;\ \bar{\omega} = \omega\bar{k}')$, expresiile simplificate

$$\boxed{v'_x = v'_{Qx} - \omega y'\,;\ v'_y = v'_{Qy} + \omega x'}, \tag{4.90}$$

cu

$$\boxed{v'_{Qx} = \bar{v}_Q \bar{i}' = \dot{x}_Q \cos\varphi + \dot{y} \sin\varphi\,;\ v'_{Qy} = \bar{v}_Q \bar{j}' = -\dot{x}_Q \sin\varphi + \dot{y}_Q \cos\varphi} \tag{4.91}$$

relațiilor (4.90) corespunzîndu-le transcrierea matriceală

$$\boxed{\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_Q + \tilde{\omega}'\,\mathbf{r}}. \tag{4.92}$$

Scanned with CamScanner

3°. **Determinarea acceleraţiei punctului** $B(\bar{r}')$. Expresia vectorială (3.84) a acceleraţiei unui punct $B(\bar{r}')$ îşi va păstra valabilitatea şi în cazul acestei mişcări particulare a rigidului cu singura deosebire că studiul acestei mişcări fiind redus la cel al deplasării secţiunii (Σ_s), normală la vectorul $\bar{\omega}$ $(\bar{\omega}\bar{r}' = 0\,;\ \bar{r}' = \bar{r}'_n)$, se va putea scrie

$$\bar{a}_{ax} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') = -\omega^2 \bar{r}', \qquad (4.93)$$

rezultînd astfel următoarea expresie vectorială a acceleraţiei unui punct $B(\bar{r}')$ al secţiunii (Σ_s):

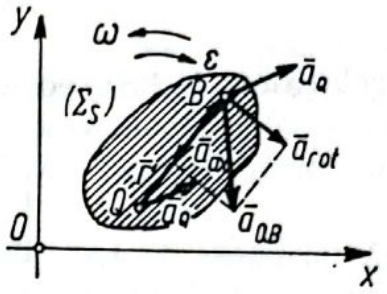


Fig. 4.18.

$$\boxed{\bar{a} = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' - \bar{\omega}^2 \bar{r}' = \bar{a}_{trans} + \bar{a}_{rot} + \bar{a}_{ax} = \bar{a}_Q + \bar{a}_{QB}}. \qquad (4.94)$$

Orientările celor trei componente ale acceleraţiei sînt indicate, pentru orientările date ale parametrilor cinematici, în fig. 4.18.

Calculul, în aplicaţii, al acceleraţiei se face în două moduri:

— *cu ajutorul modulilor componentelor ei*, atunci cînd se cunoaşte distanţa QB a punctului B la polul Q şi unghiul $(\bar{a}_Q, \bar{a}_{QB})$ format de componentele $\bar{a}_Q$ şi $\bar{a}_{QB}$ ale acceleraţiei, scriindu-se

$$|\bar{a}_{trans}| = |\bar{a}_Q| = \sqrt{\ddot{x}_Q^2 + \ddot{y}_Q^2}\,; \quad |\bar{a}_{rot}| = |\bar{\varepsilon} \times \bar{r}'| = \overline{QB} \cdot |\bar{\varepsilon}|\,; \quad |\bar{a}_{ax}| = |-\omega^2 \bar{r}'| = \overline{QB}\omega^2, \qquad (4.95)$$

cu

$$|\bar{a}_{QB}| = \sqrt{a_{rot}^2 + a_{ax}^2} = \overline{QB}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (4.96)$$

şi deci

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_Q^2 + a_{QB}^2 + 2|\bar{a}_Q|\,|\bar{a}_{QB}| \cos(\bar{a}_Q, \bar{a}_{QB})}}, \qquad (4.97)$$

— *cu ajutorul proiecţiilor pe axele reperului legat de* secţiunea (Σ_s), proiecţii avînd, în condiţiile precizate, expresiile:

$$\boxed{a'_x = a'_{Qx} - \varepsilon y' - \omega^2 x'\,; \quad a'_y = a'_{Qy} + \varepsilon x' - \omega^2 y'}, \qquad (4.98)$$

Scanned with CamScanner

cu

$$\boxed{a'_{Qx} = \bar{a}_Q \bar{i}' = \ddot{x}_Q \cos\varphi + \ddot{y}_Q \sin\varphi\,;\; a'_{Qy} = \bar{a}_Q \bar{j}' = -\ddot{x}_Q \sin\varphi + \ddot{y}_Q \cos\varphi}, \tag{4.99}$$

relațiilor (4.98) corespunzîndu-le transcrierea matriceală

$$\boxed{\mathbf{a}' = \mathbf{a}'_Q + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}' \mathbf{r}' - \omega^2 \mathbf{r}'}. \tag{4.100}$$

În încheierea expunerii problemelor cinematicii mișcării plan-paralele a rigidului vor mai fi prezentate următoarele patru teoreme — două privind distribuția vitezelor și două distribuția acceleraților —, care stau la baza unor metode speciale ale mecanicii, folosite, în deosebi, în cinematica grafică:

Teorema proiecțiilor vitezelor punctelor unui segment de dreaptă în mișcare plan-paralelă: în mișcarea plan-paralelă a unui segment de dreptă, proiecțiile, pe direcția segmentului, ale vitezelor tuturor punctelor lui sînt egale între ele.

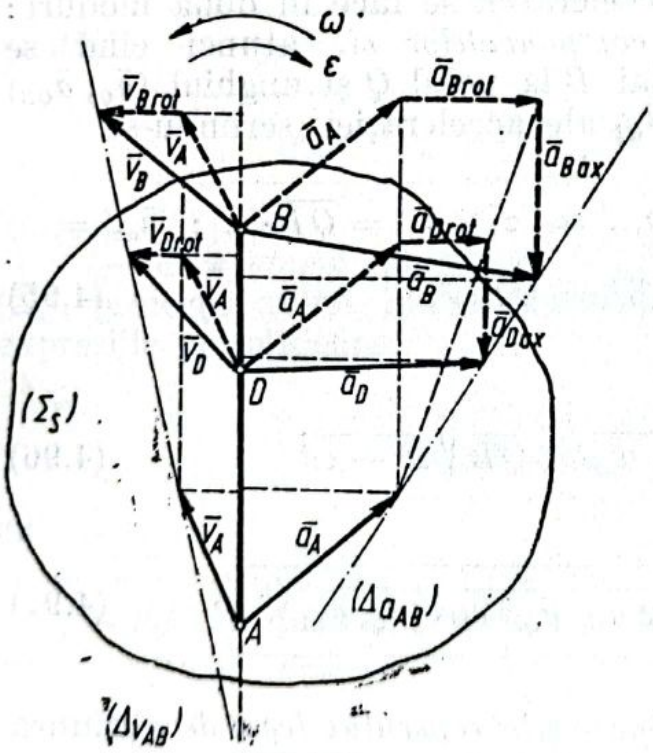


Fig. 4.19.

Demonstrația rezultă imediat, observîndu-se (fig. 4.19), că prin considerarea punctului A al segmentului AB ca pol în secțiunea (Σ_s), se poate scrie

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}'_{AB},$$

rezultînd de aici, prin înmulțire, scalar, cu versorul $\bar{i}'_{AB} = \dfrac{\bar{r}'_{AB}}{AB}$ al vectorului $\bar{r}'_{AB} = \overrightarrow{AB}$, relația:

$$\boxed{pr_{AB}\bar{v}_B = \mathrm{pr}_{AB}\,\bar{v}_A}. \tag{4.101}$$

Scanned with CamScanner

Teorema coliniarității extremităților vitezelor punctelor unui segment în mișcare plan-paralelă: în mișcarea plan-paralelă a unui segment de dreaptă AB, locul geometric al extremităților vitezelor tuturor punctelor D ale segmentului este dreapta (Δv_{AB}) (fig. 4.19), ce unește extremitățile vitezelor punctelor extreme A și B.

Pentru demonstrarea teoremei va fi suficient să se observe (fig. 4.19), că vitezele tuturor punctelor D ale segmentului AB diferă între ele numai prin vitezele de rotație, care au, toate, aceeași direcție normală la segmentul AB, același sens și mărimile variind liniar cu distanțele AD.

Teorema proiecțiilor accelerațiilor punctelor unui segment de dreaptă în mișcare plan-paralelă : în mișcarea plan-paralelă a unui segment de dreaptă, proiecțiile, pe direcția segmentului, ale accelerațiilor diverselor puncte D ale lui diferă între ele prin valoarea scalară a accelerației axipete, considerată în raport cu una din extremitățile segmentului.

Luînd și acum extremitatea A a segmentului AB ca pol în secțiunea (Σ_s), se va putea scrie

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_{AB} - \bar{\omega}^2 \bar{r}'_{AB}$$

și deci, prin înmulțire, scalar, cu versorul $\bar{i}'_{AB} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overline{AB}}$ al segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$, va rezulta relația

$$\boxed{\mathrm{pr}_{AB}\bar{a}_B = \mathrm{pr}_{AB}\bar{a}_A - \omega^2 \overline{AB}} \qquad (4.102)$$

care justifică enunțul teoremei.

Teorema coliniarității extremităților accelerațiilor punctelor unui segment în mișcare plan-paralelă : în mișcarea plan-paralelă a unui segment de dreaptă AB, locul geometric al extremităților accelerațiilor tuturor punctelor D ale lui este dreapta (Δa_{AB}) ce unește extremitățile accelerațiilor punctelor extreme A și B ale segmentului.

Va fi suficient și acum să se observe (fig. 4.19), că accelerațiile diverselor puncte D ale segmentului AB diferă între ele prin accelerațiile de rotație — toate normale la direcția segmentului, de același sens și cu mărimile variind liniar cu distanțele AD —, precum și prin accelerațiile axipete — toate paralele la direcția segmentului AB, de același sens (spre A) și cu mărimile variind, de asemenea, liniar cu distanțele AD —, pentru a se justifica astfel enunțul ultimei teoreme,

Scanned with CamScanner

Se înţelege că toate aceste teoreme îşi vor păstra valabilitatea şi pentru vectorii geometrici reprezentativi ai vitezelor şi acceleraţiilor ce vor exprima teoremele, intervenind doar în plus, în ultima situaţie, numai scările de reprezentare. Prin alegerea convenabilă a scării de reprezentare a acceleraţiei şi anume, stabilirea ei prin relaţia

$$\sigma_a = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\mathrm{m/s^2}}{\mathrm{cm^2}}\right), \tag{4.103}$$

dreapta loc loc geometric (Δ_{AB}) devine chiar perpendiculară la direcţia segmentului AB, simplificîndu-se astfel construcţiile grafice.

Vectorii geometrici reprezentativi ai acceleraţiilor, definiţi cu ajutorul scării menţionate mai sus, au fost numiţi *acceleraţii reduse*, iar metoda de rezolvare a problemelor de distribuţii de acceleraţii cu ajutorul lor, elaborată pentru cazul general, al acceleraţiilor de diverse ordine, de un colectiv ieşan de cercetări condus de prof. dr. doc. D. Mangeron, Om de ştiinţă emerit, a fost numită *metoda acceleraţiilor reduse*.

4.4.4. Problema axei centrale a mişcării şi a axoidelor

Datorită ortogonalităţii vectorilor $\bar{v}_Q$ şi $\bar{\omega}$ în această mişcare particulară, rezultă condiţia

$$\bar{v}_{min} = \frac{\bar{v}_Q \bar{\omega}}{\bar{\omega}^2}\bar{\omega} = 0, \tag{4.104}$$

care defineşte axa centrală a mişcării ca loc geometric al punctelor de viteză zero, ecuaţiile acestei axe avînd şi acum formele

$$\boxed{\bar{r}'_c = \frac{\bar{\omega}\times\bar{v}_Q}{\bar{\omega}^2} + \lambda\,\bar{\omega}} \tag{4.105}$$

în raport cu reperul legat de rigid, şi

$$\boxed{\bar{r}_C = \bar{r}_Q + \frac{\bar{\omega}\times\bar{v}_Q}{\bar{\omega}^2} + \lambda\,\bar{\omega}} \tag{4.106}$$

în raport cu reperul fix.

Scanned with CamScanner

Punctul C_n de intersecţie a axei centrale cu planul secţiunii (Σ_s) corespunzător valorii $\lambda_n = (\bar{\omega}\bar{r}'_{Cn}/\omega^2 = 0$ a scalarului λ, $(\bar{\omega}\bar{r}'_{Cn} = 0)$, este numit *centru instantaneu de rotaţie*, el fiind determinat, în raport cu originile Q şi O ale celor două repere, prin vectorii de poziţie

$$\boxed{\bar{r}'_{Cn} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_Q}{\bar{\omega}^2}} \tag{4.107}$$

respectiv

$$\boxed{\bar{r}_{Cn} = \bar{r}_Q + \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_Q}{\omega^2}}, \tag{4.108}$$

relaţia (4.107) scoţînd în evidenţă situarea centrului C_n pe normala în Q dusă la direcţia vitezei $\bar{v}_Q$ (fig. 4.20), la distanţa

$$\overline{QC}_n = |\bar{r}'_{Cn}| = \frac{|\bar{\omega} \times \bar{v}_Q|}{|\bar{\omega}|^2} = \frac{|\bar{v}_Q|}{|\bar{\omega}|}$$

de polul Q, în sensul indicat de regula burghiului drept aplicată produsului vectorial $(\bar{\omega} \times \bar{v}_Q)$. Denumirea de „centru de rotaţie" se explică prin faptul că prin alegerea punctului C_n drept pol în secţiunea (Σ_s), viteza oricărui punct arbitrar B al figurii se va reduce numai la componenta de rotaţie, aşa cum rezultă din relaţia de mai jos

$$\bar{v}_B = \bar{v} = \underbrace{\bar{v}_{Cn}}_{0} + \bar{\omega} \times \bar{r}'_{CnB} = \bar{\omega} \times \bar{r}'_{CnB}, \tag{4.109}$$

ceea ce înseamnă că, din punctul de vedere al distribuţiei vitezelor punctelor secţiunii (Σ_s) totul se întîmplă ca şi cum întreaga figură s-ar roti, în momentul considerat, în jurul punctului C_n; denumirea de „instantaneu" evidenţiază faptul că acest punct îşi schimbă în permanenţă, odată cu axa centrală, poziţia, atît în planul fix Oxy cît şi în planul de coordonate $Qx'y'$, legat invariabil de secţiunea (Σ_s).

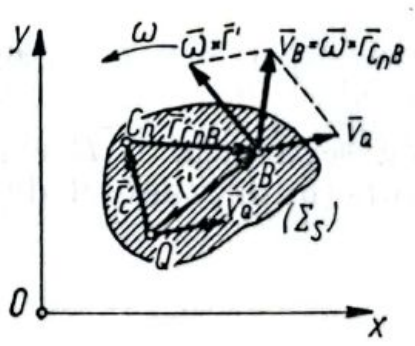


Fig. 4.20.

Scanned with CamScanner

Relaţia (4.109) scoate în evidenţă faptul că vitezele tuturor punctelor secţiunii (Σ_s), corespunzătoare unui moment determinat t, sînt normale la vectorii de poziţie ai punctelor respective în raport cu centrul instantaneu de rotaţie corespunzător acelui moment. Rezultă de aici posibilitatea de a determina grafic poziţia, la un moment oarecare, a centrului instantaneu de rotaţie cunoscîndu-se direcţiile (Δv_A) şi (Δv_B) ale vitezelor unui număr de două puncte, A şi B, ale figurii, această poziţie fiind situată la intersecţia perpendicularelor duse din punctele A şi B la direcţiile celor două viteze. (fig. 4. 21).

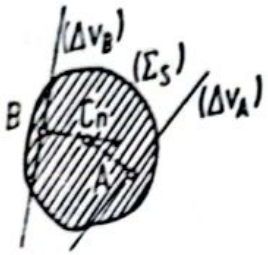


Fig. 4.21.

În cazul cînd se cunoaşte viteza unui punct A al secţiunii (Σ_s), precum şi direcţia vitezei unui al doilea punct, B, al acestei secţiuni, este posibilă chiar determinarea vitezei unghiulare instantanee a figurii (Σ_s) corespunzătoare momentului pentru care se cunosc vitezele, fapt care face posibilă determinarea distribuţiilor de viteze chiar şi în cazurile cînd ecuaţiile finite ale mişcării sînt date sub forma (4.78).

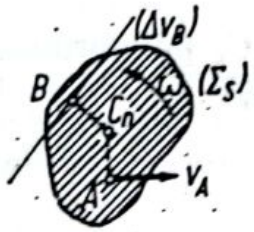


Fig. 4.22.

Într-adevăr, construind centrul instantaneu de rotaţie, (fig. 4. 22), va putea fi scrisă următoarea expresie pentru viteza, considerată cunoscută, a punctului A :

$$\bar{v}_A = \bar{\omega} \times \bar{r}'_{C_n A},$$

sau, trecîndu-se la moduli

$$|\bar{v}_A| = |\bar{\omega}|\,|\bar{r}'_{C_n A}| = \overline{C_n A}\,|\bar{\omega}|, \tag{4.110}$$

cu segmentul $\overline{C_n B}$ exprimat, pe bază de consideraţii geometrice, în funcţie de unghiul de rotaţie φ, rezultînd astfel :

$$|\bar{\omega}| = \frac{|\bar{v}_A|}{\overline{C_n A}}. \tag{4.111}$$

Este suficient apoi să se examineze şi sensul vitezei punctului A în raport cu poziţia centrului instantaneu de rotaţie, pentru a se putea preciza şi semnul valorii scalare, raportate la versorul $\bar{k}'$, al vitezei unghiulare instantanee (în fig. 4.22 : $\omega > 0$).

Scanned with CamScanner

Trecînd la examinarea problemei axoidelor, se va observa că deoarece vectorul $\bar{\omega}$ nu-şi schimbă, în această mişcare particulară, direcţia, axa centrală, paralelă la suportul vectorului $\bar{\omega}$, va genera, ca axoide ale mişcării, două suprafeţe cilindrice (Σ') şi (Σ), (fig. 4.23) cu generatoarele paralele la axele Qz', respectiv Oz; ţinînd seama şi de condiţia (4.104), care atestă absenţa vitezei de alunecare a axoidei mobile, se poate trage concluzia că in mişcarea plan-paralelă a rigidului axoida mobilă se deplasează numai prin rostogolire pură în direcţie normală la axa centrală, această concluzie justificînd denumirile de *axoidă rostogolitoare* şi *axoidă bază*, care se mai dau, în această mişcare particulară, axoidei mobile, respectiv axoidei fixe.

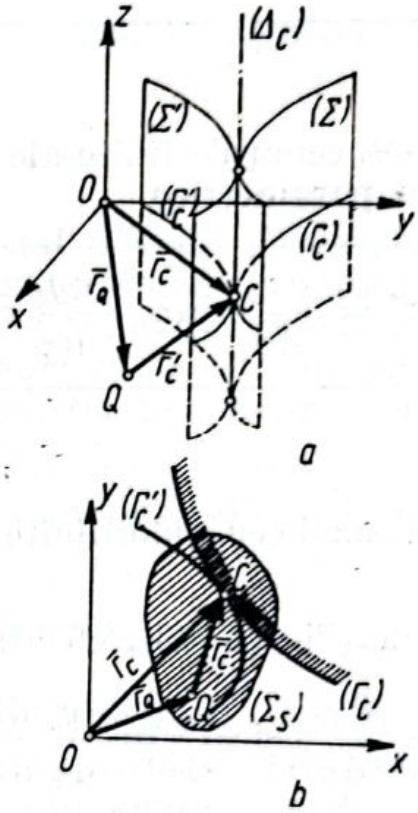


Fig. 4.23.

Curbele (Γ_C'), respectiv (Γ_c), de intersecţie a celor două axoide cu planele de coordonate $Qx'y'$ şi Oxy (fig. 4.23), şi care reprezintă, de fapt, curbele generate de centrul instantaneu de rotaţie pe cele două axoide în timpul deplasării figurii $(\sum_s)$, poartă numele de *centroidă mobilă*, sau *rostogolitoare*, respectiv de *centroidă fixă*, sau *bază*; odată cu mişcarea de rostogolire a axoidei mobile peste axoida fixă, centroida mobilă se rostogoleşte şi ea, fără alunecare, peste centroida fixă.

Ecuaţiile vectoriale ale celor două centroide vor fi reprezentate chiar prin relaţiile (4.107) şi (4.108), renunţîndu-se însă la indicele (C_n), deoarece punctul C_n devine acum un punct curent al curbelor.

În consecinţă, ecuaţia vectorială parametrică a centroidei mobile va avea forma

$$\boxed{\bar{r}' = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_Q}{\omega^2}}, \qquad (4.112)$$

ei corespunzîndu-i, prin înlocuirea proiecţiilor pe axele mobile ale

Scanned with CamScanner

vitezei de translaţie cu expresiile (4.91), următoarele ecuaţii parametrice sclare :

$$\boxed{x' = \frac{\dot{x}_Q}{\omega}\sin\varphi - \frac{\dot{y}_Q}{\omega}\cos\varphi = x'(t);\ y' = \frac{\dot{x}_Q}{\omega}\cos\varphi + \frac{\dot{y}_Q}{\omega}\sin\varphi = y'(t)}, \tag{4.113}$$

dacă ecuaţiile finite ale mişcării sînt date sub forma (4.77) şi ecuaţiile parametrice

$$\boxed{x' = \frac{dx_Q}{d\varphi}\sin\varphi - \frac{dy_Q}{d\varphi}\cos\varphi = x'(\varphi);\ y' = \frac{dx_Q}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{dy_Q}{d\varphi}\sin\varphi = y'(\varphi)}, \tag{4.114}$$

în cazul ecuaţiilor finite date sub forma (4.78). (Ultimele se deduc din ecuaţiile (4.113), efectuînd înlocuirile evidente : $\frac{\dot{x}_Q}{\omega} = \frac{dx_Q/dt}{d\varphi/dt} = \frac{dx_Q}{d\varphi}$ şi $\frac{\dot{y}_Q}{\omega} = \frac{dy_Q/dt}{d\varphi/dt} = \frac{dy_Q}{d\varphi}$),

Ecuaţia vectorială parametrică a centroidei fixe are forma

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_Q + \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_Q}{\bar{\omega}^2}}, \tag{4.115}$$

ei corespunzîndu-i ecuaţiile parametrice scalare

$$\boxed{x = x_Q - \frac{\dot{y}_Q}{\omega} = x(t);\ y = y_Q + \frac{\dot{x}_Q}{\omega} = y(t)}, \tag{4.116}$$

respectiv

$$\boxed{x = x_Q - \frac{dy_Q}{d\varphi} = x(\varphi);\ y = y_Q + \frac{dx_Q}{d\varphi} = y(\varphi)}, \tag{4.117}$$

Scanned with CamScanner

după cum ecuațiile finite ale mișcării sînt date sub forma (4.77) sau sub forma (4.78).

4.4.5. Problema centrului instantaneu al accelerațiilor

Coliniaritatea, în această mișcare particulară, a vectorilor $\bar{\omega}$ și $\bar{\varepsilon}$, cu consecință

$$\Delta = -(\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon})^2 = 0,$$

în timp ce acceleraţia polului Q este, în general, diferită de zero, conduce la concluzia că există, în mișcarea plan-paralelă, o infinitate de puncte cu acceleraţie zero, locul geometric al acestor puncte fiind o normală la planul director al mișcării; punctul I_n, de intersecție a acestei normale cu planul secțiunii (Σ_s), poartă numele de *centru instantaneu al accelerațiilor* acestei secțiuni.

Vectorul $r'_{In} = \overrightarrow{QI}_n$ al acestui centru, reprezentînd soluția ecuației vectoriale

$$\bar{a}_{I_n} = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_{I_n} - \bar{\omega}^2 \bar{r}'_{In} = 0, \tag{4.118}$$

poate fi obținut prin efectuarea următoarelor operații:

— prin înmulțirea, vectorial la stînga, a ecuației precedente cu vectorul $\bar{\varepsilon}$, ceea ce conduce, după descompunerea produsului dublu-vectorial și ținînd seama și de ortogonalitatea vectorilor $\bar{\varepsilon}$ și $\bar{r}'_{In}$, la relația

$$\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_Q - \bar{\varepsilon}^2 \bar{r}'_{In} - \bar{\omega}^2(\bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_{In}) = 0; \tag{4.119}$$

— prin înlocuirea, în ultima ecuație, a produsului vectorial $(\bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_{In})$ cu expresia lui, scoasă din ecuația inițială (4.118), rezultînd astfel expresia căutată a lui $\bar{r}'_{In}$:

$$\boxed{\bar{r}'_{In} = \frac{1}{\varepsilon^2 + \omega^4}(\bar{\omega}^2 \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{a}_Q)} \tag{4.120}$$

Prin proiectare pe axele reperului $(\mathscr{R}')$ a ultimei relații se pot obține și coordonatele x'_{In} și y'_{In} ale punctului I_n, coordonate care vor fi, evident, funcții de timp.

Scanned with CamScanner

Accelerația unui punct arbitrar B, avînd, prin considerarea centrului instantaneu al accelerațiilor drept pol în rigid, expresia

$$\bar{a}_B = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_{I_nB} - \bar{\omega}^2 \bar{r}'_{I_nB} = \bar{a}_{I_nB}$$

va forma cu prelungirea vectorului de poziție $\bar{r}'_{I_nB} = \overrightarrow{I_nB}$, (fig. 4.24) unghiul

$$(\bar{a}_{I_nB}, \bar{r}'_{I_nB}) = \pi - \chi, \tag{4.121}$$

cu χ dat de relația

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{|\bar{a}_{rot}|}{|\bar{a}_{ax}|} = \frac{|\bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_{I_nB}|}{|-\bar{\omega}^2 \bar{r}'_{I_nB}|} = \frac{|\bar{\varepsilon}|}{\omega^2}, \tag{4.122}$$

în sensul indicat de săgeata rerezentînd vectorul $\bar{\varepsilon}$, putîndu-se trage deci următoarea concluzie generală: În mișcarea plan-paralelă a secțiunii (Σ_s) vectorii de poziție ai centrului instantaneu al accelerațiilor în raport cu punctele figurii, $\bar{r}'_{BI_n} = \overrightarrow{BI_n}$ (fig. 4.25), formează cu accelerațiile punctelor respective același unghi χ, măsurat în sensul indicat de săgeata reprezentînd vectorul $\bar{\varepsilon}$; această concluzie permite determinarea grafică a poziției centrului I_n într-un moment t, atunci cînd se cunosc accelerațiile corespunzătoare acelui moment ale unui număr de două puncte ale secțiunii (Σ_s) în mișcare plan-paralelă. Într-adevăr, considerînd unul din cele două puncte, de exemplu pe A, drept pol, accelerația celuilalt punct B va avea expresia

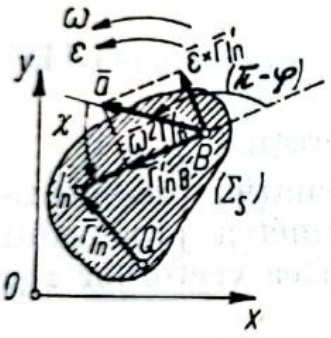


Fig. 4.24.

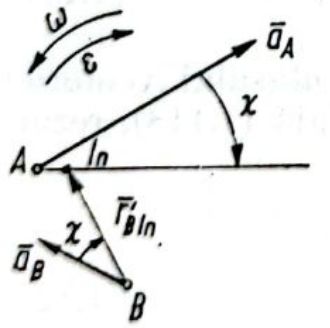


Fig. 4.25.

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_{AB} - \bar{\omega}^2 \bar{r}'_{AB}, \tag{4.123}$$

această relație permițînd, prin proiectare pe vectorul $\bar{r}'_{AB} = \overrightarrow{AB}$ și pe normala la acest vector, situată în planul secțiunii, să se determine mărimile $\bar{\omega}^2$ și $|\bar{\varepsilon}|$ și deci unghiul χ, calculat cu ajutorul relației (4.122); centrul instantaneu al accelerațiilor corespunzător acestei valori a unghiului χ se va afla la intersecția dreptelor duse din punctele A și B și formînd cu accelerațiile punctelor

Scanned with CamScanner

respective aceleași unghi χ luat în sensul indicat de săgeata reprezentînd pe $\bar{\varepsilon}$ (fig. 4.25).

4.4.6. Aplicație: mișcarea de rostogolire plană a discului circular rezemat pe un plan

Studiul mișcării de rostogolire plană a unui disc circular (Dc), de rază r, rezemat pe un plan (π), redus la cel al mișcării cercului de secțiune mediană a discului pe dreapta (Δ) de intersecție a planului (π) cu planul secțiunii considerate, va fi efectuat, în cele ce urmează, adoptîndu-se convenția de a se privi astfel planul mișcării încît deplasarea discului să fie văzută efectuîndu-se de la dreapta spre stînga. Reperul fix va fi ales cu originea O în poziția inițială G_0 a centrului discului, cu axa Ox paralelă la dreapta (Δ) și în sensul deplasării centrului G, iar axa Oy va completa reperul plan drept (fig. 4.26); reperul $Qx'y'$, legat de disc, va fi ales astfel încît să coincidă în momentul inițial cu reperul fix (fig. 4.26).

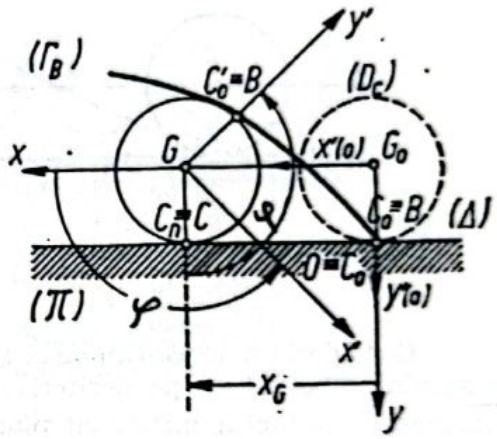


Fig. 4.26.

Rezultă astfel condiția

$$y_G \equiv 0; \qquad (4.124)$$

cu consecințele:

$$\dot{y}_G \equiv 0; \quad \ddot{y}_G \equiv 0. \qquad (4.125)$$

Convenția adoptată, precum și modul de alegere a celor două sisteme de referință, permite să se stabilească următoarele condiții pentru semnele celor doi parametri de poziție variabili în timp, x_G și φ, la deplasarea în sensul precizat a discului:

$$x_G > 0; \quad \varphi > 0, \qquad (4.126)$$

precum și pentru cele ale valorilor scalare, rapoartate la versorii respectivi, ale parametrilor cinematici de ordinul întîi ai mișcării discului, $\bar{v}_G = \dot{x}_G\bar{i}$ și $\bar{\omega} = \dot{\varphi}\,\bar{k}'$:

$$\bar{v}_G = \dot{x} > 0; \quad \omega = \dot{\varphi} > 0. \qquad (4.127)$$

Deplasarea discului rezemat pe planul (π) se va numi:

— *rostogolire pură*, în cazul

$$x_G = r\varphi, \quad \text{cu} \quad v_G = \dot{x}_G = r\dot{\varphi} = r\omega, \qquad (4.128)$$

viteza punctului de contact C avînd în această situație valoarea zero, (fig. 4.27, a):

$$\bar{v}_C = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{r}'_C = (v_G - r\omega)\bar{i} = 0; \qquad (4.129)$$

— *rostogolirea cu alunecare*, în cazul

$$x_G > r\varphi \quad \text{cu:} \quad v_G = \dot{x}_G > r\dot{\varphi} = r\omega, \qquad (4.129)$$

viteza punctului de contact C, diferită de zero și numită *viteză de alunecare*, avînd sensul indicat în fig. 4.27, b: $(v_G - r\omega > 0)$;

$$\bar{v}_C = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{r}'_C = (v_G - r\omega)\bar{i} \neq 0; \qquad (4.130)$$

Scanned with CamScanner

— *rostogolire cu patinare*, în cazul

$$x_G < r\varphi \quad \text{cu:} \quad v_G = \dot{x}_G < r\dot{\varphi} = r\omega, \tag{4.131}$$

viteza punctului de contact C, diferită de zero și purtînd acum numele de *viteză de patinare*, avînd sensul indicat în fig. 4.27 c) ($v_G - r\omega < 0$):

$$\bar{v}_C = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{r}'_C = (v_G - r\omega)\bar{i} \neq 0. \tag{4.132}$$

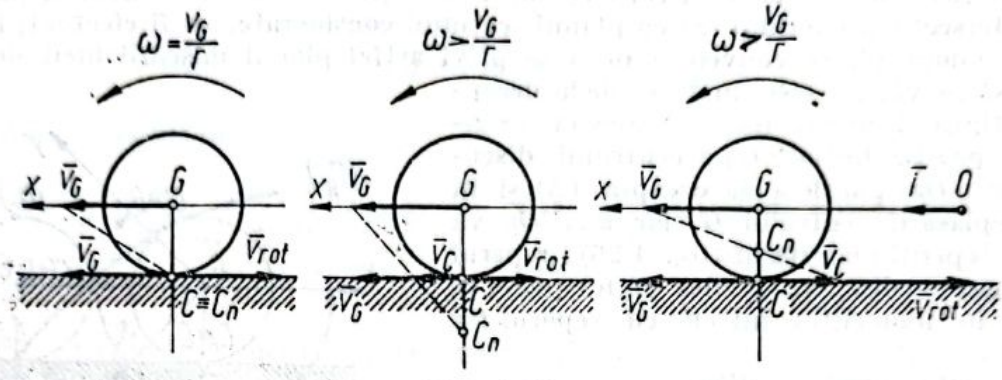


Fig. 4.27.

Considerînd, în continuare, numai cazul rostogolirii pure, se va studia mișcarea punctului $B \equiv C'_0$ de pe periferia cercului de secțiune mediană a discului, în care se efectuează contactul inițial cu planul (fig. 4.26).

În această situație, ecuațiile finite ale mișcării discului iau formele

$$\boxed{x_G = r\varphi\,;\; y_G \equiv 0\,;\;\; \varphi = \varphi(t)}\,, \tag{4.133}$$

iar coordonatele punctului $B \equiv C'_0$, căruia urmează să i se studieze mișcarea, au, în reperul legat de disc, valorile

$$x'_B = 0\,;\; y'_B = r. \tag{4.134}$$

Ecuației vectoriale parametrice a traiectoriei punctului B:

$$\bar{r} = \bar{r}_B = \bar{r}_G + \bar{r}'_B = r\varphi\,\bar{i} + r\bar{j}', \tag{4.135}$$

îi vor corespunde ecuațiile parametrice scalare

$$\boxed{x = r(\varphi - \sin\varphi)\,;\; y = r\cos\varphi\,;}\,, \tag{4.136}$$

care sînt acelea ale unei *cicloide* (fig. 4.26).

Viteza punctului B, determinată prin relația

$$\bar{v}_B = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{r}'_B = \bar{v}_G + \bar{v}_{GB} = \bar{v}_G + \bar{v}_{rot} \tag{4.137}$$

Scanned with CamScanner

cu orientările celor două componente indicate în fig. 4.28 și cu modulii acestor componente dați de relațiile

$$|\bar{v}_G| = |\dot{x}_G| = r|\dot{\varphi}|\,;\ |\bar{v}_{rot}| = |\bar{\omega} \times \bar{r}'_B| = r|\dot{\varphi}|, \tag{4.138}$$

va avea modulul:

$$\boxed{|\bar{v}_B| = \sqrt{2}\, r\, |\,\dot{\varphi}\,|\, \sqrt{1-\cos\varphi}}\,. \tag{4.139}$$

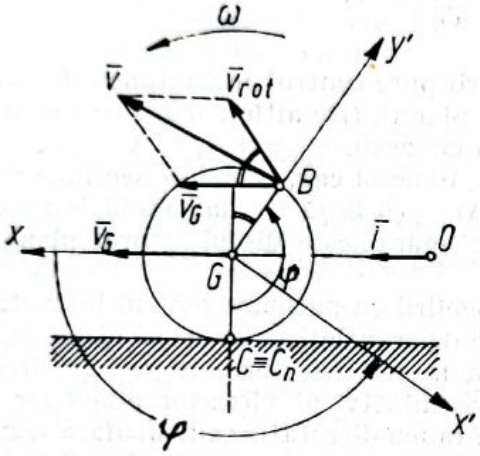


Fig. 4.28.

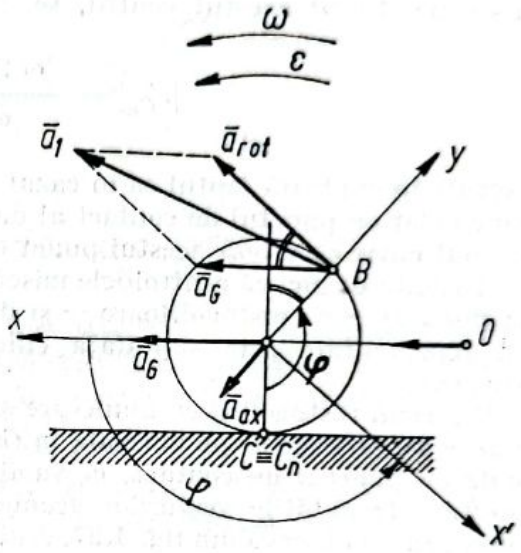


Fig. 4.29.

Presupunînd mișcarea de rostogolire accelerată ($a_G > 0$; $\varepsilon > 0$), (fig. 4.29), accelerația punctului B va avea toate cele trei componente, adică

$$\bar{a} = \bar{a}_G + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_B - \bar{\omega}^2 \bar{r}'_B = \bar{a}_G + \bar{a}_{rot} + \bar{a}_{ax}, \tag{4.140}$$

orientările acestor componente fiind indicate în figura menționată, iar modulii lor fiind dați de relațiile

$$|\bar{a}_G| = |\ddot{x}_G| = r|\ddot{\varphi}|\,;\ |\bar{a}_{rot}| = |\bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_B| = r|\ddot{\varphi}| \tag{4.141}$$

și

$$|\bar{a}_{ax}| = |-\omega^2 \bar{r}'_B\,| = r\dot{\varphi}^2 \tag{4.142}$$

Primele două componente vor da o rezultantă

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_G + \bar{a}_{rot}, \tag{4.143}$$

de modul

$$|\bar{a}_1| = \sqrt{2}\, r|\ddot{\varphi}|\sqrt{1-\cos\varphi} \tag{4.144}$$

și care formează cu accelerația axipetă unghiul

$$(\bar{a}_1,\ \bar{a}_{ax}) = \frac{\varphi}{2}\ \text{(rad)}.$$

Scanned with CamScanner

Determinînd accelerația totală cu ajutorul componentelor $\bar{a}_1$ și $\bar{a}_{ax}$, va rezulta următoarea valoare a modulului ei:

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_{ax}^2 + 2|\bar{a}_1|\,|\bar{a}_{ax}|\,\cos\frac{\varphi}{2}}}. \tag{4.145}$$

Observînd că centrul instantaneu de rotație al discului va trebui să se afle pe normala în G la viteza de translație și spre planul de sprijin și calculînd modulul vectorului de poziție al acestui centru, se găsește valoarea

$$|\bar{r}'_{C_n}| = \frac{|\bar{\omega} \times \bar{v}_G|}{|\bar{\omega}|^2} = \frac{|\bar{v}_G|}{|\bar{\omega}|} = r, \tag{4.146}$$

care scoate în evidență faptul că în cazul rostogolirii pure centrul instantaneu de rotație coincide chiar cu punctul de contact al discului cu planul. (De altfel, s-a menționat de la început chiar că viteza acestui punct este egală cu zero).

Rezultă de aici că centroidele mișcării vor fi, în acest caz, cercul de secțiune mediană a discului — ca rostogolitoare — și dreapta (Δ) — ca bază —, iar axoidele mișcării vor fi reprezentate prin suprafața cilindrică ce mărginește discul și prin planul de reazem (π).

În cazul rostogolirii cu alunecare și al rostogolirii cu patinare centrul instantaneu de rotație se va găsi tot pe normala în G la viteza de translație, numai că el nu va mai coincide cu punctul de contact, ci va fi situat la intersecția normalei GC cu dreapta ce unește extremitățile vectorilor geometrici reprezentativi ai vitezelor punctelor G și C; după cum se observă din fig. 4.27, centrul instantaneu de rotație cade în afara segmentului GC în cazul rostogolirii cu alunecare (fig. 4.27, b) și între punctele G și C în cazul rostogolirii cu patinare, (fig. 4.27 c).

Trecînd, în fine, și la problema determinării centrului instantaneu al accelerației I_n, se va observa că vectorul său de poziție în raport cu polul G, dat de relația

$$\bar{r}'_{I_n} = \frac{1}{\varepsilon^2 + \omega^4}(\bar{\omega}^2\bar{a}_G + \bar{\varepsilon} \times \bar{a}_G), \tag{4.147}$$

va avea modulul

$$|\bar{r}'_{I_n}| = \frac{1}{\varepsilon^2 + \omega^4}\sqrt{(\bar{\omega}^2\,\bar{a}_G)^2 + (\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_G)^2} = \frac{|\bar{a}_G|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{r\,|\bar{\varepsilon}|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} =$$

$$= r \cdot \frac{\frac{|\bar{\varepsilon}|}{\omega^2}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega^4}}},$$

sau încă, ținînd seama și de relația (4.122),

$$\bar{r}'_{I_n} = r \sin \chi, \tag{4.148}$$

rezultînd de aici posibilitatea construcției grafice a poziției centrului I_n, ducîndu-se din C o perpendiculară pe dreapta GL, care formează cu vectorul $\bar{a}_G$ un unghiu egal cu χ.

Scanned with CamScanner

$\left(\chi = \operatorname{arctg}\dfrac{|\bar{\varepsilon}|}{\omega^2}\right)$, în sensul indicat de săgeata reprezentînd accelerația unghiulară, (fig. 4.30).

Se va mai observa că pentru diverse valori ale raportului $\dfrac{|\bar{\varepsilon}|}{\omega^2}$ locul geometric al pozițiilor punctului I_n este cercul (Γ_{I_n}), de diametru egal cu r și cu centrul la jumătatea distanței GC, semicercul trasat prin linie neîntreruptă corespunzînd mișcării accelerate, iar semicercul trasat prin linie întreruptă corespunzînd mișcării încetinite.

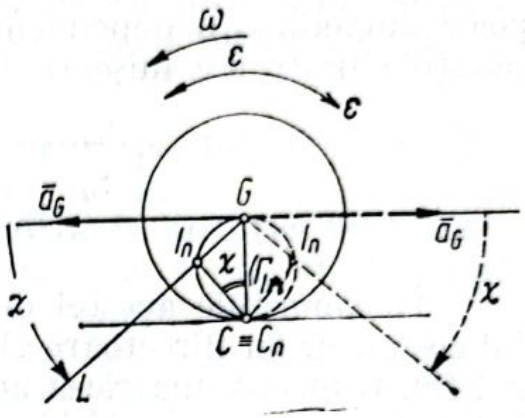


Fig. 4.30.

4.5. *Cinematica mișcării elicoidale a rigidului*

Un rigid are o *mișcare elicoidală* atunci cînd execută, simultan, o translație în lungul unei axe de direcție fixă în spațiu și o rotație în jurul aceleiași axe, un exemplu sugestiv de asemenea mișcare constituindu-l mișcarea unui burghiu în timpul procesului de găurire.

Mișcarea elicoidală se realizează practic fie în condiții speciale de solicitare, care vor fi examinate în dinamică, fie prin utilizarea unor cuple cinematice adecvate.

4.5.1. Parametrii de poziție ai rigidului în mișcare elicoidală

Prin alegerea axei, în lungul și în jurul căreia se produc cele două mișcări componente și care mai este numită *axă a mișcării elicoidale*, ca axă comună Qz' și Oz în cele două repere, cu polul Q legat de rigid ales într-un punct situat pe axa mișcării, și prin alegerea reperului fix astfel încît în momentul inițial cele două repere $(\mathscr{R}')$ și $(\mathscr{R})$ să se confunde: $(x_Q = y_Q \equiv 0;\ \psi = \theta \equiv 0)$, singurii parametrii de poziție care vor varia în timpul acestei mișcări vor fi mărimile z_Q și φ (fig. 4.31), rezultînd de aici următoarele forme ale *ecuațiilor finite ale mișcării elicoidale a rigidului*:

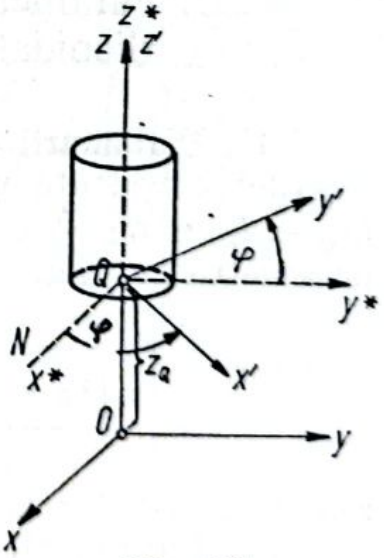


Fig. 4.31.

$$\boxed{z_Q = z_Q(t);\quad \varphi = \varphi(t)}. \tag{4.148}$$

Scanned with CamScanner

Trebuie de făcut însă menţiunea că uneori cupla cinematică poate introduce o dependenţă între cei doi parametrii de poziţie, ecuaţiile finite ale mişcării luînd în asemenea situaţii formele :

$$\boxed{z_Q = z_Q(\varphi)\,;\quad \varphi = \varphi(t)}\,: \tag{4.149}$$

În condiţiile acestei mişcări, ($\psi = 0 = 0$; $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Theta} = \mathbf{E}$), tabelul cosinusurilor directoare ale axelor reperului ($\mathscr{R}'$) în raport cu reperul fix, respectiv matricea acestor cosinusuri, vor lua formele particulare :

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}'$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
$\bar{j}'$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\bar{k}'$	0	0	1

, respectiv : $\mathbf{A} = \mathbf{\Phi} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ (4.150)

4.5.2. Parametrii cinematici ai rigidului în mişcare elicoidală.

1°. Parametrii cinematici de ordinul întîi. Ţinînd seama de precizările precedente privind parametrii de poziţie variabili în timp. ($\dot{x}_Q = \dot{y}_Q \equiv 0$; $\dot{\psi} = \dot{\theta} \equiv 0$), rezultă următoarele condiţii pentru parametrii cinematici de ordinul întîi :

$$\boxed{\bar{v}_Q = \dot{z}_Q\,\bar{k} \neq 0\,;\quad \bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{k}' = \dot{\varphi}\,\bar{k} \neq 0}\,, \tag{4.151}$$

reprezentarea lor în schiţele cinematice fiind arătată în fig. 4.32.

2°. Parametrii cinematici de ordinul doi Relaţiile (4.151) conduc la următoarele condiţii pentru aceşti parametri cinematici :

$$\boxed{\bar{a}_Q = \ddot{z}_Q\bar{k} \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}\,;\quad \bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\,\bar{k}' \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}}\,, \tag{4.152}$$

Scanned with CamScanner

reprezentarea lor fiind arătată în fig. 4.32 pentru cazul unei mişcări elicoidale compusă dintr-o translaţie accelerată şi o rotaţie încetinită.

4.5.3. Problemele cinematici mişcări elicoidale a rigidului

1°. **Determinarea traiectoriei punctului** $B(\bar{r}')$. Ecuaţiei vectoriale parametrice a traiectoriei unui punct $B(\bar{r})$, (fig. 4.32), al rigidului în mişcare elicoidală, avînd forma generală (3.67), adică

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_Q + \bar{r}'}. \qquad (4.153)$$

îi vor corespunde ecuaţiile parametrice scalare echivalente, avînd, în condiţiile acestei mişcări, ($x_Q = y_Q \equiv 0$; $\mathbf{A} = \mathbf{\Phi}$), formele

$$\boxed{\begin{array}{c} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi = x(t); \quad y = x'\sin\varphi + \\ + y'\cos\varphi = y(t); \quad z = z_Q + z' = z(t) \end{array}} \qquad (4.154)$$

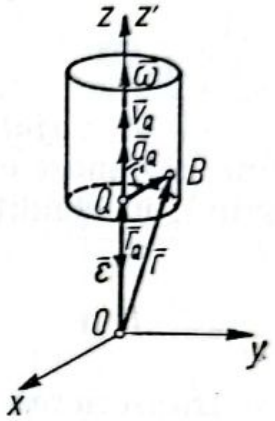


Fig. 4.32.

cu transcrierea matriceală

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{r}'}, \qquad (4.155)$$

cu matricea coloană $\mathbf{r}_Q$ redusă la un singur termen semificativ :

$$\mathbf{r}_Q = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ z_Q \end{array} \right\|. \qquad (4.156)$$

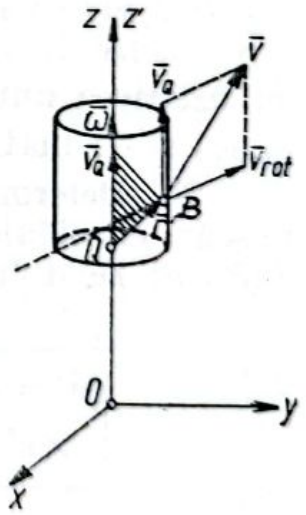


Fig. 4.33.

3. **Determinarea vitezei punctului** $B(\bar{r}')$. În baza condiţiilor cinematice (4.151) rezultă următoarea expresie vectorială a vitezei punctului $B(\bar{r}')$:

$$\boxed{\bar{v} = \bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}' = \bar{v}_{trans} + \bar{v}_{rot} = \bar{v}_Q + \bar{v}_{QB}}, \qquad (4.157)$$

cele două componente ale ei, ortogonale între ele în cazul acestei mişcări particulare, fiind reprezentate în fig. 4.33.

Scanned with CamScanner

Calculul, în aplicații, al vitezei se efectuează:

— *cu ajutorul modulilor celor două componente*, atunci cînd se cunoaște distanța R a punctului B la axa mișcării elicoidale, scriindu-se

$$|\bar{v}_Q| = |\dot{z}_Q|\,;\quad |\bar{v}_{rot}| = |\bar{v}_{QB}| = |\bar{\omega} \times \bar{r}'| = |\bar{\omega}|\ |\bar{r}'|\sin(\bar{\omega}, \bar{r}') = R|\bar{\omega}| \tag{4.158}$$

și deci

$$\boxed{|\bar{v}| = \sqrt{\dot{z}_Q^2 + R^2\,\omega^2}}\,; \tag{4.159}$$

— *cu ajutorul proiecțiilor pe axele reperului legat de rigid*, atunci cînd se cunosc coordonatele punctului B față de acest reper, proiecții avînd, în condițiile acestei mișcări ($\bar{v}_Q = \dot{z}_Q\bar{k}$; $\bar{\omega} = \omega\,\bar{k}'$), expresiile

$$\boxed{v'_x = -\omega y'\,;\ v'_y = \omega x'\,;\ v'_z = \dot{z}_Q}\,, \tag{4.160}$$

cu transcrierea matriceală

$$\boxed{\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_Q + \tilde{\boldsymbol{\omega}}'\mathbf{r}'}\,, \tag{4.161}$$

cu matricea antisimetrică a vectorului $\bar{\omega}$ redusă și acum la forma (4.34) și cu matricea $\mathbf{v}'_Q = \dot{\mathbf{r}}_Q$ dedusă din (4.156).

3°. **Determinarea accelerației punctului** $B(\bar{r}')$. În condițiile unei mișcări elicoidale variate, ($\bar{a}_Q \neq 0$); $\bar{\varepsilon} \neq 0$), accelerația unui punct $B(\bar{r}')$ al rigidului va avea expresia

$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{a} = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \\ \times \bar{r}' - \bar{\omega}^2\bar{r}'_n = \bar{a}_{trans} + \bar{a}_{rot} + \bar{a}_{ax} = \bar{a}_Q + \bar{a}_{QB}\end{array}}\,, \tag{4.162}$$

cu observația că cele trei componente ale ei, reprezentate în fig. 4.34 pentru parametrii cinematici considerați în fig. 4.32, sînt, în cazul acestei mișcări particulare, perpendiculare între ele.

Calculul, în aplicații, al accelerației se face:

— *cu ajutorul modulilor componentelor ei*, scriindu-se

$$|\bar{a}_Q| = |\ddot{z}_Q|\,;\ |\bar{a}_{rot}| = |\bar{\varepsilon} \times \bar{r}'| = |\bar{\varepsilon}|\,|\bar{r}'|\sin|(\bar{\varepsilon}, \bar{r}') = R|\bar{\varepsilon}|\,;\ |\bar{a}_{ax}| = \\ = |-\omega^2\bar{r}'_n| = |\bar{r}'_n|\,\omega^2 = R\omega^2 \tag{4.163}$$

Scanned with CamScanner

și deci

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{\ddot{z}_Q^2 + R^2(\varepsilon^2 + \omega^4)}}; \tag{4.164}$$

— *cu ajutorul proiecțiilor pe axele reperului legat de rigid*, care vor avea, în cazul acestei mișcări, expresiile

$$\boxed{a'_x = -\varepsilon y' - \omega^2 x';\ a'_y = \varepsilon x' - \omega^2 y';\ a'_z = \ddot{z}_Q}, \tag{4.165}$$

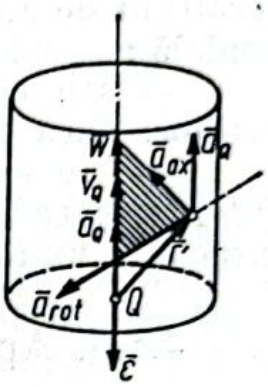


Fig. 4.34.

sau, în transcrierea matriceală

$$\boxed{\mathbf{a}' = \mathbf{a}'_Q + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'\mathbf{r}' + (\bar{\omega}\bar{r}')\,\boldsymbol{\omega}' - \omega^2\mathbf{r}'}, \tag{4.166}$$

cu matricea antisimetrică vectorului $\bar{\varepsilon}$ avînd forma (4.40) și cu matricea $\mathbf{a}'_Q = \mathbf{a}_Q = \dot{\mathbf{v}}_Q$ dedusă din (4.156).

4.5.4. Problema axei centrale și a axoidelor

Observînd că singurele puncte ale rigidului care se vor deplasa cu viteza minimă $\bar{v}_{min}$, avînd, în cazul acestei mișcări particulare, valoarea

$$\bar{v}_{min} = \frac{\bar{v}_Q\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2}\,\bar{\omega} = \dot{z}_Q\,\bar{k} = \bar{v}_Q \tag{4.167}$$

sînt punctele situate pe axa mișcării elicoidale, se poate trage concluzia că axa centrală a acestei mișcări coincide cu axa mișcării elicoidale, concluzie justificată și de formele particulare ale ecuațiilor (3.99) și (3.101) ale acestei axe:

$$\boxed{\bar{r}'_C = \lambda\bar{\omega}}, \tag{4.168}$$

respectiv

$$\boxed{\bar{r}_C = \bar{r}_Q + \lambda\bar{\omega}}. \tag{4.169}$$

Rezultă de aici că în mișcarea elicoidală a rigidului axoidele mișcării sînt degenerate în două drepte confundate cu axa mișcării, dreapta reprezentînd axoida mobilă alunecînd în lungul dreptei reprezentînd axoida fixă cu viteza $\bar{v}_{al} = \bar{v}_{min} = \bar{v}_Q$.

Scanned with CamScanner

4.5.5. Problema centrului instantaneu al acceleraţiilor

Expresia (4.164) a modulului acceleraţiei, în care mărimea ω este totdeauna diferită de zero, permite să se tragă concluzia că existenţa unor puncte I de acceleraţie zero implică satisfacerea condiţiilor

$$\ddot{z}_Q = a_Q \equiv 0\,;\quad R_I = 0, \tag{4.170}$$

rezultînd de aici următoarele două situaţii posibile în mişcarea elicoidală :

— sau mişcarea nu admite nici un centru instantaneu al acceleraţiilor, dacă translaţia este accelerată ($\bar{a}_Q \not\equiv 0$);

— sau există o infinitate de centre instantanee ale acceleraţiilor, situate toate pe axa mişcării elicoidale ($R_I = 0$), dacă translaţia este uniformă ($\bar{a}_Q \equiv 0$).

4.5.6. Aplicaţie: Mişcarea de şurub a rigidului

Mişcarea elicoidală a unui rigid este numită *mişcare de şurub* atunci cînd între parametrii de poziţie z_Q şi φ există relaţia :

$$\boxed{z_Q = p_s\varphi}, \tag{4.171}$$

p_s fiind o constantă numită *parametrul mişcării de şurub*.

Deplasarea în aceste condiţii, numită *mişcare de şurub drept* în cazul $p_s > 0$ şi *mişcare de şurub sting* în cazul $p_s < 0$, se realizează practic, cel mai adesea, cu ajutorul unei cuple cinematice de tip şurub — bucşă filetată.

Mişcarea de şurub prezintă următoarea proprietate de bază : traiectoriile tuturor punctelor unui rigid în mişcare de şurub sînt elici coaxiale, de acelaşi pas constant.

Considerînd un punct arbitrar $B(\bar{r}')$ (fig. 4.35), al rigidului şi introducînd în ecuaţiile parametrice (4.154) ale traiectoriei lui, în locul coordonatelor carteziene x'_B, y'_B şi z'_B, expresiile lor în funcţie de coordonatele cilindrice $\rho_B = R_B$, φ_B şi ζ_B, adică

$$x'_B = R_B\cos\varphi_B\,;\quad y'_B = R_B\sin\varphi_B\,:\quad z'_B = \zeta_B, \tag{4.172}$$

rezultă, după transformările respective, următoarele ecuaţii finite ale mişcării punctului B :

$$\boxed{\begin{aligned} x_B &= R_B\cos(\varphi+\varphi_B)\,;\ y_B = R_B\sin(\varphi+\varphi_B)\,;\ z_B = \\ &= p_s(\varphi+\varphi_B) + (\zeta_B - p_s\varphi_B) \end{aligned}} \tag{4.173}$$

reprezentînd o elice de pas constant

$$h = 2\pi p_s, \tag{4.174}$$

independent, după cum se vede, de poziţia punctului B, justificîndu-se astfel enunţul proprietăţii.

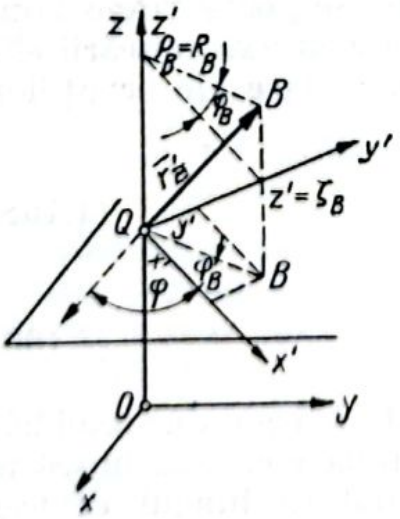


Fig. 4.35.

Scanned with CamScanner

Capitolul III

CINEMATICA MIŞCĂRII COMPUSE A RIGIDULUI

§. 5. Problemele cinematicii mişcării compuse a rigidului

În unele situaţii întîlnite în aplicaţiile tehnice, un rigid (S) execută o anumită mişcare în raport cu un alt corp (S^*) din mediul înconjurător, de care se ataşează, invariabil, un reper $(\mathscr{R}'') \equiv Wx''y''z''$ care se deplasează, la rîndul său, odată cu corpul (S^*) în raport cu reperul fix ($\mathscr{R}$). De exemplu, căruciorul (Cr) al unei macarale turnante se deplasează faţă de braţul (Bt) al macaralei, de care este legat reperul $Wx''y''z''$ (fig. 5.1), iar braţul macaralei se deplasează, la rîndul său, faţă de corpul (Cp) al macaralei, de care este ataşat reperul fix $Oxyz$.

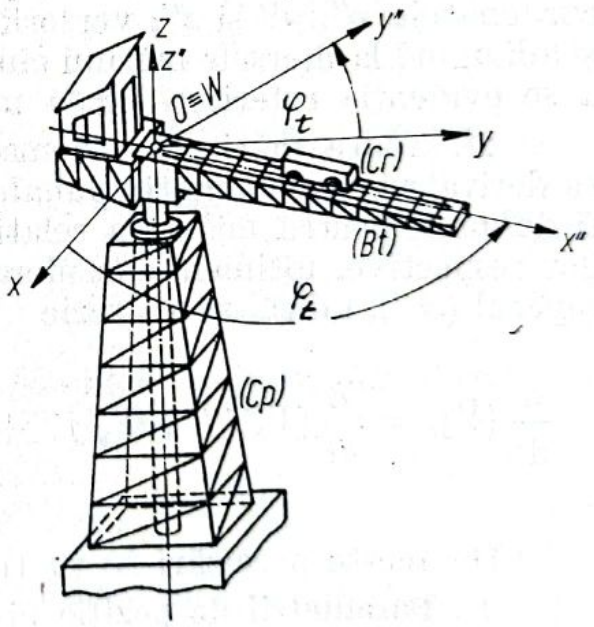


Fig. 5.1.

Se spune, în asemenea situaţii, că rigidul (S) execută o *mişcare compusă*, înţelegîndu-se prin aceasta că mişcarea sa absolută în raport cu reperul ($\mathscr{R}$) rezultă din suprapunerea a două mişcări componente — în general, spaţiale oarecare — şi anume :

— *mişcarea relativă*, efectuată în raport cu reperul ($\mathscr{R}''$) ;

— *mişcarea de transport*, efectuată odată cu reperul ($\mathscr{R}''$) în raport cu reperul fix.

În problemele curente de cinematica mişcării compuse se consideră cunoscută, totdeauna, mişcarea de transport, precum şi una din celelalte două mişcări, fie — cel mai adesea — mişcarea relativă — şi atunci se cere să se studieze mişcarea absolută a rigidului respectiv —, fie mişcarea absolută, în care caz se cere să se determine mişcarea relativă a corpului.

Scanned with CamScanner

Modul de rezolvare a primei variante a problemei de cinematica mișcării compuse a rigidului va fi prezentat în continuare.

5.1. *Cinematica mișcării compuse generale a rigidului*

5.1.1. Cinematica mișcării relative a rigidului

Mișcarea relativă a rigidului va fi, în fond, mișcarea remarcată de un observator fixat în reperul $(\mathscr{R}'')$, care se deplasează în spațiu odată cu acest reper și pentru care versorii $\bar{i}''$, $\bar{j}''$ și $\bar{k}''$ ai axelor reperului $(\mathscr{R}'')$ apar deci ca vectori care nu-și modifică în timp nici mărimea și nici orientarea, adică vectori constanți; această observație permite să se facă următoarele două precizări privind studiul cinematic al mișcării relative:

1°. Toate noțiunile cinematicii mișcării relative vor fi definite în mod analog celor introduse în cinematica mișcării absolute, înlocuindu-se însă reperul $(\mathscr{R})$ cu reperul $(\mathscr{R}'')$, coordonatele x, y și z cu cordonatele x'', y'' și z'', versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$ cu versorii $\bar{i}''$, $\bar{j}''$ și $\bar{k}''$ și adăugind la diersele mărimi cinematice indicele inferior (r_r), pentru a se evidenția referirea lor la mișcarea relativă;

2°. Toate mărimile cinematice definite în mișcarea absolută ca derivate în raport cu timpul ale unor funcții vectoriale de timp vor fi definite, pentru mișcarea relativă, ca derivate relative ale funcțiilor respective, ultimele considerate exprimate analitic în raport cu reperul $(\mathscr{R}'')$, adică se va scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{V}]_r = \frac{d}{dt}[V_x''\bar{i}'' + V_y''\bar{j}'' + V_z''\bar{k}'']_r = \dot{V}_x''\bar{i} + \dot{V}_y''\bar{i}'' + \dot{V}_z''\bar{k}''. \tag{5.1}$$

De aceste precizări se va ține seama în cele ce urmează.

1°. **Parametrii de poziție ai mișcării relative a rigidului** vor fi reperezentanți prin mărimile:

— coordonatele x_Q'', y_Q'' și z_Q'' ale polului Q în raport cu reperul $(\mathscr{R}'')$, egale și cu proiecțiile pe axele acestui reper ale vectorului de poziție

$$\bar{r}_Q'' = x_Q''\bar{i}'' + y_Q''\bar{j}'' + z_Q''\bar{k}''; \tag{5.2}$$

— cele trei unghiuri ale lui Euler corespunzătoare mișcării relative, notate cu simbolurile ψ_r, φ_r, și θ_r, formate de axele reperului

Scanned with CamScanner

$(\mathscr{R}')$ cu axele reperului $(\mathscr{R}''^*) \equiv (Qx''^*y''^*z''^*)$ cu originea în polul Q și cu axele paralele la axele reperului $(\mathscr{R}'')$ (fig. 5.2).

Ecuațiile finite ale mișcării relative a rigidului vor avea deci formele

$$\boxed{\begin{array}{lll} x''_Q = x''_Q(t); & y''_Q = y''_Q(t); & z''_Q = z''_Q(t) \\ \psi_r = \psi_r(t); & \psi_r = \varphi_r(t); & \theta_r = \theta_r(t) \end{array}} \qquad (5.3)$$

unghiurile lui Euler permițînd să se calculeze, cu ajutorul unor formule analoge relațiilor (3.13), consinusurile directoare corespunzătoare mișcării relative a rigidului (S), aceste consinusuri putînd fi încadrate și acum fie într-un tabel, fie într-o matrice pătratică, asemănătoare celora din mișcarea absolută, adică

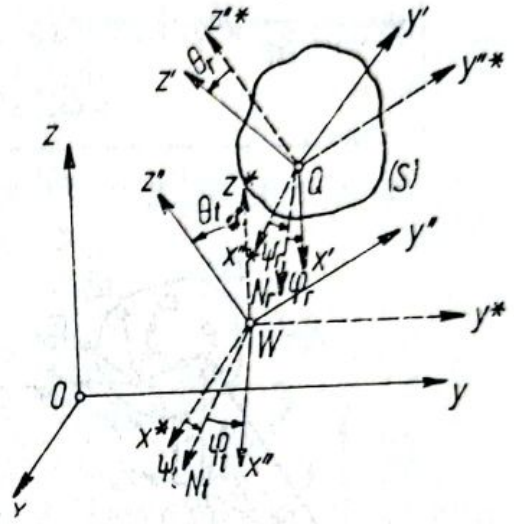


Fig. 5.2.

	$\bar{i}''$	$\bar{j}''$	$\bar{k}''$
$\bar{i}'$	α^r_{xx}	α^r_{xy}	α^r_{xz}
$\bar{j}'$	α^r_{yx}	α^r_{yy}	α^r_{yz}
$\bar{k}'$	α^r_{zx}	α^r_{zy}	α^x_{zz}

respectiv : $$\mathbf{A}_r = \begin{Vmatrix} \alpha^r_{xx} & \alpha^r_{xy} & \alpha^r_{xz} \\ \alpha^r_{yx} & \alpha^r_{yy} & \alpha^r_{yz} \\ \alpha^r_{zx} & \alpha^r_{zy} & \alpha^r_{zz} \end{Vmatrix}. \qquad (5.4)$$

Transcrierea matriceală a expresiilor cosinisurilor directoare poate fi făcută și aici sub forma

$$\boxed{\mathbf{A}_r = \mathbf{\Phi}_r \mathbf{\Theta}_r \mathbf{\Psi}_r}, \qquad (5.5)$$

cu matricele $\mathbf{\Psi}_r$ $\mathbf{\Phi}_r$ și $\mathbf{\Theta}$, avînd semnificații analoge celor definite prin relațiile (3.7), (3.10) și (3.12).

2°. Parametrii cinematici ai mișcării relative.

a) *Parametrii cinematici de ordinul întîi*, vor fi reprezentanți prin ansamblul vectorilor

$$\boxed{\bar{v}_{Q_r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{r}[''_Q]_r = \dot{x}''_Q\bar{i}'' + \dot{y}''_Q\bar{j}'' + \dot{z}''_Q\bar{k}''; \quad \bar{\omega}_r = \dot{\psi}_r\bar{k}'' + \dot{\varphi}_r\bar{k}' + \dot{\theta}\bar{n}_r} \qquad (5.6)$$

Scanned with CamScanner

numiţi *viteză relativă de translaţie*, respectiv *viteză unghiulară relativă*, $\bar{n}_r$ fiind versorul liniei nodurilor corespunzătoare mişcării relative.

b) *Parametrii cinematici de ordinul doi*, definiţi prin relaţiile

$$\boxed{\bar{a}_{Q_r} = \frac{d}{dt}[\bar{v}_{Q_r}]_r = \ddot{x}''_Q\bar{i}'' + \ddot{y}''_Q\bar{j}'' + \ddot{z}''_Q\bar{k}''\,;\ \bar{\varepsilon}_r = \frac{d}{dt}[\bar{\omega}_r]_r = \dot{\omega}''_{r_x}\bar{i}'' + \dot{\omega}''_{r_y}\bar{j}'' + \dot{\omega}''_{r_z}\bar{k}''} \tag{5.7}$$

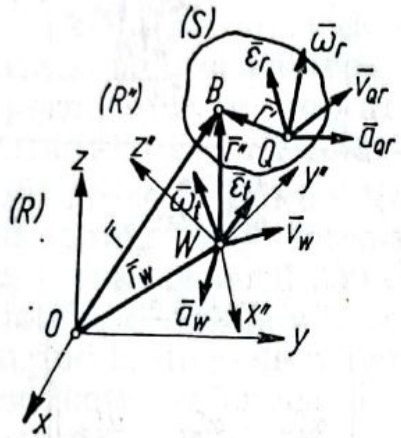


Fig. 5.3.

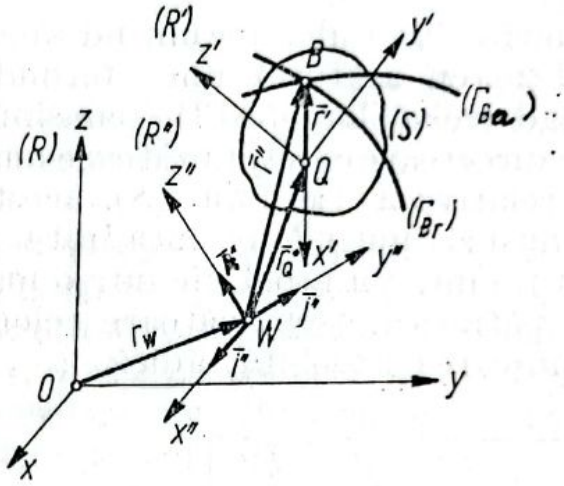


Fig. 5.4.

poartă denumirile de *acceleraţie relativă de translaţie*, respectiv *acceleraţie unghiulară relativă*.

Toţi aceşti parametrii cinematici ai mişcării relative sînt consideraţi aplicaţi în polul Q, legat de rigid (fig. 5.3).

3°. **Problemele cinematicii mişcării relative a rigidului.**

a) *Determinarea traiectoriei relative a unui punct $B(\bar{r}')$ al rigidului în mişcare compusă.* Proiectînd, pe axele reperului $(\mathscr{R}'')$, ecuaţia vectorială

$$\bar{r}'' = \bar{r}''_Q + \bar{r}' = \bar{r}''_Q + (x'\bar{i}'' + y'\bar{j}'' + z'\bar{k}''), \tag{5.8}$$

evidentă din fig. 5. 4, rezultă, ţinînd seama şi de tabelul cosinusurilor directoare ale mişcării relative, următoarele *ecuaţii scalare parametrice ale traiectoriei relative a punctului B*:

$$\boxed{\begin{aligned} x'' &= \bar{r}''\bar{i}'' = x''_Q + x'\alpha^r_{xx} + y'\alpha^r_{yx} + z'\alpha^r_{zx} = x''(t)\,; \\ y'' &= \bar{r}''\bar{j}'' = y''_Q + x'\alpha^r_{xy} + y'\alpha^r_{yy} + z'\alpha^r_{zy} = y''(t)\,; \\ z'' &= \bar{r}''\bar{k}'' = z''_Q + x'\alpha^r_{xz} + y'\alpha^r_{yz} + z'\alpha^r_{zz} = z''(t), \end{aligned}} \tag{5.9}$$

Scanned with CamScanner

cu transcrierea matriceală

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r}_Q'' + \mathbf{A}_r^T \mathbf{r}' \tag{5.10}$$

$\mathbf{r}''$ şi $\mathbf{r}_Q''$ fiind şi acum matrice coloană, avînd ca elemente coordonatele punctelor B şi Q în raport cu reperul $(\mathscr{R}'')$.

b) *Determinarea vitezei relative a punctului* $B(\bar{r}')$. Viteza relativă a punctului $B(r')$, definită prin una din relaţiile

$$\bar{v}_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{r}'']_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{r}_Q'' + \bar{r}']_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x''\bar{i}'' + y''\bar{j}'' + z''\bar{k}'']_r,$$

cu

$$\bar{v}_{rot} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{r}']_r = \bar{\omega}_r \times \bar{r}',$$

(variaţia vectorului $\bar{r}'$ în raport cu reperul $(\mathscr{R}'')$ este provocată numai de variaţia unghiurilor lui Euler corespunzătoare mişcării relative, deci de vectorul $\bar{\omega}_r$), va avea expresiile

$$\boxed{\bar{v}_r = \bar{v}_{Q_r} + \bar{\omega}_r \times \bar{r}' = \dot{x}''\bar{i}'' + \dot{y}''\bar{j}'' + \dot{z}''\bar{k}''}. \tag{5.11}$$

c) *Determinarea acceleraţiei relative a punctului* $B(\bar{r}')$. Această acceleraţie va fi definită prin una din relaţiile

$$\bar{a}_{Q_r} = \frac{d}{dt}[\bar{v}_r]_r = \frac{d}{dt}[\bar{v}_{Q_r} + \bar{\omega}_r \times \bar{r}']_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{x}''\bar{i}'' + \dot{y}''\bar{j}'' + \dot{z}''\bar{k}'']_r,$$

rezultînd expresiile

$$\boxed{\bar{a}_r = \bar{a}_{Q_r} + \bar{\varepsilon}_r \times \bar{r}' + \bar{\omega}_r \times (\bar{\omega}_r \times r') = \ddot{x}''\bar{i}'' + \ddot{y}''\bar{j}'' + \ddot{z}''\bar{k}''}. \tag{5.12}$$

5.1.2. Cinematica mişcării de transport a rigidului în mişcare compusă

Se numeşte *mişcare de transport, la momentul t, a rigidului* (S) în mişcare compusă, mişcarea pe care ar executa-o rigidul în acel moment, odată cu reperul $(\mathscr{R}'')$, în ipoteza că mişcarea sa relativă în aport cu reperul $(\mathscr{R}'')$ nu ar mai avea loc. Rezultă de aici că pentru

Scanned with CamScanner

aprecierea mişcării de transport într-un moment t, rigidul (S) şi reperul $(\mathscr{R}'')$ vor trebui consideraţi ca formînd un ansamblu rigid în mişcare faţă de reperul fix şi că *traiectoria de transport*, *viteza de transport* şi *acceleraţia de transport* la momentul t a unui punct arbitrar $(B(\bar{r}')$ al rigidului vor fi definite ca fiind traiectoria, viteza şi, respectiv, acceleraţia punctului $D(\bar{r}'')$ al reperului $(\mathscr{R}'')$, care coincide, în momentul considerat, cu punctul B al rigidului, $(\bar{r}''_D = \bar{r}''_B(t))$.

1°. **Parametrii de poziţie ai mişcării de transport a rigidului** (S) în mişcare compusă vor fi reprezentaţi prin parametrii de poziţie ai reperului $(\mathscr{R}'')$ în raport cu reperul fix, adică prin :

— cele trei coordonate carteziene, x_W, y_W şi z_W, ale polului W în raport cu reperul fix $Oxyz$, aceste coordonate reprezentînd proiecţiile pe axele fixe ale vectorului de poziţie

$$\bar{r}_W = x_W\bar{i} + y_W\bar{j} + z_W\bar{k}\,; \tag{5.13}$$

— cele trei unghiuri ale lui Euler corespunzătoare mişcării de transport, formate de axele reperului $(\mathscr{R}'')$ cu axele reperului auxiliar $Wx^*y^*z^*$, (fig. 5.2), notate cu simbolurile ψ_t, φ_t, şi θ_t.

Ecuaţiile finite ai mişcării de transport a rigidului (S) vor fi reprezentate deci prin relaţiile

$$\boxed{\begin{array}{lll} x_W = x_W(t)\,; & y_W = y_W(t)\,; & z_W = z_W(t)\,; \\ \psi_t = \psi_t(t)\,; & \varphi_t = \varphi_t(t)\,; & \theta_t = \theta_t(t) \end{array}}, \tag{5.14}$$

ultimii trei parametri de poziţie permiţînd să se alcătuiască tabelul, respectiv matricea, cosinusurilor directoare corespunzătoare mişcării de transport, adică

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}''$	α^t_{xx}	α^t_{xy}	α^t_{xz}
$\bar{j}''$	α^t_{yx}	α^t_{yy}	α^t_{yz}
$\bar{k}''$	α^t_{zx}	α^t_{zy}	α^t_{zz}

respectiv : $\mathbf{A}_t = \begin{Vmatrix} \alpha^t_{xx} & \alpha^t_{xy} & \alpha^t_{xz} \\ \alpha^t_{yx} & \alpha^t_{yy} & \alpha^t_{yz} \\ \alpha^t_{zx} & \alpha^t_{zy} & \alpha^t_{zz} \end{Vmatrix}$ (5.15)

cu expresiile cosinusurilor directoare date de formule analoge celor stabilite pentru mişcarea absolută (formulele (3.13)).

Scanned with CamScanner

2°. Parametrii cinematici ai mișcării de transport.

a) *Parametrii cinematici de ordinul întîi ai mișcării de transport* vor fi reprezentați prin vectorii

$$\boxed{\bar{v}_W = \dot{x}_W\bar{i} + \dot{y}_W\bar{j} + \dot{z}_W\bar{k}\,;\quad \bar{\omega}_t = \dot{\psi}_t\bar{k} + \dot{\varphi}_t\bar{k}'' + \dot{\theta}_t\bar{n}_t}\,, \qquad (5.16)$$

purtînd numele de *viteză de translație de transport*, respectiv *viteză unghiulară de transport*, $\bar{n}_t$ fiind versorul liniei nodurilor corespunzătoare mișcării de transport.

b) *Parametrii cinematici de ordinul doi ai mișcării de transport*, reprezentați prin vectorii

$$\boxed{\bar{a}_W = \ddot{x}_W\bar{i} + \ddot{y}_W\bar{j} + \ddot{z}\,\bar{k}\,;\ \bar{\varepsilon}_t = \dot{\omega}''_{tx}\bar{i}'' + \dot{\omega}''_{ty}\bar{j}'' + \dot{\omega}''_{tv}\bar{k}''} \qquad (5.17)$$

purtînd numele de *accelerație de translație de transport*, respectiv *accelerație unghiulară de transport*.

Toți parametrii cinematicii corespunzători mișcării de transport vor fi considerați aplicați în polul W (fig. 5.3),

3°. Problemele cinematicii mișcării de transport.

a) *Determinarea traiectoriei de transport, la momentul t, a unui punct* $B(\bar{r}')$ al rigidului (S) în mișcare compusă, reprezentată prin traiectoria punctului $D(\bar{r}''_D)$ al reperului $(\mathscr{R}'')$ cu care coincide în acel moment punctul B $(\bar{r}''_D = \bar{r}''_B(t)$, se va face cu ajutorul ecuației vectoriale

$$\bar{r}_{B(t)} = \bar{r}_W + \bar{r}''_B = \bar{r}_W + (x''\bar{i}'' + y''\bar{j}'' + z''\bar{k}'') \qquad (5.18)$$

în care coordonatele x'', y'' și z'' vor fi considerate constante, avînd valorile corespunzătoare momentului t; prin proiectarea pe axele reperului fix a ecuației precedente, se obțin ecuațiile parametrice scalare ale traiectoriei de transport:

$$\boxed{\begin{aligned} x_{B(t)} &= \bar{r}_{B(t)}\bar{i} = x_W + x''_{(t)}\alpha^t_{xx} + y''_{(t)}\alpha^t_{yx} + z''_{(t)}\alpha^t_{zx}\,;\\ y_{B(t)} &= \bar{r}_{B(t)}\bar{j} = y_W + x''_{(t)}\alpha^t_{xy} + y''_{(t)}\alpha^t_{yy} + z''_{(t)}\alpha^t_{zy}\,;\\ z_{B(t)} &= \bar{r}_{B(t)}\bar{k} = z_W + x''_{(t)}\alpha^t_{xz} + y''_{(t)},\alpha^t_{yz} + z''_{(t)}\alpha^t_{zz}\,. \end{aligned}} \qquad (5.19)$$

b) *Determinarea vitezei de transport. Viteza de transport, la momentul t, a punctului* $B(\bar{r}')$, al rigidului în mișcare compusă, egală cu viteza punctului $D(\bar{r}''_D = \bar{r}'')$ al reperului $(\mathscr{R}'')$, cu care coincide

Scanned with CamScanner

în momentul t punctul B, va fi dată, conform precizărilor făcute la început, de relaţia

$$\boxed{\bar{v}_t = \bar{v}_D = \bar{v}_W + \bar{\omega}_t \times \bar{r}''} \tag{5.20}$$

c) *Determinarea acceleraţiei de transport.* În baza aceloraşi precizări menţionate la început, *acceleraţia de transport a punctului* $B(\bar{r}')$ *la momentul* t, egală cu acceleraţia punctului $D(\bar{r}''_D = r'')$ aparţinînd reperului $(\mathscr{R}'')$, cu care coincide în momentul considerat punctul B, va fi dată de relaţia

$$\boxed{\bar{a}_t = \bar{a}_D = \bar{a}_W + \bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}'' + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}'')} \tag{5.21}$$

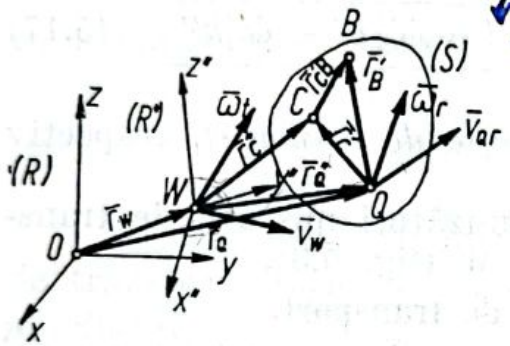


Fig. 5.5.

5.1.3. Cinetica mişcării absolute a rigidului

Considerîndu-se cunoscute ecuaţiile finite (5.14) ale mişcării de transport şi ecuaţiile finite (5.13) ale mişcării relative, va putea fi studiată, în baza relaţiilor stabilite în cadrul subpunctelor precedente, mişcarea absolută a rigidului (S), efectuată în raport cu reperul fix $(\mathscr{R})$.

1°. **Parametrii de poziţie ai mişcării absolute a rigidului** (S) **în mişcare compusă**, vor fi reprezentaţi, ca de obicei, prin :

— cele trei coordonate carteziene, y_Q x_Q şi z_Q ale polului Q invariabil legat de rigid în raport cu reperul fix, expresiile acestora ca funcţii de timp putînd fi deduse prin proiectarea pe axele fixe a relaţiei vectoriale

$$\bar{r}_Q = \bar{r}_W + \bar{r}''_Q = \bar{r}_W + (x''_Q \bar{i}'' + y''_Q \bar{j}'' + z''_Q \bar{k}''), \tag{5.22}$$

evidentă din fig. 5.5, obţinîndu-se astfel relaţiile

$$\boxed{\begin{aligned} x_Q &= \bar{r}_Q \bar{i} = x_W + x''_Q \alpha^t_{xx} + y''_Q \alpha^t_{yx} + z''_Q \alpha^t_{zx} = x_Q(t); \\ y_Q &= \bar{r}_Q \bar{j} = y_W + x''_Q \alpha^t_{xy} + y''_Q \alpha^t_{yy} + z''_Q \alpha^t_{zy} = y_Q(t); \\ z_Q &= \bar{r}_Q \bar{k} = z_W + x''_Q \alpha^t_{xz} + y''_Q \alpha^t_{yz} + z''_Q \alpha^t_{zz} = z_Q(t); \end{aligned}} \tag{5.23}$$

— cosinusurile directoare corespunzătoare mişcării absolute (cu trei din ele independente), notate cu simbolurile obişnuite

Scanned with CamScanner

($\alpha_{xx} = \bar{i}'\bar{i}$ etc.) şi care vor putea fi exprimate ca funcţii de timp prin intermediul cosinusurilor directoare ale mişcărilor relative şi de transport în baza relaţiilor de forma

$$\alpha_{xx} = \bar{i}'\bar{i} = (\alpha^r_{xx}\bar{i}'' + \alpha^r_{xy}\bar{j}'' + \alpha^r_{xz}\bar{k}'')\bar{i} = \alpha^r_{xx}\alpha^t_{xx} + \alpha^r_{xy}\alpha^t_{yx} + \alpha^r_{xz}\alpha^t_{zx}. \quad (5.24$$

etc. cu exprimarea matriceală globală

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{A}_a = \mathbf{A}_r\mathbf{A}_t} \quad (5.25)$$

2°. Parametrii cinematici ai mişcării absolute.

a) *Parametrii cinematici de ordinul întîi ai mişcării absolute* vor putea fi exprimaţi în funcţie de cei ai mişcărilor relative şi de transport stabilindu-se în prealabil o relaţie între *derivata absolută* în raport cu timpul a unei funcţii vectoriale $\bar{V}(t) = V''_x\bar{i}'' + V''_y\bar{j}'' + V''_z\bar{k}''$ — derivată efectuată din punctul de vedere al unui observator invariabil legat de reperul fix, pentru care sînt variabile atît proiecţiile pe axele reperului ($\mathscr{R}''$) ale funcţei vectoriale $\bar{V}(t)$, cît şi versorii acestor axe — şi între *derivata relativă* a acelei funcţii — derivată efectuată din punctul de vedere al unui observator invariabil legat de reperul ($\mathscr{R}''$), pentru care variază numai proiecţiile pe axele reperului ($\mathscr{R}''$) ale funcţiei vectoriale $\bar{V}(t)$.

Plecîndu-se de la relaţia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[V''_x\bar{i}'' + V''_j\bar{j}'' + V''_z\bar{k}''] = [\dot{V}''_x\bar{i}'' + \dot{V}''_y\bar{j}'' + \dot{V}''_z\bar{k}''] + [V''_x\dot{\bar{i}}'' + V''_y\dot{\bar{j}}'' + V''_z\dot{\bar{k}}'']$$

şi ţinînd seama de semnificaţiile primelor două grupuri de termeni precum şi de semnificaţia

$$[V''_x\dot{\bar{i}}'' + V''_y\dot{\bar{j}}'' + V''_z\dot{\bar{k}}''] = V''_x(\bar{\omega}_t \times \bar{i}'') + V''_y(\bar{\omega}_t \times \bar{j}'') + V''_z(\bar{\omega}_t \times \bar{k}'') = \bar{\omega}_t \times \bar{V}$$

a ultimului grup de termeni, reprezentînd *derivata de transport* a funcţiei vectoriale $\bar{V}(t)$, se ajunge la următoarea relaţie între cele trei derivate menţionate ale funcţiei $\bar{V}(t)$:

$$\boxed{\dot{\bar{V}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{V}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{V}]_r + \bar{\omega}_t \times \bar{V}} \quad (5.26)$$

Scanned with CamScanner

Cu aceasta, se poate trece la stabilirea parametrilor cinematici în polul Q ai mișcării absolute a rigidului (S) în mișcare compusă.

Observînd, din fig. 5.6, că se poate scrie

$$\bar{r}_Q = \bar{r}_W + \bar{r}''_Q = \bar{r}_W + (x''_Q\bar{i}'' + y''_Q\bar{j}'' + z''_Q\bar{k}'')$$

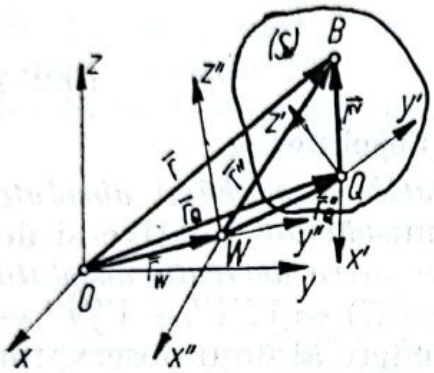


Fig. 5.6.

și efectuînd derivata absolută în raport cu timpul a ultimei relații, se obține, ținînd seama și de egalitatea (5.26), următoarea expresie a vitezei de translație absolute

$$\bar{v}_Q = \bar{v}_{Qa} = \dot{\bar{r}}_Q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{r}_W + \bar{r}''_Q] =$$

$$= \dot{\bar{r}}_W + \frac{d}{dt}[r''_Q] = \dot{\bar{r}}_W + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{r}''_Q]_r + \bar{\omega}_t \times \bar{r}''_Q,$$

adică

$$\bar{v}_{Qa} = \bar{v}_W + \bar{v}_{Qr} + \bar{\omega}_t \times \bar{r}''_Q. \tag{5.27}$$

Pentru a stabili și valoarea vitezei unghiulare absolute se va considera un punct arbitrar $B(\bar{r}'_B)$ al rigidului (S), (fig. 5.6), a cărui viteză va avea, pe de o parte, expresia cunoscută

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{Ba} = \bar{v}_{Qa} + \bar{\omega}_a \times \bar{r}'_B, \tag{5.28}$$

corespunzătoare mișcării absolute, iar pe de altă parte, prin considerarea acestui punct ca pol în rigid, pentru viteza lui va putea fi scrisă o expresie analogă celei stabilite prin relația (5.27), adică

$$\bar{v}_{Ba} = \bar{v}_W + \bar{v}_{Br} + \bar{\omega}_t \times \bar{r}''_B. \tag{5.29}$$

în care termenul $\bar{v}_{Br}$ va putea fi înlocuit, în baza relației (5.11), cu expresia

$$\bar{v}_{Br} = \bar{v}_{Qr} + \bar{\omega}_r \times \bar{r}'_B,$$

iar vectorul $\bar{r}''_B$ va putea fi înlocuit (fig. 5.6), cu suma

$$\bar{r}''_B = \bar{r}''_Q + \bar{r}'_B,$$

Scanned with CamScanner

rezultînd astfel

$$\bar{v}_{Ba} = \bar{v}_W + \bar{v}_{Q_r} + \bar{\omega}_t \times \bar{r}''_Q + (\bar{\omega}_r + \bar{\omega}_t) \times \bar{r}'_B = \bar{v}_{Q_a} + (\bar{\omega}_r + \bar{\omega}_t) \times \bar{r}'_B. \tag{5.30}$$

Compararea relaţiilor (5.28) şi (5.30) conduce la concluzia

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_t. \tag{5.31}$$

Observîndu-se că se mai poate scrie

$$\bar{\omega}_t \times \bar{r}''_Q = (-\bar{r}''_Q) \times \bar{\omega}_t = \bar{r}'_{QW} \times \bar{\omega}_t = \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{\omega}_t),$$

rezultă următoarele expresii finale pentru parametrii cinematici de ordinul întîi ai mişcării absolute:

$$\boxed{\bar{v}_{Q_a} = (\bar{v}_W + \bar{v}_{Q_r}) + \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{\omega}_t);\ \ \bar{\omega}_a = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_t}. \tag{5.32}$$

Trebuie de făcut însă precizarea că uneori este recomandabil ca parametrii cinematici ai mişcării absolute să fie, consideraţi într-un alt pol C (fig. 5.5), diferit de polul Q corespunzător mişcării relative, acest nou pol fiind ales după criterii ce vor fi precizate ulterior; în baza proprietăţilor generale ale mişcării unui rigid — proprietăţi care se menţin, evident, şi pentru mişcările relative şi de transport —, viteza unghiulară absolută va fi aceeaşi şi în polul Q şi în polul C, în timp ce viteza de translaţie absolută în polul C va fi diferită de cea din polul Q, prima fiind dată de o relaţie analoagă relaţiei (5.29) stabilită pentru punctul B, adică

$$\bar{v}_{C_a} = \bar{v}_W + \bar{v}_{C_r} + \bar{\omega}_t \times \bar{r}''_C = \bar{v}_W + \bar{v}_{C_r} + \bar{\mathcal{M}}_C(\bar{\omega}_t),$$

cu

$$\bar{v}_{C_r} = \bar{v}_{Q_r} + \bar{\omega}_r \times \bar{r}'_C = \bar{v}_{Q_r} + (-\bar{r}'_C) \times \bar{\omega}_r = \bar{v}_{Q_r} + \bar{r}'_{CQ} \times \bar{\omega}_r = \bar{v}_{Q_r} + \bar{\mathcal{M}}_C(\bar{\omega}_r)$$

rezultînd astfel expresia

$$\bar{v}_{C_a} = \bar{v}_W + \bar{v}_{Q_r} + \bar{\mathcal{M}}_C(\bar{\omega}_r) + \bar{\mathcal{M}}_C(\bar{\omega}_t). \tag{5.33}$$

În foarte multe cazuri parametrii cinematici de ordinul întîi corespunzători celor două mişcări componente — relativă şi de transport — ale mişcării absolute sînt notaţi cu indici numerici, de exem-

Scanned with CamScanner

plu, cu indicele $(_1)$ pentru mişcarea relativă şi cu indicele $(_2)$ pentru mişcarea de transport; în aceste condiţii, relaţiile care definesc parametrii cinematici de ordinul întîi ai mişcării absolute în polul C iau formele:

$$\boxed{\bar{v}_{Ca} = \sum_{i=1}^{2} \bar{v}_i + \sum_{i=1}^{2} \bar{\mathcal{M}}(\bar{\omega}_i);\ \bar{\omega}_a = \sum_{i=1}^{2} \bar{\omega}_i} \tag{5.34}$$

respectiv

$$\boxed{\bar{v}_{Qa} = \sum_{i=1}^{2} \bar{v}_i + \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{\omega}_2);\quad \bar{\omega}_a = \sum_{i=1}^{2} \bar{\omega}_i}, \tag{5.35}$$

dacă polul C coincide cu Q, $(\bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{\omega}_1) = 0$.

b) *Parametrii cinematici de ordinul doi ai mişcării absolute.* Fiind cunoscuţi, în baza relaţiilor stabilite la subpunctul precedent, parametrii cinematici de ordinul întîi ai mişcării absolute, vor putea fi determinaţi şi parametrii cinematici de ordinul doi a mişcării absolute, cu ajutorul relaţiilor

$$\boxed{\bar{a}_{Qa} = \dot{\bar{v}}_{Qa};\quad \bar{\omega}_a = \dot{\bar{\omega}}_a} \tag{5.36}$$

3°. Problemele cinematicii mişcării absolute a rigidului în mişcare compusă.

a) *Determinarea traiectoriei absolute a unui punct $B(\bar{r}')$ al rigidului.* Această problemă va putea fi rezolvată proiectîndu-se pe axele reperului fix ecuaţia vectorială

$$\bar{r} = \bar{r}_W + \bar{r}'' = \bar{r}_W + (x''\bar{i}'' + y''\bar{j}'' + z''\bar{k}''), \tag{5.37}$$

evidentă din fig. 5.6, cu x'', y'' şi z'' calculaţi, în prealabil, cu ajutorul relaţiilor (5.9), rezultînd astfel, dacă se ţine seama şi de tabelul (5.15), următoarele ecuaţii parametrice ale traiectoriei absolute a punctului $(B(\bar{r}')$:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \bar{r}\bar{i} = x_W + x''\alpha^t_{xx} + y''\alpha^t_{yx} + z''\alpha^t_{zx} = x(t);\\ y &= \bar{r}\bar{j} = y_W + x''\alpha^t_{xy} + y''\alpha^t_{yy} + z''\alpha^t_{zy} = y(t);\\ z &= \bar{r}\bar{k} = z_W + x''\alpha^t_{xz} + y''\alpha^t_{yz} + z''\alpha^t_{zz} = z(t). \end{aligned}} \tag{5.38}$$

cu transcrierea matriceală

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_W + \mathbf{A}_t^T\mathbf{r}''} \tag{5.39}$$

Scanned with CamScanner

b) *Determinarea vitezei absolute a punctului* $B(\bar{r}')$. Viteza absolută a punctului $B(\bar{r}')$ va fi dată de relaţia (5.29), cu singura modificare că întrucît punctul B este acum un punct curent al rigidului, se va renunţa la indicele (B), adică se va scrie

$$\boxed{\bar{v}_a = \bar{v}_W + \bar{v}_r + \bar{\omega}_t \times \bar{r}'' = \bar{v}_r + [\bar{v}_W + \bar{\omega}_t \times \bar{r}'']} \qquad (5.40)$$

cu componenta $\bar{v}_r$ dată de una dintre relaţiile (5.11). Observînd că ultimul grup de termeni din membrul drept reprezintă viteza de transport a punctului B:

$$\bar{v}_t = \bar{v}_D = \bar{v}_W + \bar{\omega}_t \times \bar{r}'',$$

se mai poate scrie

$$\boxed{\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t}. \qquad (5.41)$$

Calculul, în aplicaţii, al vitezei absolute a punctului B se face cel mai adesea, cu ajutorul proiecţiilor ei pe axele reperului $(\mathscr{R}'')$.

c) *Determinarea acceleraţiei absolute a punctului* $B(\bar{r}')$.

Prin derivarea în raport cu timpul a relaţiei (4.40) rezultă expresia

$$\bar{a}_a = \dot{\bar{v}}_a = \dot{\bar{v}}_r + \dot{\bar{v}}_W + \dot{\bar{\omega}}_t \times \bar{r}'' + \bar{\omega}_t \times \dot{\bar{r}}'' = \dot{\bar{v}}_r + \bar{a}_W + \bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}'' + \bar{\omega}_t \times \dot{\bar{r}}'',$$

în care se vor face, ţinîndu-se seama şi de egalitatea (5.26), înlocuirile

$$\dot{\bar{v}}_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{v}_r] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{v}_r]_r + \bar{\omega}_t \times \bar{v}_r = \bar{a}_r + \bar{\omega}_t \times \bar{v}_r$$

şi

$$\bar{\omega}_t \times \dot{\bar{r}}'' = \bar{\omega}_t \times \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{r}'')_r + \bar{\omega}_t \times r''\right] = \bar{\omega}_t \times \bar{v}_r + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}'').$$

Se obţine astfel următoarea expresie a acceleraţiei punctului $B(r')$ corespunzătoare mişcării sale absolute:

$$\boxed{\bar{a}_a = \bar{a}_r + [\bar{a}_W + \bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}'' + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}'')] + 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r'} \qquad (5.42)$$

cu termenul $\bar{a}_r$ calculat cu ajutorul relaţiilor (5.12).

Scanned with CamScanner

Grupul de termeni din paranteza patrată reprezintă accelerația de transport a punctului B:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_D = \bar{a}_W + \bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}'' + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}'') \tag{5.43}$$

iar ultimul tremen din membrul drept al relației (5.42), notat cu simbolul

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r, \tag{5.44}$$

poartă numele de *accelerație complementară*, sau *accelerație Coriolis*, această ultimă componentă a accelerației absolute putind fi egală cu zero numai în următoarele trei situații:

— cînd mișcarea relativă nu are loc ($\bar{v}_r \equiv 0$);
— cînd mișcarea de transport este numai o translație ($\bar{\omega}_t \equiv 0$);
— cînd vectorii $\bar{\omega}_t$ și $\bar{v}_r$ sînt coliniari.

Prin introducerea notațiilor precedente, expresia (5.42) a accelerației absolute ia forma

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c \tag{5.45}$$

această relație exprimînd

Teorema lui Coriolis: accelerația absolută a unui punct al unui rigid în mișcare compusă este egală cu suma geometrică a accelerațiilor lui relativă, de transport și complementară.

Calculul, în aplicații, al accelerației absolute se face, de regulă, cu ajutorul proiecțiilor ei pe axele reperului ($\mathscr{R}''$).

5.2. *Cinematica unor cazuri particulare de mișcări compuse ale rigidului*

În continuare, vor fi examinate următoarele trei cazuri particulare de mișcări compuse ale rigidului, întîlnite frecvent în aplicațiile tehnice:

5.2.1. Cinematica mișcării compuse plan-paralele a rigidului

Ca și în mișcarea absolută plan-paralelă a rigidului și în cazul mișcării compuse plan-paralele studiul mișcării va fi redus la cel al deplasării secțiunii plane (Σ_s) a rigidului în planul director al mișcării

Scanned with CamScanner

(fig. 5.7), această secțiune, căreia i se atașează reperul plan $Ox'y'$, deplasîndu-se în reperul plan $(\mathscr{R}'') \equiv Wx''y''$, iar ultimul reper executînd, la rîndul său, o mișcare plan-paralelă în reperul plan fix $(\mathscr{R}) \equiv Oxy$.

În aceste condiții, ecuațiile finite ale mișcării relative se reduc la următoarele trei

$$\boxed{x''_Q = x''_Q(t);\ y''_Q = y''_Q(t);\ \varphi_r = \varphi_r(t)} \qquad (5.46)$$

cu matricea cosinusurilor directoare corespunzătoare mișcării relative redusă la matricea $\mathbf{\Phi}_r$, ($\mathbf{\Psi}_r = \mathbf{\Theta}_r = \mathbf{E}$), adică

$$\boxed{\mathbf{A}_r = \mathbf{\Phi}_r} \qquad (5.47)$$

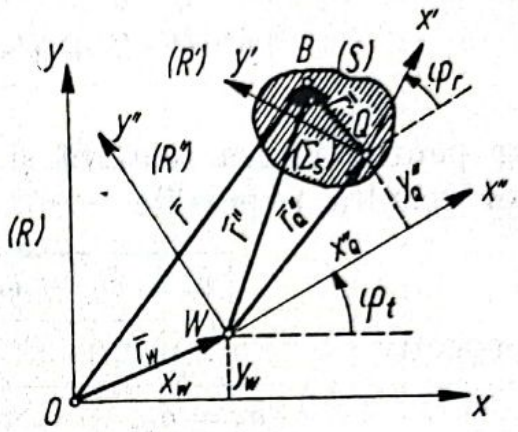


Fig. 5.7.

și cu parametrii cinematici de ordinul întîi și doi avînd expresiile simplificate

$$\boxed{\bar{v}_{Q_r} = \dot{x}''_Q\bar{i}'' + \dot{y}''_Q\bar{j}'';\ \bar{\omega}_r = \dot{\varphi}_r\bar{k}'} \qquad (5.48)$$

respectiv

$$\boxed{\bar{a}_{Q_r} = \ddot{x}''_Q\bar{i}'' + \ddot{y}''_Q\bar{j}'';\ \bar{\varepsilon}_r = \ddot{\varphi}_r\bar{k}'}, \qquad (5.49)$$

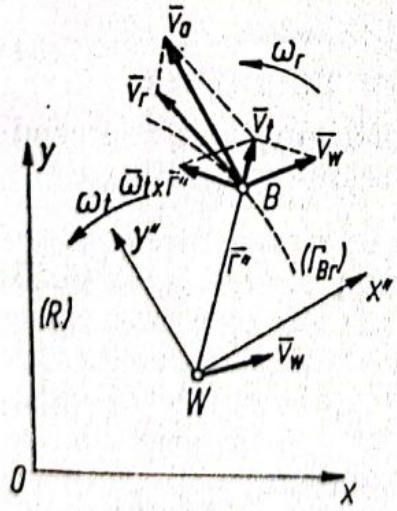


Fig. 5.8.

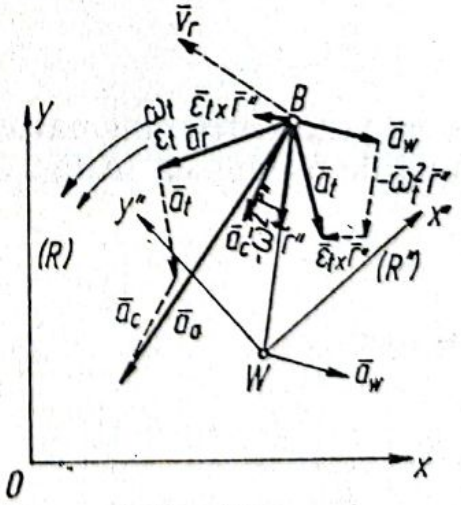


Fig. 5.9.

reprezentarea acestor parametri făcîndu-se acum cu convențiile adoptate pentru cazul plan (fig. 5.8 și 5.9).

Scanned with CamScanner

De asemenea, ecuaţiile finite (5.9) ale mişcării relative a unui punct arbitrar $B(\bar{r}')$ al rigidului, considerat în secţiunea (Σ_s), vor lua formele simplificate

$$\boxed{\begin{aligned} x'' &= x''_Q + x'\cos\varphi_r - y'\sin\varphi_r = x''(t); \\ y'' &= y''_Q + x'\sin\varphi_r + y'\cos\varphi_r = y''(t), \end{aligned}} \tag{5.50}$$

iar pentru viteza relativă şi acceleraţia relativă ale acestui punct vor rezulta expresiile

$$\boxed{\bar{v}_r = \bar{v}_{Q_r} + \bar{\omega}_r \times \bar{r}' = \dot{x}''\bar{i}'' + \dot{y}''\bar{j}''}, \tag{5.51}$$

respectiv

$$\boxed{\bar{a}_r = \bar{a}_{Q_r} + \bar{\varepsilon}_r \times \bar{r}' - \bar{\omega}_r^2\bar{r}' = \ddot{x}''\bar{i}'' + \ddot{y}''\bar{j}''} \tag{5.52}$$

toate componentele lor aflîndu-se în planul mişcării, (fig. 5.8 şi 5.9).

Pentru acest caz plan, mişcarea de transport a reperului $(\mathscr{R}'')$ va fi determinată prin ecuaţiile finite

$$\boxed{x_W = x_W(t);\ \ y_W = y_W(t);\ \ \varphi_t = \varphi_t(t)}, \tag{5.53}$$

cu matricea cosinusurilor directoare corespunzătoare mişcării de transport redusă, de asemenea, numai la matricea de rotaţie proprie $\mathbf{\Phi}_t$, $(\mathbf{\Psi}_t = \mathbf{\Theta}_t = \mathbf{E})$, adică

$$\boxed{\mathbf{A}_t = \mathbf{\Phi}_t} \tag{5.54}$$

şi cu parametrii cinematici de ordinul întîi şi doi ai mişcării, reprezentaţi de asemenea în fig. 5.8. şi 5.9, avînd expresiile simplificate

$$\boxed{\bar{v}_W = \dot{x}_W\bar{i} + \dot{y}_W\bar{j};\ \ \bar{\omega}_t = \dot{\varphi}_t\bar{k}''}, \tag{5.55}$$

respectiv

$$\boxed{\bar{a}_W = \ddot{x}_W\bar{i} + \ddot{y}_W\bar{j};\ \ \bar{\varepsilon}_t = \ddot{\varphi}_t\bar{k}''}. \tag{5.56}$$

Viteza de transport şi acceleraţia de transport ale unui punct $B(\bar{r}')$ al secţiunii (Σ_s) vor avea expresiile

$$\boxed{\bar{v}_t = \bar{v}_W + \bar{\omega}_t \times \bar{r}''}, \tag{5.57}$$

Scanned with CamScanner

respectiv

$$\boxed{\bar{a}_t = \bar{a}_W + \bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}'' - \bar{\omega}_t^2 \bar{r}''}\,. \tag{5.58}$$

În mod corespunzător se va simplifica şi rezolvarea problemelor de cinematica mişcării absolute a secţiunii (Σ_s), ecuaţiile finite (5.38) luînd acum formele

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_W + x''\cos\varphi_t - y''\sin\varphi_t = x(t)\,; \\ y &= y_W + x''\sin\varphi_t + y''\cos\varphi_t = y(t), \end{aligned}} \tag{5.59}$$

iar viteza absolută şi acceleraţia absolută a unui punct $B(\bar{r}')$ al secţiunii fiind determinate prin relaţiile

$$\boxed{\bar{v}_a = \bar{v}_r + [\bar{v}_W + \bar{\omega}_t \times \bar{r}''] = \bar{v}_r + \bar{v}_t}\,, \tag{5.60}$$

respectiv

$$\boxed{\bar{a}_a = \bar{a}_r + [\bar{a}_W + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}'' - \bar{\omega}_t^2 \bar{r}''] + 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c}\,, \tag{5.61}$$

componentele vitezei absolute fiind reprezentate în fig. 5.8, iar cele ale acceleraţiei absolute în fig. 5.9.

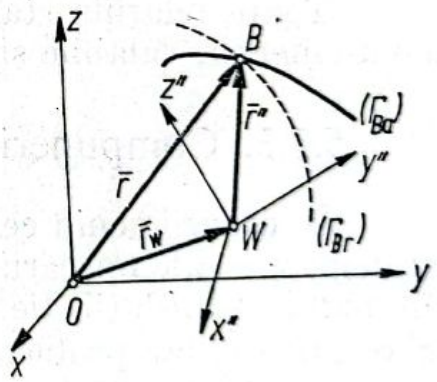


Fig. 5.10.

5.2.2. Cinematica mişcării compuse a rigidelor de dimensiuni reduse şi cu rotaţii relative neglijabile

În foarte multe cazuri corpurile care execută mişcări compuse sînt corpuri de dimensiuni foarte mici — cel mai adesea sfere, sau role de raze foarte mici — cu rotaţii relative foarte lente ($\bar{\omega}_r \approx 0$; $\bar{\varepsilon}_r \approx 0$); în aceste situaţii, rigidul este considerat ca un singur punct — aceasta fiind, obişnuit, centrul său de greutate —, căruia urmează să i se studieze mişcarea sa, compusă din mişcarea relativă efectuată în raport cu reperul ($\mathscr{R}''$) şi din mişcarea de transport, efectuată odată cu acest din urmă reper (fig. 5.10).

Se înţelege că întrucît nu mai este vorba şi de un alt punct al corpului, reperul $(\mathscr{R}') \equiv Qx'y'z'$ va deveni de prisos, iar ecuaţiile

Scanned with CamScanner

finite ale mișcării relative a rigidului se vor reduce numai la primele trei dintre ecuațiile (5.3), care vor fi transcrise acum fără precizarea polului și care vor coincide, în condițiile precizate ($\bar{r}' = 0$) și cu ecuațiile (5.9), adică se va scrie

$$\boxed{x'' = x''(t);\ \ y'' = y''(t);\ \ z'' = z''(t),} \tag{5.62}$$

acestor ecuații finite ale mișcării relative a corpului corespunzîndu-le expresii unice pentru viteza relativă:

$$\boxed{\bar{v}_r = \dot{x}''\bar{i}'' + \dot{y}''\bar{j}'' + \dot{z}''\bar{k}''} \tag{5.63}$$

și pentru accelerația relativă

$$\boxed{\bar{a}_r = \ddot{x}''\bar{i}'' + \ddot{y}''\bar{j}'' + \ddot{z}''\bar{k}''}\,. \tag{5.64}$$

În ceea ce privește mișcarea de transport, ea va fi determinată prin parametrii de poziție și cinematici obișnuiți, corespunzători, după caz, mișcării spațiale, sau mișcării plane.

Toate relațiile stabilite pentru mișcarea absolută vor rămîne, de asemenea, valabile și în acest caz particular de mișcare compusă.

5.2.3. Compuneri de două mișcări simple ale rigidului

În cazurile cînd cele două mișcări componente — relativă și de transport — ale mișcării compuse a unui rigid sînt mișcări simple —, fie numai translații, fie numai rotații, fie una o translație și cealaltă o rotație —, iar problema de cinematică se reduce numai la determinarea distribuțiilor de viteze, rezolvarea ei poate fi făcută mult mai simplu, prin calculul direct, cu ajutorul relațiilor (5.34) al parametrilor cinematici de ordinul întîi ai mișcării absolute corespunzători unui pol C ales, în toate cazurile cînd vectorii $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$ sînt reductibili la un vector unic, pe suportul acestui vector unic, echivalent sistemului de vectori $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$; această alegere are drept consecință, dacă se ține seama și de teorema lui Varignon, condiția

$$\sum_{i=1}^{2} \bar{\mathcal{M}}_C(\bar{\omega}_i) = \bar{\mathcal{M}}_C(\bar{\omega}_a) = 0$$

Scanned with CamScanner

şi deci simplificarea primei dintre relaţiile (5.34), care vor lua astfel formele :

$$\boxed{\bar{v}_{Ca} = \sum_{i=1}^{2} \bar{v}_i \,; \quad \bar{\omega}_a = \sum_{i=1}^{2} \bar{\omega}_i} \tag{5.65}$$

Odată determinaţi aceşti parametri cinematici ai mişcării rezultante, viteza oricărui punct arbitrar B al rigidului în mişcare compusă, determinat în raport cu planul C prin vectorul de poziţie $\bar{r}_{CB} = \overrightarrow{CB}$, va putea fi calculată cu ajutorul relaţiei

$$\bar{v}_{Ba} = \bar{v}_{Ca} + \bar{\omega}_a \times \bar{r}'_{CB}. \tag{5.66}$$

În continuare se va exemplifica acest mod de calcul al vitezei absolute, considerîndu-se următoarele cazuri de compuneri de două mişcări simple, întîlnite frecvent în aplicaţiile tehnice :

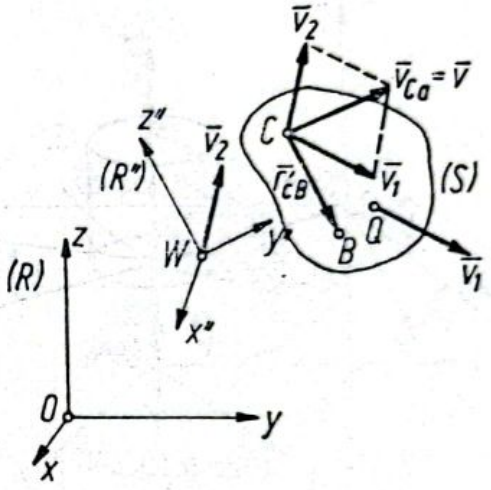


Fig. 5.11.

1°. Compunerea a două translaţii. Se consideră că rigidul (S) execută o translaţie relativă cu viteza $\bar{v}_1$ în raport cu reperul $(\mathscr{R}'')$, iar acest reper, la rîndul său, efectuează o translaţie cu viteza $\bar{v}_2$ în raport cu reperul fix $(\mathscr{R})$, (fig. 5.11).

Cele două mişcări fiind caracterizate prin condiţiile :

Mişcarea relativă : $\bar{v}_1 \neq 0 \,; \quad \bar{\omega}_1 \equiv 0 \,;$

Mişcarea de transport : $\bar{v}_2 \neq 0 \,; \quad \bar{\omega}_2 \equiv 0,$

vor rezulta următorii parametri cinematici de ordinul întîi ai mişcării absolute, calculaţi într-un pol arbitrar C, cu ajutorul relaţiilor (5.34)

$$\boxed{\bar{v}_{Ca} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \,; \quad \bar{\omega}_a \equiv 0} \tag{5.67}$$

cu

$$\boxed{|\bar{v}_{Ca}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2|\bar{v}_1||\bar{v}_2|\cos(\bar{v}_1, \bar{v}_2)}}\,, \tag{5.68}$$

şi deci următoarea expresie pentru viteza unui alt punct, arbitrar, B al rigidului, determinat în raport cu polul C prin vectorul de poziţie $\bar{r}'_{CB} = \overrightarrow{CB}$;

$$\bar{v}_{Ba} = \bar{v}_{Ca} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \tag{5.69}$$

Scanned with CamScanner

Relaţiile (5.67) şi (5.69) scot în evidenţă faptul că mişcarea rezultantă este tot o translaţie.

2°. Compunerea a două rotaţii cu vectorii $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_2$ formînd un cuplu (cuplu de rotaţii). Se consideră că rigidul (S) execută o rotaţie relativă în jurul axei (Δ_1), de direcţie fixă în spaţiu, cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}$, iar axa (Δ_1) se roteşte, la rîndul ei, cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2 = -\bar{\omega}_1 = -\bar{\omega}$, în jurul axei fixe (Δ_2) paralelă la axa (Δ_1), (fig. 5.12).

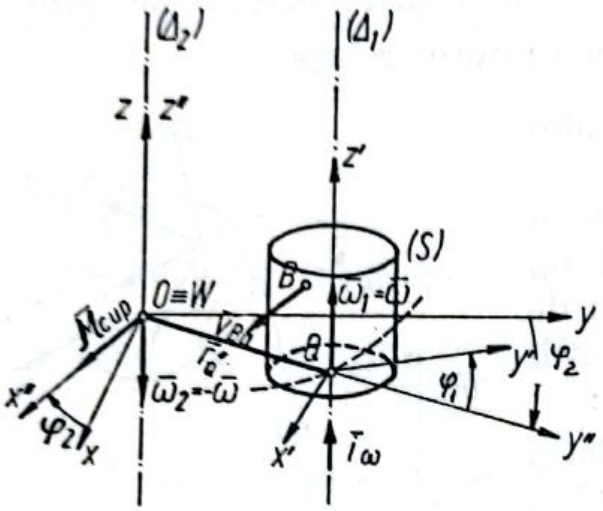


Fig. 5.12.

Alegînd reperele $(\mathscr{R}')$ $(\mathscr{R}'')$ şi $(\mathscr{R})$ ca în figură, rezultă următoarele condiţii pentru cele două mişcări componente :

Mişcarea relativă :

$$\bar{v}_1 \equiv 0\,; \quad \bar{\omega}_1 = \bar{\omega} \neq 0\,;$$

Mişcarea de transport :

$$\bar{v}_2 \equiv 0\,; \quad \bar{\omega}_2 = -\bar{\omega} \neq 0.$$

Parametrii cinematici de ordinul întîi ai mişcării absolute, corespunzători unui pol C ales arbitrar în rigidul (S), vor avea valorile

$$\boxed{\bar{v}_{Ca} = \sum_{i=1}^{2} \bar{\mathscr{M}}_C(\bar{\omega}_i) = \bar{\mathscr{M}}_{cup} = \bar{r}''_Q \times \bar{\omega} \neq 0\,;\ \bar{\omega}_a \equiv 0}, \tag{5.70}$$

cu modulul vitezei de translaţie dat de relaţia

$$\boxed{|\bar{v}_{Ca}| = \bar{\mathscr{M}}_{cup}| = |\bar{r}''_Q \times \bar{\omega}| = |\bar{\omega} \times \bar{r}_{QW}| = b|\bar{\omega}|,} \tag{5.71}$$

unde $b = O\vec{Q}$ este braţul cuplului.

Viteza unui alt punct B arbitrar, al rigidului, determinat în raport cu polul C prin vectorul de poziţie $\bar{r}'_{CB} = \vec{CB}$, va avea expresia :

$$\bar{v}_{Ba} = \bar{v}_{Ca} = \bar{\mathscr{M}}_{cup}. \tag{5.72}$$

Scanned with CamScanner

Relațiile (5.70) și (5.72) scot în evidență faptul că, în condițiile precizate, mișcarea absolută a rigidului (S) este o translație, efectuată cu viteza $\bar{v}_{Ca} = \bar{\mathcal{M}}_{cup}$.

3°. Compunerea a două rotații efectuate în jurul unor axe concurente. Rigidul (S) execută o rotație în jurul axei (Δ_1), cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$, iar această axă de rotație se rotește, la rîndul ei, cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$, în jurul axei fixe (Δ_2), intersectată de prima axă într-un punct fix D (fig. 5.13).

Alegînd cele trei repere, $(\mathcal{R}')$, $(\mathcal{R}'')$ și $(\mathcal{R})$, ca în figură, cele două mișcări componente vor fi caracterizate prin condițiile

Mișcarea relativă:

$$\bar{v}_1 \equiv 0\,; \quad \bar{\omega}_1 \neq 0\,;$$

Mișcarea de transport:

$$\bar{v}_2 \equiv 0\,; \quad \bar{\omega}_2 \neq 0.$$

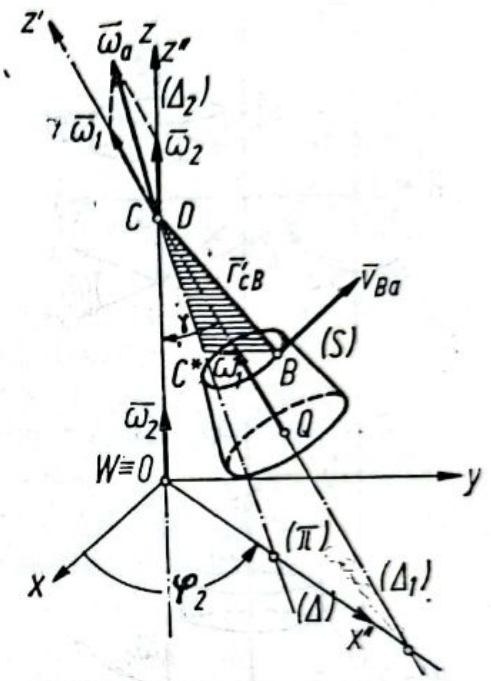


Fig. 5.13.

Considerînd drept pol pentru mișcarea absolută punctul D de intersecție a celor două axe, $(C \equiv D\,;\ \bar{\mathcal{M}}_C(\bar{\omega}_1) = \bar{\mathcal{M}}_C(\bar{\omega}_2) = 0)$, rezultă următoarele valori ale parametrilor cinematici de ordinul întîi ai mișcării rezultante, calculați cu ajutorul relațiilor (5.65):

$$\boxed{\bar{v}_{Ca} = \sum_{i=2}^{1} \bar{v}_i \equiv 0\,; \quad \bar{\omega}_a = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \neq 0}\,, \tag{5.73}$$

cu modulul vitezei unghiulare absolute dat de relația

$$\boxed{|\bar{\omega}_a| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2|\bar{\omega}_1||\bar{\omega}_2|\cos(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)},} \tag{5.74}$$

iar pentru viteza unui punct arbitrar, B, al rigidului, determinat în raport cu polul C prin vectorul de poziție $\bar{r}'_{CB} = \overrightarrow{CB}$, va rezulta expresia

$$\bar{v}_{Ba} = \bar{\omega}_a \times \bar{r}'_{CB}. \tag{5.75}$$

Scanned with CamScanner

Relaţiile (5.73) şi (5.75) evidenţiază faptul că mişcarea absolută a rigidului (S) este o rotaţie unică, efectuată însă în jurul axei instantanee de rotaţie (Δ), reprezentînd suportul vectorului viteză unghiulară absolută; axa (Δ) se va afla în permanenţă în planul determinat de axele (Δ_1) şi (Δ_2).

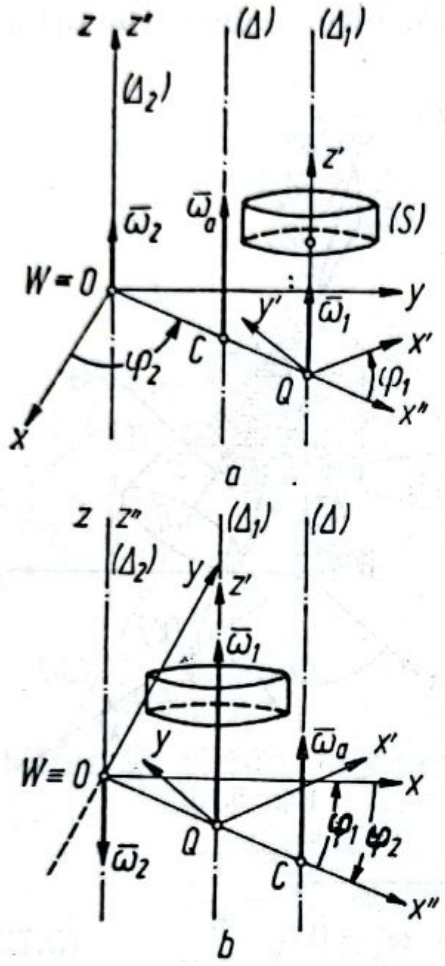


Fig. 5.14.

4°. Compunerea a două rotaţii efectuate în jurul unor axe paralele, cu viteze unghiulare de mărimi şi sensuri oarecare. Rigidul (S) se roteşte în jurul axei (Δ_1), cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$, iar axa (Δ_1), la rîndul ei, se roteşte în jurul axei fixe (Δ_2), paralelă la (Δ_1), fie în acelaşi sens, (fig. 5.14, a), fie în sens contrar (fig. 5.14, b), cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$.

Alegînd reperele ($\mathscr{R}'$), ($\mathscr{R}''$) şi ($\mathscr{R}$) ca în figura menţionată, rezultă următoarele condiţii pentru cele două mişcări componente ale mişcării compuse a rigidului (S):

Mişcarea relativă:

$$\bar{v}_1 \equiv 0\,; \quad \bar{\omega}_1 = \omega_1 \bar{i}_\omega \neq 0\,;$$

Mişcarea de transport:

$$\bar{v}_2 \equiv 0\,; \quad \bar{\omega}_2 = \omega_2 \bar{i}_\omega \neq 0,$$

$\bar{i}_\omega$ fiind versorul comun al axelor de rotaţie, iar ω_1 şi ω_2 fiind valorile scalare, raportate la versorul $\bar{i}_\omega$, ale vitezelor unghiulare $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_2$.

Considerînd drept pol pentru mişcarea absolută centrul C al vectorilor paraleli $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_2$, rezultă, ţinînd seama şi de valabilitatea, în aceste condiţiuni, a teoremei lui Varignon, următoarele condiţii pentru parametrii cinematici de ordinul întîi ai mişcării absolute:

$$\bar{v}_{Ca} = \sum_{i=1}^{2} \bar{M}_C(\bar{\omega}_i) = \bar{M}_C(\bar{\omega}_a) \equiv 0\,; \quad \bar{\omega}_a = \sum_{i=1}^{2} \bar{\omega}_i = (\omega_1 + \omega_2)\,\bar{i}_\omega \neq 0, \tag{576}$$

Scanned with CamScanner

cu valoarea scalară, raportată la versorul i_ω a vitezei unghiulare absolute dată de relaţia

$$\boxed{\omega_a = \omega_1 + \omega_2} \tag{5.77}$$

Viteza absolută a unui punct arbitrar B al rigidului (S), determinat în raport cu polul C prin vectorul de poziţie $\bar{r}'_{CB} = \overrightarrow{CB}$ (fig. 5.15), va avea expresia

$$\bar{v}_{Ba} = \bar{\omega}_a \times \bar{r}'_{CB}, \tag{5.78}$$

cu modulul dat de relaţia

$$|\bar{v}_{Ba}| = |\bar{\omega}_a \times \bar{r}'_{CB}| = \overline{C^*B} \cdot |\bar{\omega}_a|. \tag{5.79}$$

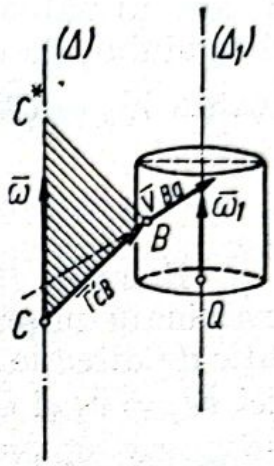


Fig. 5.15.

Relaţiile (5.76) şi (5.78) permit să se tragă concluzia că mişcarea absolută a rigidului considerat este o rotaţie instantanee efectuată în jurul axei (Δ), de direcţie fixă în spaţiu şi trecînd prin centrul C al vectorilor paraleli $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_2$ — punct în rotaţie odată cu planul determinat de axele (Δ_1) şi (Δ_2) —, această rotaţie instantanee efectuîndu-se cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_a$.

5°. **Compunerea unei rotaţii efectuate în jurul unei axe de direcţie fixă în spaţiu, cu o translaţie.** Rigidul (S) execută o rotaţie, cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$, în jurul axei (Δ_1), de direcţie fixă în spaţiu, iar axa (Δ_1) se deplasează, la rîndul ei, prin translaţie, efectuată cu viteza $\bar{v}_2$ (fig. 5.16).

Alegînd şi acum sistemele de referinţă $(\mathscr{R}')$, $(\mathscr{R}'')$ şi $(\mathscr{R})$ ca în figură, cele două mişcări componente ale mişcării absolute vor fi caracterizate prin condiţiile

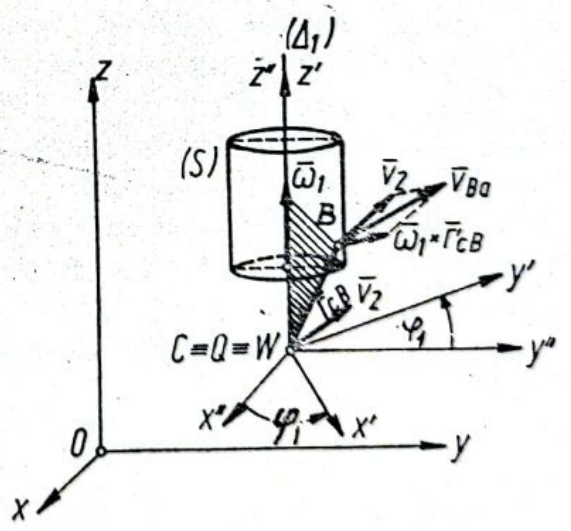


Fig. 5.16.

Mişcarea relativă:
$\bar{v}_1 \equiv 0$; $\bar{\omega}_1 \neq 0$;

Mişcarea de transport:
$\bar{v}_2 \neq 0$; $\bar{\omega}_2 \equiv 0$.

Considerînd polul C pentru mişcarea absolută chiar în polul $Q \equiv W$ comun celor două mişcări componente, $(\bar{\mathscr{M}}_C(\bar{\omega}_1) = \bar{\mathscr{M}}_Q(\bar{\omega}_1) = 0$,

Scanned with CamScanner

vor rezulta următoarele valori pentru parametrii cinematici de ordinul întîi corespunzători mișcării absolute:

$$\boxed{\bar{v}_{C_a} = \bar{v}_2 \neq 0\,; \quad \bar{\omega}_a = \bar{\omega}_1 \neq 0} \tag{5.80}$$

și deci următoarea expresie pentru viteza unui punct arbitrar B, al rigidului, determinat în raport cu polul $C \equiv Q \equiv W$ prin vectorul de poziție $\bar{r}'_{CB} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{QB} = \bar{r}'_B$.

$$\bar{v}_{B_a} = \bar{v}_2 + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}'_{CB}. \tag{5.81}$$

Relațiile (5.80) și (5.81) arată că în această din urmă situație examinată mișcarea absolută este o mișcare spațială cu axă de rotație de direcție fixă în spațiu, caracterizată prin parametrii cinematici $\bar{v}_{C_a} = \bar{v}_2$ și $\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_1$; în cazul cînd unghiul dintre vectorii $\bar{v}_2$ și ω_1, va fi egal cu $\frac{\pi}{2}$ (rad) mișcarea rezultantă va corespunde unei mișcări plan-paralele, iar în cazul coliniarității vectorilor $\bar{v}_2$ și $\bar{\omega}_1$, ea va corespunde unei mișcări elicoidale.

Scanned with CamScanner

Capitolul IV

DINAMICA MIŞCĂRII ABSOLUTE A RIGIDULUI

§. 6. Probleme generale ale dinamicii rigidului

Acest paragraf introductiv al dinamicii rigidului are rolul de a prezenta noţiunile fundamentale ale dinamicii rigidului, adică noţiunile de

— caracteristici inerţiale;
— caracteristici cinetice;
— caracteristici dinamice,

definirea ultimelor noţiuni implicînd şi enunţarea, în prealabil, a principiilor fundamentale ale mecanicii clasice.

6.1. *Caracteristicile inerţiale ale rigidului*

Modelul mecanic de „rigid", definit ca *mediu continuu nedeformabil finit*, implică acceptarea ipotezei privind continuitatea distribuţiei substanţei în tot domeniul ocupat de corpul respectiv, deci posibilitatea trecerii de la un punct $B(x', y', z')$ la un punct B' $(x'+dx'; y'+dy'; z'+dz')$, situat în imediata vecinătate a lui B; în acest sens, mărimile elementare dx', dy' şi dz', care determină această trecere, au rol de diferenţiale ale coordonatelor x', y' şi z', ce fixează poziţia punctului curent B în raport cu reperul invariabil legat de rigid.

Rezultă de aici că pentru vectorul de poziţie

$$\bar{r}' = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}' \tag{6.1}$$

al unui punct arbitrar al rigidului în raport cu originea reperului invariabil ataşat lui pot fi definite două variaţii distincte:

— *o variaţie elementară în timp*, datorată schimbării orietărilor versorilor axelor legate de rigid, a cărei expresie a fost stabilită în cinematică sub forma

$$\mathrm{d}\bar{r}' = \mathrm{d}\bar{\Theta} \times \bar{r}' = (\bar{\omega} \times \bar{r}')\mathrm{d}t \tag{6.2}$$

şi care a fost numită *deplasare elementară a punctului* B;

Scanned with CamScanner

— *o variaţie elementară la trecerea de la un punct la altul în rigid*, independentă de timp, avînd expresia

$$d\bar{r}' = dx'\bar{i}' + dy'\bar{j}' + dz'\bar{k}'. \tag{6.3}$$

Introducerea variaţiilor dx', dy' şi dz' dă posibilitatea să se definească noţiunea de *volum elementar în punctul* $B(\bar{r}')$, acesta reprezentînd volumul unui paralelipiped drept, cu centrul în punctul $B(\bar{r}')$, cu feţele paralele la planele de coordonate ale reperului legat de rigid şi cu muchiile egale cu variaţiile dx', dy' şi dz' ale coordonatelor punctului B (fig. 6.1), putîndu-se scrie

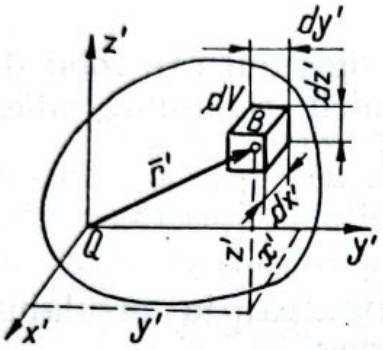


Fig. 6.1.

$$dV = dx'dy'dz' \tag{6.4}$$

şi deci următoarea expresie pentru volumul total al rigidului:

$$V = \int_{(V)} dV = \iiint_{(V)} dx'dy'dz'. \tag{6.5}$$

Definiţia dată pentru volumul elementar permite să se accepte următoarele două ipoteze fundamentale de lucru:

— distribuţia de viteze şi acceleraţii în volumul elementar corespunde unei translaţii a acestuia;

— repartiţia substanţei în volumul elementar este uniformă.

Studiul experimental al mişcărilor mecanice a permis să se tragă concluzia că modul de mişcare a unui rigid, aflat în interacţiune cu alte corpuri din mediul înconjurător, este direct influenţat de cantitatea de subsanţă conţinută de rigid, precum şi de modul de distribuţie a ei în volumul rigidului; mai mult, experienţa a scos în evidenţă existenţa *fenomenului de inerţie a substanţei*, manifestat prin rezistenţa pe care o opune orice rigid la încercarea de a i se modifica oricare din cele două mişcări componente ale lui, rezistenţa opusă la modificarea mişcării de translaţie depinzînd de cantitatea de substanţă conţinută de rigid, iar rezistenţa opusă la variaţia rotaţiei depinzînd de modul de distribuţie a substanţei în rigid.

Cele două elemente care condiţionează fenomenul de inerţie — cantitatea de substanţă şi modul de repartiţie a ei — sînt caracteri-

Scanned with CamScanner

zate prin noţiunile de *masă* şi de *momente de inerţie* ale rigidului, denumite, în general, *caracteristici inerţiale.*

6.1.1. Masa rigidului

1°. **Definirea noţiunii de masă a rigidului.** Existenţa, semnalată mai sus, a fenomenului de inerţie la nivelul întregului rigid nu poate fi concepută fără manifestarea lui şi la nivelul volumului elementar dV, considerat, conform primei dintre ipotezele de lucru menţionate la început, în mişcare de translaţie, ceea ce înseamnă că inerţia acestui volum elementar este condiţionată numai de cantitatea de substanţă conţinută în el.

Măsura inerţiei volumului elementar dV din punctul $B(\bar{r}')$ — şi deci, cu aceasta şi a cantităţii de substanţă conţinute în el — este numită *masă elementară în punctul* $B(\bar{r}')$ şi este notată cu simbolul dm.

Cea de-a doua ipoteză de lucru adoptată, privind distribuţia uniformă a substanţei în volumul elementar dV, permite să se definească funcţiile scalare de punct:

$$\rho_V = \rho_V(\bar{r}') = \rho_V(x',y',z') = \rho_V(B) = \frac{dm}{dV}, \tag{6.6}$$

$$\rho_s = \rho_s(\bar{r}') = \rho_s(x', y', z') = \rho_s(B) = \frac{dm}{dA} \tag{6.7}$$

şi

$$\rho_l = \rho_l(\bar{r}') = \rho_l(x', y', z') = \rho_l(B) = \frac{dm}{ds}, \tag{6.8}$$

purtînd, respectiv, numele de *densitate spaţială*, *densitate superficială* şi *densitate liniară*, prima noţiune fiind utilizată în *cazul corpurilor cu masa repartizată spaţial* — corpuri cu toate cele trei dimensiuni de acelaşi ordin de mărime —, a doua în *cazul corpurilor cu masa repartizată pe suprafeţe* — corpuri cu una din dimensiuni neglijabilă în raport cu celelalte două şi, în particular, plăci plane —, iar a treia în *cazul corpurilor cu masa repartizată pe curbe* — cazul corpurilor cu două din dimensiuni neglijabile în raport cu cea de-a treia şi, în particular, cazul barelor; dV, dA şi ds sînt, respectiv, volumul elementar, aria elementară şi arcul elementar pe care este repartizată masa dm.

Scanned with CamScanner

Introducerea noţiunilor de densitate permite, în continuare, să se definească noţiunea de *masă a rigidului*, notată cu simbolul M şi determinată, după caz, prin una din relaţiile

$$M = \int_{(M)} dm = \int_{(V)} \rho_V dV\,; \quad M = \int_{(M)} dm =$$

$$= \int_{(A)} \rho_s dA\,; \quad M = \int_{(M)} dm = \int_{(L)} \rho_l\, ds \tag{6.9}$$

după cum este vorba de o distribuţie a substanţei pe un volum V, pe o suprafaţă de arie totală A, sau pe o curbă de lungime totală L.

Corpurile care au aceeaşi valoare a densităţii în toate punctele lor, aceste densităţi fiind definite acum prin relaţiile

$$\rho_V = \frac{M}{V}(\text{kg/m}^3)\,; \quad \rho_s = \frac{M}{A}(\text{kg/m}^2)\,; \quad \rho_l = \frac{M}{L}(\text{kg/m}), \tag{6.10}$$

se numesc *corpuri omogene*, cu masa distribuită spaţial, superficial, sau pe curbe.

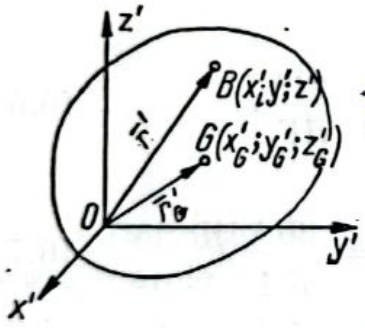


Fig. 6.2.

2°. **Centrul de masă al unui rigid.** Se numeşte *centru de masă* al unui rigid (S), punctul G al reperului $(\mathscr{R}')$ invariabil legat de rigid, care poate să aparţină, sau nu, mulţimii de puncte ce formează rigidul şi care este determinat în raport cu polul Q prin vectorul de poziţie $\bar{r}'_G$ (fig. 6.2), dat de relaţia

$$\boxed{\bar{r}'_G = \frac{\int_{(M)} \bar{r}'_1\, dm}{\int_{(M)} dm} = \frac{\int_{(M)} \bar{r}'_1\, dm}{M}}, \tag{6.11}$$

iar în cazul corpurilor omogene prin relaţiile

$$\boxed{\bar{r}'_G = \frac{\int_{(V)} \bar{r}'\, dV}{V}\,; \quad \bar{r}'_G = \frac{\int_{(A)} \bar{r}'\, dA}{A}\,; \quad \bar{r}'_G = \frac{\int_{(L)} \bar{r}'\, ds}{L}} \tag{6.12}$$

obţinute din relaţia generală (6.11) prin simplificarea densităţilor; în relaţiile precedente, $\bar{r}'$ este vectorul de poziţie în raport cu polul Q legat de rigid al punctului curent B, sediul masei elementare dm, (centrul volumului elementar dV, al ariei elementare dA, respectiv al arcului elementar ds).

Prin proiectarea relaţiei (6.11) pe axele reperului legat de rigid se obţin coordonatele centrului de masă G:

$$\boxed{x'_G = \frac{\int_{(M)} x'dm}{M}\ ;\ y'_G = \frac{\int_{(M)} y'dm}{M}\ ;\ z'_G = \frac{\int_{(M)} z'dm}{M}} \qquad (6.13)$$

expresii analoge acestora putînd fi obţinute şi prin proiectarea relaţiilor (6.12), evident cu modificările corespunzătoare.

Mărimea de la numărătorul expresiei (6.11), adică

$$\boxed{\bar{S}_Q = \int_{(M)} \bar{r}'dm = M\bar{r}'_G}, \qquad (6.14)$$

poartă numele de *moment static mecanic al rigidului în raport cu polul* Q, iar mărimile

$$\boxed{\int_{(M)} x'dm = Mx'_G\ ;\ \int_{(M)} y'dm = My'_G\ ;\ \int_{(M)} z'dm = Mz'_G}, \qquad (6.15)$$

se numesc *momente statice mecanice ale rigidului în raport cu planele* de coordonate $\pi'_x \equiv Qy'z'$, $\pi'_y \equiv Qz'x'$ şi $\pi'_z \equiv Qx'y'$; în mod analog pot fi definite *momente statice geometrice polare şi planare*, reprezentate prin mărimile de la numărătorii expresiilor (6.12) respectiv prin proiecţiile acestor mărimi pe axele legate de rigid.

Egalitatea cu zero a momentului static polar ($M\bar{r}'_G = 0$) va indica coincidenţa centrului de masă cu polul Q, iar egalitatea cu zero a unuia din momentele statice planare (de exemplu $Mx'_G = 0$), va indica situarea centrului de masă în planul de coordonate corespunzător acelui moment static zero.

În condiţiile de simetrie a corpurilor în repartiţia masei, această simetrie — faţă de un plan, o axă, sau un centru — implicînd:

— *simetria geometrică*, deci existenţa perechilor de puncte B şi B' geometric simetrice faţă de planul, axa sau centrul respectiv, şi

— *simetria în distribuţia densităţii*, deci valabilitatea condiţiei

$$\rho_V(B) = \rho_V(B'), \tag{6.16}$$

determinarea poziţiilor centrelor de masă poate fi mult uşurată, pe baza următoarelor proprietăţi:

Proprietatea I: centrul de masă al unui rigid cu plan de simetrie în repartiţia masei se găseşte în planul de simetrie.

Alegînd planul de simetrie ca plan de coordonate $Qx'y'$, (fig. 6.3), rezultă, ţinînd seama şi de condiţiile

$$\begin{cases} B(x', y', z') \leftrightarrow B'(x', y', -z'); \\ \rho_V(B) = \rho_V(B'), \end{cases} \tag{6.17}$$

concluzia

$$\int_{(M)} z'\,dm = \int_{(V)} z'\,\rho_V\,dV = 0 \tag{6.18}$$

cu consecinţa

$$z'_G = 0, \tag{6.19}$$

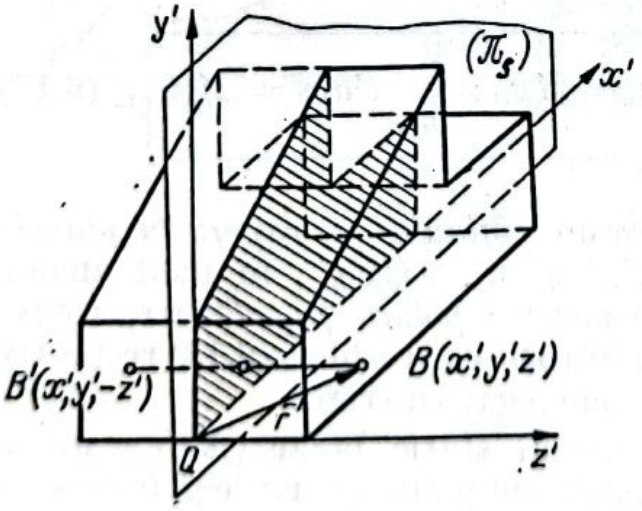


Fig. 6.3.

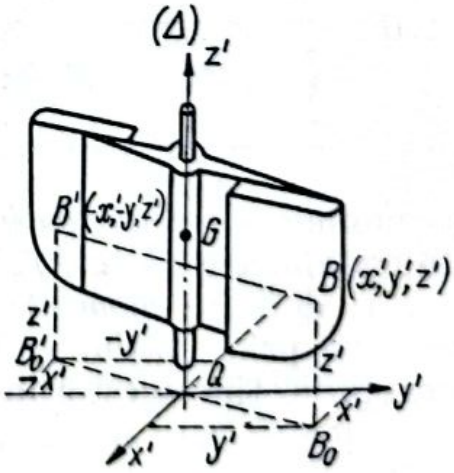


Fig. 6.4.

care confirmă enunţul proprietăţii.

Proprietatea a II-a: centrul de masă al unui rigid cu axă de simetrie în repartiţia masei se găseşte pe axa de simetrie.

Scanned with CamScanner

Alegînd axa de simetrie ca axă Qz' (fig. 6.4) şi avînd în vedere condiţiile

$$\begin{cases} B(x', y', z') \leftrightarrow B'(-x', -y', z') \\ \rho_V(B) = \rho_V(B'), \end{cases} \tag{6.20}$$

rezultă concluziile

$$\int_{(M)} x'dm = \int_{(V)} x' \rho_V dV = 0; \int_{(M)} y'dm = \int_{(V)} y' \rho_V dV = 0, \tag{6.21}$$

cu consecinţele

$$x'_G = y'_G = 0, \tag{6.22}$$

care confirmă enunţul proprietăţii.

Proprietatea a III-a : centrul de masă al unui rigid care prezintă simetrie faţă de un centru în repartiţia masei coincide cu centrul de simetrie.

Alegînd polul Q chiar în centrul de simetrie ($Q \equiv C$), (fig. 6.5) şi ţinînd seama de condiţiile

$$\begin{cases} B(\bar{r}') \leftrightarrow B'(-\bar{r}'); \\ \rho_V(B) = \rho_V(B'), \end{cases} \tag{6.23}$$

rezultă concluzia

$$\int_{(M)} \bar{r}'dm = \int_{(V)} \bar{r}' \rho_V dV = 0, \tag{6.24}$$

cu consecinţa enunţată în formularea proprietăţii :

$$\bar{r}'_G = 0. \tag{6.25}$$

De asemenea determinarea poziţiei centrului de masă la corpuri cu forme geometrice mai complicate poate fi sensibil simplificată pe baza unei a patra proprietăţi, prezentată uneori ca o teoremă şi anume

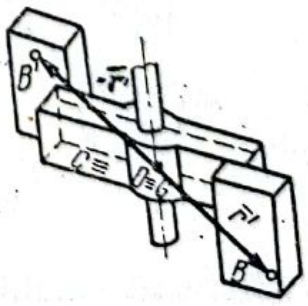


Fig. 6.5.

Teorema compunerii centrelor de masă : dacă un rigid, de masă egală cu M, poate fi descompus într-un număr determinat n, de porţiuni

simple, de mase M_i, cu centrele parţiale de masă G_i $(x'_{G_i}, y'_{G_i}, z'_{G_i})$, $(i = 1,2,..,n)$, determinate în raport cu polul Q prin vectorii de poziţie $\bar{r}'_{G_i}$, atunci vectorul de poziţie, faţă de acelaşi pol Q, al centrului de masă G corespunzător întregului rigid este dat de relaţia

$$\boxed{\bar{r}'_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i \bar{r}'_{G_i}}{\sum_{i=1}^{n} M_i}} \tag{6.26}$$

respectiv de relaţiile

$$\boxed{\bar{r}'_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i \bar{r}'_{G_i}}{\sum_{i=1}^{n} V_i}; \quad \bar{r}'_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \bar{r}'_{G_i}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}; \quad \bar{r}'_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i \bar{r}'_{G_i}}{\sum_{i=1}^{n} L_i}} \tag{6.27}$$

în cazul corpurilor omogene.

Relaţia (6.26) — şi deci şi relaţiile (6.27) — rezultă imediat, observîndu-se că prin descompunerea domeniului de integrare M în subdomeniile M_i, se poate scrie, (fig. 6.6) :

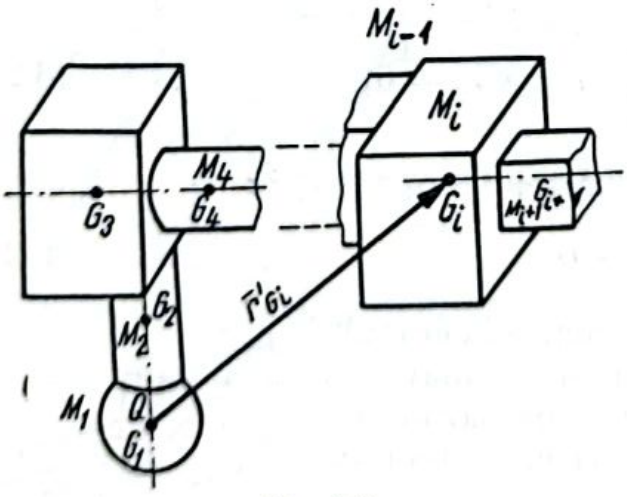


Fig. 6.6.

$$\bar{r}'_G = \frac{\int_{(M)} \bar{r}'\,dm}{\int_{(M)} dm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \int_{(M_i)} \bar{r}'\,dm}{\sum_{i=1}^{n} \int_{(M_i)} dm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i \bar{r}'_{G_i}}{\sum_{i=1}^{n} M_i}.$$

Relaţiile (6.26) şi (6.27) îşi păstrează valabilitatea şi în cazurile cînd unele mase parţiale — respectiv volume, sau arii parţiale la corpuri omogene — sînt extrase

din corp, cu condiţia însă de a se atribui în aceste situaţii semnul (—) maselor — respectiv, volumelor sau ariilor — extrase.

Astfel, în cazul piesei omogene din fig. 6.7, se va scrie

$$\bar{r}'_G = \frac{V_1\bar{r}'_{G_1} + V_2\bar{r}'_{G_2} - V_3\bar{r}'_{G_3} - V_4\bar{r}'_{G_4}}{V_1 + V_2 - V_3 - V_4},$$

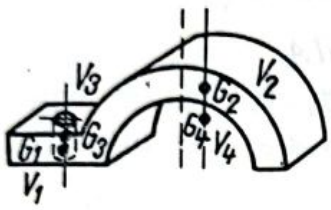


Fig. 6.7.

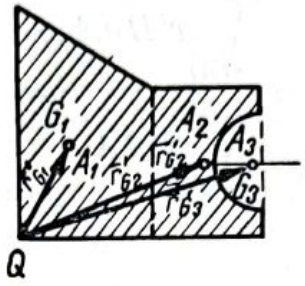


Fig. 6.8.

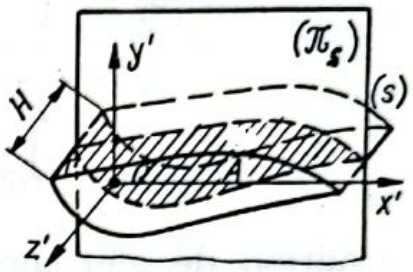


Fig. 6.9.

iar în cazul plăcii din fig. 6.8 :

$$\bar{r}'_{GA} = \frac{A\bar{r}'_{G_1} + A_2\bar{r}'_{G_2} - A_3\bar{r}'_{G_3}}{A_1 + A_2 - A_3}.$$

În continuare, vor fi examinate următoarele două probleme :

a) *Determinarea centrelor de masă la corpuri omogene cilindrice şi prismatice drepte, cu secţiuni transversale oarecare.* Fie un rigid omogen (S) în formă de cilindru drept — sau de prismă dreaptă — cu aria bazei egală cu A şi de grosime H (fig. 6.9), al cărui plan de simetrie geometrică (π_S), normal la generatoarele cilindrului, va fi ales ca plan de coordonate $Qx'y'$.

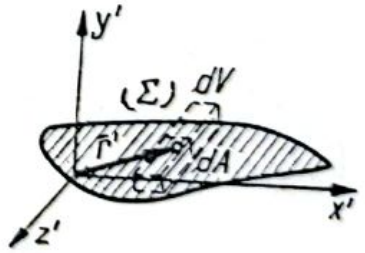


Fig. 6.10.

Centrul de masă G_A al secţiunii (Σ) a cilindrului cu planul de simetrie va fi determinat în raport cu polul Q prin vectorul de poziţie

$$\bar{r}'_{GA} = \frac{\int_{(A)} \bar{r}'\,dA}{A}; \qquad (6.28)$$

$\bar{r}'$ fiind vectorul de poziţie în raport, cu polul Q al centrului $B(\bar{r}')$ al ariei elementare dA (fig. 6.10) şi, în acelaşi timp, şi al centrului de

Scanned with CamScanner

masă al prismei elementare drepte avînd ca bază elementul de arie dA și ca muchii paralelele la generatoarele cilindrului, de lungimi egale cu H.

Considerînd corpul omogen cilindric ca rezultînd din asocierea unui număr infinit de asemenea prisme elementare, vectorul de poziție al centrului său de masă G va fi dat de relația

$$\bar{r}'_G = \frac{\int_{(V)} \bar{r}' dV}{\int_{(V)} dV} = \frac{\int_{(A)} \bar{r}' H dA}{\int_{(A)} H dA} = \frac{\int_{(A)} \bar{r}' dA}{\int_{(A)} dA},$$

rezultînd de aici concluzia

$$\boxed{\bar{r}'_G = \bar{r}'_{G_A}}, \tag{6.29}$$

adică, centrul de masă al corpului omogen coincide cu centrul de masă geometric al ariei de secțiune transversală a lui cu planul de simetrie geometrică.

b) *Determinarea centrelor de masă la corpuri omogene cu simetrie de revoluție.* În cazul corpurilor omogene generate prin rotația în jurul unei axe fixe fie a unei curbe plane — cazul suprafețelor materiale de revoluție — fie a unei arii plane — cazul volumelor de revoluție, determinarea poziției centrelor de masă poate fi mult ușurată prin aplicarea *teoremelor lui Pappus-Guldin*, prezentate în continuare.

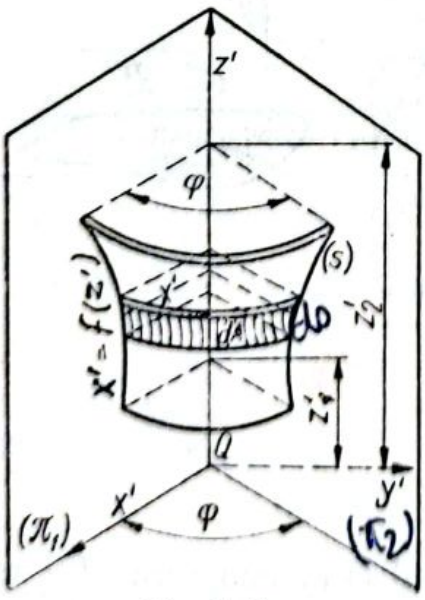


Fig. 6.11.

Teorema I Pappus-Guldin: aria suprafeței de revoluție, obținută prin rotirea unei curbe plane în jurul unei axe situate în planul curbei astfel încît curba să se găsească în întregime de aceeași parte a axei, este egală cu produsul dintre lungimea curbei și lungimea arcului de cerc descris de centrul de masă geometric al curbei.

Fie (S) suprafața materială de revoluție cuprinsă între planele (π_1) și (π_2) ce conțin axa de revoluție și care formează unghiul φ între ele, (fig. 6.11). Considerînd

planul (π_1) ca plan de coordonate $Qx'z'$, cu axa Qz' coincizînd cu axa de revoluţie, intersecţia acestui plan cu suprafaţa pe care se consideră distribuită masa corpului va fi curba plană (Γ), cu ecuaţia

$$x' = f(z') \tag{6.30}$$

considerată cunoscută şi de lungime egală cu L.

Porţiunea de arie de revoluţie generată, în rotaţie, de un element de arc de lungime egală cu ds, al curbei, va fi dată de relaţia

$$dA = x'\varphi \cdot ds \tag{6.31}$$

iar aria totală, A, generată prin rotaţia de unghiul φ a curbei (Γ) în jurul axei Qz' va avea valoarea

$$A = \int_{(A)} dA = \int_{(\Gamma)} x'\varphi ds = \varphi \int_{(\Gamma)} x' ds = \varphi(L x'_{G_\Gamma}),$$

adică

$$\boxed{A = L \cdot (x'_{G_\Gamma}\varphi)} \tag{6.32}$$

pentru rotaţia de unghiul φ şi

$$\boxed{A = L(2\pi x'_{G_\Gamma})} \tag{6.33}$$

pentru rotaţia completă ($\varphi = 2\pi$), justificîndu-se astfel enunţul teoremei.

Cunoaşterea abscisei x'_{G_Γ} a centrului de masă al curbei generatoare (Γ) va permite acum să se determine cota z'_{G_A} a centrului de greutate G_A al ariei revoluţiei scriindu-se

$$z'_{G_A} = \frac{\int_{(A)} z' dA}{A} = \frac{\int_{(A)} z'x' \cdot 2\pi ds}{2\pi L x'_{G_\Gamma}} =$$

$$= \frac{2\pi \int_{z'_1}^{z'_2} z' \cdot f(z') \sqrt{1 + \left(\frac{dx'}{dz'}\right)^2} dz'}{2\pi L x'_{G_\Gamma}},$$

adică

$$\boxed{z'_{G_A} = \frac{\int_{z'_1}^{z'_2} z' f(z') \sqrt{1 + f'^2(z')}\, dz'}{L x'_{G_\Gamma}}}, \tag{6.34}$$

prin $f'(z')$ fiind notată derivata $\left(\frac{dx'}{dz'}\right)$.

Teorema a doua Pappus-Guldin: volumul generat prin rotirea unei arii plane în jurul unei axe fixe situată în planul ariei și care nu intersectează aria este egal cu produsul dintre aria respectivă și lungimea arcului de cerc descris în rotație de centrul de masă geometric al ariei.

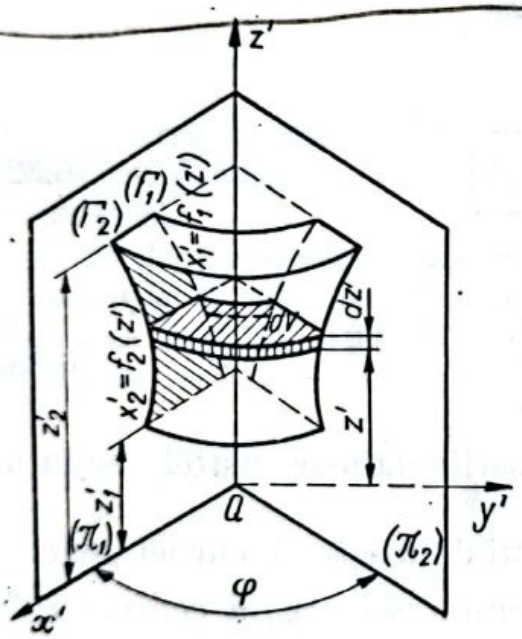


Fig. 6.12.

Fie un sector (S) dintr-un volum de revoluție, generat de aria plană A din planul $(\pi_1) \equiv Qx'z'$ (fig. 6.12), limitată de curbele (Γ_1) și (Γ_2) care nu intersectează axa Qz' și de cotele z'_1 și z'_2, prin rotirea ei în jurul axei Qz' de unghiul φ, cuprins între planele (π_1) și (π_2). Dacă

$$x'_1 = f_1(z') \text{ și } x'_2 = f_2(z') \tag{6.35}$$

sînt ecuațiile celor două curbe din planul $Qx'z'$, atunci, considerînd o arie elementară $dA = (x'_2 - x'_1)dz'$ din aria A, ea va genera, prin rotirea de unghiul φ în jurul axei Qz', volumul elementar

$$dV = \frac{1}{2}\varphi(x'^2_2 - x'^2_1)dz' = \varphi\frac{x'_1 + x'_2}{2}(x'_2 - x'_1)dz' = \varphi x' dA \tag{6.36}$$

În consecință, volumul total generat prin rotirea ariei A de unghiul φ în jurul axei Qz' va fi dat de relația

$$V = \int_{(V)} dV = \int_{(A)} \varphi x' dA = \varphi \int_{(A)} x' dA,$$

Scanned with CamScanner

adică

$$\boxed{V = A \cdot (x'_{G_A} \varphi)}, \tag{6.37}$$

respectiv

$$\boxed{V = A \cdot (2\pi x'_{G_A})}, \tag{6.38}$$

dacă rotaţia este completă, ($\varphi = 2\pi$).

Ultima relaţie permite să se determine cota z'_G a centrului de masă G al volumului de revoluţie scriindu-se

$$z'_G = \frac{\int_{(V)} z' dV}{V},$$

adică, ţinînd seama şi de expresia (6.36) a volumului elementar, (cu $\varphi = 2\pi$), se poate scrie

$$\boxed{z'_G = \frac{\int_{z'_1}^{z'_2} z' [f_2^2(z') - f_1^2(z')] dz'}{2A x'_{G_A}}} \cdot \tag{6.39}$$

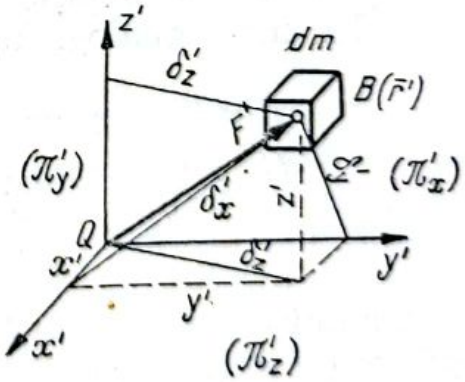


Fig. 6.13.

6.1.2. Tensorul de inerţie al unui rigid

57.

1°. Relaţii de definiţie a momentelor de inerţie ale unui rigid. Considerînd un rigid (S), căruia i se ataşează invariabil reperul $(\mathscr{R}') \equiv Qx'y'z'$, în raport cu care masa elementară dm din punctul $B(\bar{r}')$ este determinată prin coordonatele x', y', z' (fig. 6. 13), se introduc următoarele două serii de noţiuni :

— noţiunile de *momente de inerţie axiale* ale rigidului, definite prin relaţiile

$$J'_{xx} = \int_{(M)} \delta'^2_x dm = \int_{(M)} (y'^2 + z'^2) dm \; ; \; J'_{yy} = \int_{(M)} \delta'^2_y dm = \int_{(M)} (z'^2 + x'^2) dm \; ;$$

$$J'_{zz} = \int_{(M)} \delta'^2_z dm = \int_{(M)} (x'^2 + y'^2) dm \tag{6.40}$$

unde δ'_x δ'_y şi δ'_z reprezintă distanţele punctului curent B($\bar{r}'$) la axele Qx', Qy' şi, respectiv, Qz' (fig. 6.13);

— noţiunile de *momente de inerţie centrifugale* ale rigidului, definite cu ajutorul relaţiilor

$$J'_{xy} = J'_{yx} = \int_{(M)} x'y' dm \; ; J'_{yz} = J'_{zy} = \int_{(M)} y'z' dm \; ; \; J'_{zx} = J'_{xz} = \int_{(M)} x'z' dm \; , \tag{6.41}$$

ultimele fiind cunoscute încă şi sub denumirile de *produse de inerţie*, sau *produse de deviaţie*.

În mod analog, mărimile

$$J'_{\pi_x} = \int_{(M)} x'^2 dm \; ; \; J'_{\pi_y} = \int_{(M)} y'^2 dm \; : \; J'_{\pi_z} = \int_{(M)} z'^2 dm \tag{6.42}$$

sînt numite *momente de inerţie planare*, (faţă de planele $(\pi'_x) \equiv Qy'z'$, $(\pi'_y) \equiv Qx'z'$ şi, respectiv $(\pi'_z) \equiv Qx'y'$), iar mărimea

$$J'_Q = \int_{(M)} \bar{r}'^2 dm = \int_{(M)} (x'^2 + y'^2 + z'^2) dm \tag{6.42}$$

poartă denumirea de *moment de inerţie polar* al rigidului (faţă de polul Q).

Momentul de inerție polar, momentele de inerție axiale și momentele de inerție planare sînt mărimi pozitiv definite; momentele de inerție centrifugale pot fi pozitive, negative, sau chiar egale cu zero (de exemplu în cazul cînd planele de coordonate legate de rigid sînt plane de simetrie în repartiția masei).

Prin descompunerea integralelor care definesc momentele de inerție axiale în sume de integrale pot fi scrise următoarele relații între momentele de inerție axiale și cele planare

$$\boxed{J'_{xx} = J'_{\pi_y} + J'_{\pi_z}\,;\; J'_{yy} = J'_{\pi_x} + J'_{\pi_z}\,;\; J'_{zz} = J'_{\pi_x} + J'_{\pi_y}} \qquad (6.43)$$

iar prin descompunerea integralei ce definește momentul de inerție polar în sume de integrale, precum și prin asocierea convenabilă a acestora din urmă, se obțin și relațiile:

$$\boxed{J'_Q = J'_{\pi_x} + J'_{\pi_y} + J'_{\pi_z}} \qquad (6.44)$$

$$\boxed{J'_Q = J'_{xx} + J'_{\pi_x} = J'_{yy} + J'_{\pi_y} = J'_{zz} + J'_{\pi_z}} \qquad (6.45)$$

și

$$\boxed{J'_Q = \frac{J'_{xx} + J'_{yy} + J'_{zz}}{2}} \qquad (6.46)$$

2°. Calculul momentelor de inerție axiale și centrifugale. În aplicațiile concrete ale mecanicii se întîlnesc frecvent situații cînd anumite forme geometrice ale rigidelor studiate permit calculul, cu mai multă ușurință, al momentelor de inerție axiale și centrifugale în raport cu un reper cartezian auxiliar $W\xi\eta\zeta$, (fig. 6.14), care nu coincide întotdeauna cu reperul în raport cu care se scriu ecuațiile de mișcare, ultimul reper fiind ales, de regulă, cu originea în centrul de masă al rigidului și cu axele Gx', Gy' și Gz' orientate într-un anumit mod, după criterii ce vor fi stabilite ulterior.

În asemenea situații, problema determinării momentelor de inerție axiale și centrifugale în raport cu reperul $Gx'y'z'$, (fig. 6.14), se rezolvă în două etape:

— stabilind, mai întîi, o serie de relații între momentele de inerție față de reperul inițial $W\xi\eta\varsigma$ și un reper auxiliar $G\xi^*\eta^*\zeta^*$, cu ori-

ginea în centrul de masă şi cu axele paralele la axele reperului iniţial, problema stabilirii acestor relaţii fiind cunoscută sub numele de *variaţia momentelor de inerţie la translaţia axelor* :

— stabilind apoi o a doua serie de relaţii, între momentele de inerţie faţă de axele reperelor $G\xi^*\eta^*\varsigma^*$ şi $Gx'y'z'$, problema stabi-

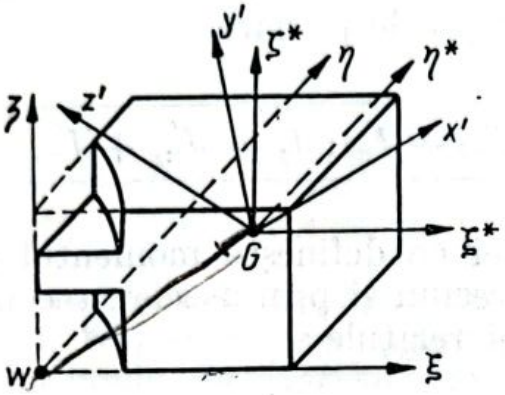


Fig. 6.14.

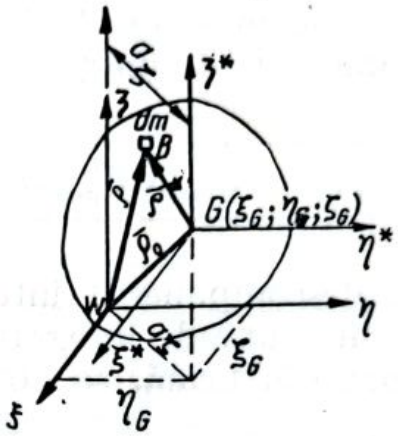


Fig. 6.15.

lirii acestor din urmă relaţii fiind cunoscută sub numele de *variaţia momentelor de inerţie la rotaţia axelor.*

Rezolvările acestor două probleme sînt date mai jos.

a) *Variaţia momentelor de inerţie axiale şi centrifugale la translaţia axelor.* Admiţîndu-se că sînt cunoscute momentele de inerţie axiale şi centrifugale ale rigidului (S) în raport cu reperul iniţial $W\xi\eta\varsigma$, adică integralele

$$\begin{cases} J'_{\xi\xi} = \int_{(M)} (\eta^2 + \varsigma^2)dm\,; \quad J'_{\eta\eta} = \int_{(M)} (\xi^2 + \varsigma)dm\,; \quad J'_{\varsigma\varsigma} = \int_{(M)} (\xi^2 + \eta^2)dm \\ J'_{\xi\eta} = \int_{(M)} \xi\eta\, dm\,; \quad J'_{\eta\varsigma} = \int_{(M)} \eta\varsigma dm\,; \quad J'_{\varsigma\xi} = \int_{(M)} \xi\varsigma dm \end{cases} \tag{6.47}$$

şi coordonatele faţă de acest reper ale centrului de masă G al rigidului, respectiv vectorul de poziţie

$$\bar{\rho}_G = \overrightarrow{WG} = \xi_G \bar{i}_\xi + \eta_G \bar{i}_\eta + \zeta_G \bar{i}_\varsigma \tag{6.48}$$

unde $\bar{i}_\xi$, $\bar{i}_\eta$ şi $\bar{i}_\varsigma$ sînt versorii axelor reperului $W\xi\eta\varsigma$, se va considera şi reperul $G\xi^*\eta^*\varsigma^*$, cu axele paralele la axele reperului iniţial (fig. 6.15), deci cu orientările determinate prin aceiaşi versori $\bar{i}_\xi$, $\bar{i}_\eta$ şi

$\bar{i}_\zeta$; pătratele distanţelor dintre axele celor două repere, paralele două cîte două, vor fi date de relaţiile

$$a_\xi^2 = \eta_G^2 + \zeta_G^2 ; \quad a_\eta^2 = \zeta_G^2 + \xi_G^2 \quad ; \quad a_\zeta^2 = \xi_G^2 + \eta_G^2 \tag{6.49}$$

Un punct curent, B, al rigidului, sediul masei elementare dm, va fi determinat în raport cu originile W şi G ale celor două repere prin vectorii de poziţie

$$\bar{\rho} = \xi\bar{i}_\xi + \eta\bar{i}_\eta + \zeta\bar{i}_\zeta \tag{6.50}$$

respectiv

$$\bar{\rho}^* = \xi^*\bar{i}_\xi + \eta^*\bar{i}_\eta + \zeta^*\bar{i}_\zeta \tag{6.51}$$

între ei existînd relaţia

$$\bar{\rho}^* = \bar{\rho} - \bar{\rho}_G = (\xi - \xi_G)\bar{i}_\xi + (\eta - \eta_G)\bar{i}_\eta + (\zeta - \zeta_G)\bar{i}_\zeta, \tag{6.52}$$

cu consecinţele

$$\xi^* = \xi - \xi_G \quad ; \quad \eta^* = \eta - \eta_G ; \quad \zeta^* = \zeta - \zeta_G \tag{6.53}$$

Introducînd ultimele expresii în relaţiile de definiţie a momentelor de inerţie ale rigidului în raport cu reperul $G^*\xi^*\eta\zeta^*$, adică în relaţiile

$$J_{\xi\xi}^* = \int_{(M)} (\eta^{*2} + \zeta^{*2})dm ; \; J_{\eta\eta}^* = \int_{(M)} (\xi^{*2} + \zeta^{*2})dm ; \; J_{\zeta\zeta}^* = \int_{(M)} (\xi^{*2} + \eta^{*2})dm ;$$

$$J_{\xi\eta}^* = \int_{(M)} \xi^* \eta^* dm ; \; J_{\eta\zeta}^* = \int_{(M)} \eta^* * \zeta dm ; \; J_{\zeta\xi}^* = \int_{(M)} \xi^* \zeta^* dm \tag{6.54}$$

descompunînd integralele în sume de integrale, scoţînd în afara semnelor de integrare coordonatele ξ_G, η_G şi ζ_G ale centrului de masă G — aceleaşi pentru toate masele elementare asupra cărora sînt extinse operaţiile de integrare — şi ţinînd apoi seama de semnificaţiile integralelor rămase, se obţin, după reducerea termenilor asemenea, următoarele relaţii de trecere, la translaţia axelor, de la

momentele de inerţie în raport cu reperul iniţial $W\xi\eta\zeta$ la momentele de inerţie faţă de reperul $G\xi^*\eta^*\zeta^*$

$$\begin{aligned} &J^*_{\xi\xi} = J'_{\xi\xi} - Ma^2_\xi\,;\quad J^*_{\eta\eta} = J'_{\eta\eta} - Ma^2_\eta\,;\quad J^*_{\zeta\zeta} = J'_{\zeta\zeta} - Ma^2_\zeta\,;\\ &J^*_{\xi\eta} = J'_{\xi\eta} - M\xi_G\eta_G\,;\quad J^*_{\eta\zeta} = J'_{\eta\zeta} - M\eta_G\zeta_G\,;\quad J^*_{\zeta\xi} = J'_{\zeta\xi} - M\zeta_G\xi_G \end{aligned} \tag{6.55}$$

Primelor trei relaţii li se poate da o formă mai generală, considerîndu-se două axe paralele (Δ'_G) şi (Δ') — prima trecînd prin centrul de masă G şi a doua la distanţa a de acest centru (fig. 6.16) — şi scriindu-se

$$J'_\Delta = J'_{\Delta_G} + Ma^2\,, \tag{6.56}$$

această din urmă relaţie exprimînd aşa numita *teoremă Huyghens — Steiner*, cu următoarea formulare:

Momentul de inerţie al unui rigid în raport cu o axă oarecare este egal cu momentul de inerţie al rigidului în raport cu o axă paralelă la axa dată şi trecînd prin centrul de masă, adunat cu produsul dintre masa rigidului şi pătratul distanţei dintre axe.

Relaţia (6.56) evidenţiază faptul că momentul de inerţie al unui rigid în raport cu o axă de direcţie dată în corp are valoarea minimă atunci cînd axa trece prin centrul de masă al corpului respectiv.

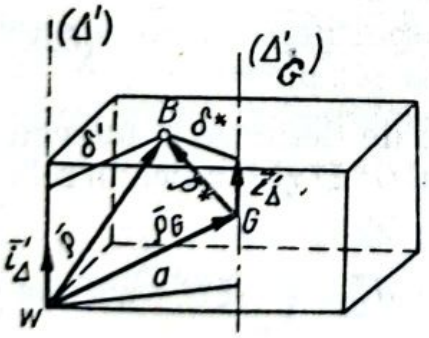


Fig. 6.16.

b) *Variaţia momentelor de inerţie axiale şi centrifugale ale unui rigid la rotaţia axelor.* În continuare se vor considera cunoscute momentele de inerţie axiale şi centrifugale definite prin relaţiile (6.54) şi se vor stabili relaţiile de trecere la momentele de inerţie axiale şi centrifugale ale rigidului în raport cu reperul $Gx'y'z'$, rotit faţă de reperul $G\xi^*\eta^*\zeta^*$ într-o poziţie determinată prin următorul tabel de cosinusuri directoare:

—	$\bar{i}_\xi$	$\bar{i}_\eta$	$\bar{i}_\zeta$
$\bar{i}'$	$\alpha^*_{x\xi}$	$\alpha^*_{x\eta}$	$\alpha^*_{x\zeta}$
$\bar{j}'$	$\alpha^*_{y\xi}$	$\alpha^*_{y\eta}$	$\alpha^*_{y\zeta}$
$\bar{k}'$	$\alpha^*_{z\xi}$	$\alpha^*_{z\eta}$	$\alpha^*_{z\zeta}$

(6.57)

Scanned with CamScanner

Un punct curent B al rigidului, sediul masei elementare dm, va fi determinat în raport cu cele două repere prin vectorii de poziţie

$$\bar{\rho}^* = \xi^* \bar{i}_\xi + \eta^* \bar{i}_\eta + \zeta^* \bar{i}_\zeta, \tag{6.58}$$

respectiv

$$\bar{r}' = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}', \tag{6.59}$$

între ei existînd relaţia evidentă

$$\bar{r}' = \bar{\rho}^*, \tag{6.60}$$

cu următoarele proiecţii pe axele reperului $Gx'y'z'$:

$$x' = \xi^* \alpha^*_{x\xi} + \eta^* \alpha^*_{x\eta} + \zeta^* \alpha^*_{x\zeta}; \quad y' = \xi^* \alpha^*_{y\xi} + \eta^* \alpha^*_{y\eta} + \zeta^* \alpha^*_{y\zeta}; \quad z' =$$

$$= \xi^* \alpha^*_{z\xi} + \eta^* \alpha^*_{z\eta} + \zeta^* \alpha^*_{z\zeta}. \tag{6.61}$$

Pentru stabilirea, mai întîi, a relaţiilor de trecere de la momentele de inerţie în raport cu reperul $G\xi^*\eta^*\zeta^*$ la momentele de inerţie axiale, J'_{xx}, J'_{yy} şi J'_{zz} se va considera o dreaptă (Δ') trecînd prin polul G şi cu orientarea determinată în raport cu reperul $G\xi^*\eta^*\zeta^*$ prin versorul $\bar{i}'_\Delta(\alpha^*_{\Delta\xi}, \alpha^*_{\Delta\eta}, \alpha^*_{\Delta\zeta})$, observîndu-se din fig. 6.17 că pentru patratul distanţei δ' a unui punct curent $B(\xi^*, \eta^*, \zeta^*)$ al rigidului la axa (Δ') poate fi scrisă expresia

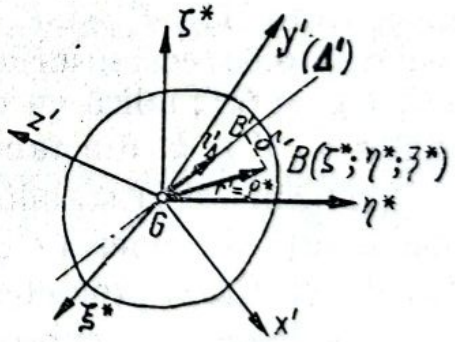


Fig. 6.17.

$$\delta'^2 = \overline{BB'}^2 = \overline{GB}^2 - \overline{GB'}^2 = \bar{\rho}^{*2} - (\bar{\rho}^* \bar{i}'_\Delta)^2 = \bar{\rho}^{*2} \bar{i}'^2_\Delta - (\bar{\rho}^* \bar{i}'_\Delta)^2 =$$

$$= (\xi^{*2} + \eta^{*2} + \zeta^{*2})(\alpha^{*2}_{\Delta\xi} + \alpha^{*2}_{\Delta\eta} + \alpha^{*2}_{\Delta\zeta}) - (\xi^* \alpha^*_{\Delta\xi} + \eta^* \alpha^*_{\Delta\eta} + \xi^* \alpha^*_{\Delta\xi})^2,$$

adică

$$\delta'^2 = \alpha^{*2}_{\Delta\xi}(\eta^{*2} + \zeta^2) + \alpha^{*2}_{\Delta\eta}(\xi^2 + \zeta^{*2}) + \alpha^{*2}_{\Delta\zeta}(\xi^2 + \eta^{*2}) -$$

$$- 2\alpha^*_{\Delta\xi} \alpha^*_{\Delta\eta} \xi^* \eta^* - 2\alpha^*_{\Delta\eta} \alpha^*_{\Delta\zeta} \eta^* \zeta^* - 2\alpha^*_{\Delta\zeta} \alpha^*_{\Delta\xi} \zeta^* \xi^* \tag{6.62}$$

Scanned with CamScanner

Introducînd această expresie în relaţia de definiţie a momentului de inerţie al rigidului în raport cu axa (Δ'):

$$J'_\Delta = \int_{(M)} \delta'^2 \, dm,$$

descompunînd integrala într-o sumă de şase integrale, corespunzătoare celor şase termeni ai expresiei (6.62), scoţînd apoi de sub fiecare integrală cosinusurile directoare ale axei (Δ') — aceleaşi pentru toate masele elementare asupra cărora sînt extinse operaţiile de integrare — şi ţinînd seama şi de relaţiile de definiţie (6.54) ale momentelor de inerţie în raport cu reperul $G^*\xi^*\eta^*\zeta^*$, rezultă următoarea relaţie generală de trecere de la momentele de inerţie faţă de reperul $G\xi^*\eta^*\zeta^*$ la momentul de inerţie în raport cu axa (Δ'):

$$\boxed{\begin{aligned} J'_\Delta = {} & J^*_{\xi\xi}\alpha^{*2}_{\Delta\xi} + J^*_{\eta\eta}\alpha^{*2}_{\Delta\eta} + J^*_{\zeta\zeta}\,\alpha^{*2}_{\Delta\zeta} - 2J^*_{\xi\eta}\alpha^*_{\Delta\xi}\alpha^*_{\Delta\,\eta} - \\ & - 2J^*_{\eta\zeta}\alpha^*_{\Delta\eta}\alpha^*_{\Delta\zeta} - 2J^*_{\zeta\xi}\alpha^*_{\Delta\zeta}\alpha^*_{\Delta\xi}. \end{aligned}} \tag{6.63}$$

Este uşor de înţeles acum că cele trei momente de inerţie axiale căutate, J'_{xx}, J'_{yy} şi J'_{zz}, vor putea fi obţinute înlocuind în relaţia generală (6.63) cosinusurile directoare ale axei (Δ') cu cele ale axelor Gx', Gy' şi Gz', adică cu cosinusurile directoare corespunzătoare versorilor $\bar{i}'$, $\bar{j}'$ şi $\bar{k}'$ din tabelul 6.57.

Trecînd şi la stabilirea relaţiilor de trecere de la momentele de inerţie faţă de reperul $G\xi^*\eta^*\zeta^*$ la momentele de inerţie centrifugale J'_{xy}, J'_{yz} şi J'_{zx}, se vor efectua următoarele operaţii:

— înlocuirea expresiilor (6.61) în relaţiile de definiţie (6.41) ale momentelor de inerţie cenrifugale căutate:

— descompunerea fiecăruia din integralele ce definesc momentele de inerţie centrifugale J'_{xy}, J'_{yz} şi J'_{zx} în sume de cîte şase integrale, corespunzătoare celor şase termeni ai produselor $x'y'$, $y'z'$ şi $z'x'$, obţinuţi prin scoaterea în factor a coordonatelor punctului B;

— scoaterea de sub semnele de integrare a cosinusurilor directoare $\alpha^*_{x\xi}$, $\alpha^*_{x\eta}$, ... $\alpha^*_{z\zeta}$, aceleaşi pentru toate masele elementare asupra cărora sînt extinse operaţiile de integrare:

— introducerea, în baza relaţiilor de definiţie (6.55), a momentelor de inerţie în raport cu axele reperului $G\xi^*\eta^*\zeta^*$ şi efectuarea,

Scanned with CamScanner

în expresiile momentelor de inerţie centrifugale J'_{xy}, J'_{yz} şi J'_{zx}, a înlocuirilor evidente

$$\int_{(M)} \xi^{*2}\, dm = \int_{(M)} [\overline{\rho}^{*2} - (\eta^{*2} + \zeta^{*2})]\, dm = \int_{(M)} \rho^{*2} dm -$$

$$- \int_{(M)} (\eta^{*2} + \zeta^{*2}) dm = J^*_G - J^*_{\xi\xi};$$

$$\int_{(M)} \eta^* dm = \int_{(M)} [\overline{\rho}^{*2} - (\xi^* + \zeta^{*2})] dm = \int_{(M)} \overline{\rho}^{*2}\, dm -$$

$$- \int_{(M)} (\xi^{*2} + \zeta^{*2})\, dm = J^*_G - J^*_{\eta\eta};$$

$$\int_{(M)} \zeta^{*2}\, dm = \int_{(M)} [\bar{\rho}^{*2} - (\xi^{*2} + \eta^{*2})] dm = \int_{(M)} \overline{\rho}^{*2} dm -$$

$$- \int_{(M)} (\xi^{*2} + \eta^{*2}) dm = J^*_G - J^*_{\zeta\zeta}; \qquad (6.64)$$

— scoaterea în factor comun, în expresiile momentelor centrifugale căutate, a momentului de inerţie polar J^*_G şi luarea în consideraţie a relaţiilor

$$\alpha^*_{x\xi}\alpha^*_{y\xi} + \alpha^*_{x\eta}\alpha^*_{y\eta} + \alpha^*_{x\zeta}\alpha^*_{y\zeta} = 0; \quad \alpha^*_{y\xi}\alpha^*_{z\xi} + \alpha^*_{y\eta}\alpha^*_{z\eta} + \alpha^*_{y\zeta}\alpha^*_{z\zeta} = 0;$$

$$\alpha^*_{z\xi}\alpha^{*2}_{x} + \alpha^*_{z\eta}\alpha^*_{x\eta} + \alpha^*_{z\zeta}\alpha^*_{x\zeta} = 0,$$

exprimînd condiţiile de ortogonalitate a perechilor de versori ai axelor reperului $Gx'y'z'$, ($\bar{i}'\bar{j}' = 0$; $\bar{j}'\bar{k}' = 0$; $\bar{k}'\bar{i}' = 0$).

După înlocuirile amintite ale cosinusurilor directoare în relaţia (6.63) şi după efectuarea tuturor operaţiilor menţionate mai sus în relaţiile de definiţie a momentelor de inerţie centrifugale J'_{xy}, J'_{yz} şi J'_{zx}, se obţin următoarele relaţii de trecere de la momentele de inerţie în raport cu reperul $G\xi^*\eta^*\zeta^*$ la momentele de inerţie în raport cu

reperul $Gx'y'z'$:

$$J'_{xx} = J^*_{\xi\xi}\alpha^{*2}_{x\xi} + J^*_{\eta\eta}\alpha^{*2}_{x\eta} + J^*_{\zeta\zeta}\alpha^{*2}_{x\zeta} - 2J^*_{\xi\eta}\alpha^*_{x\xi}\alpha^*_{x\eta} - 2J^*_{\eta\zeta}\alpha^*_{x\eta}\alpha^*_{x\zeta} - \\ - 2J^*_{\zeta\xi}\alpha^*_{x\zeta}\alpha^*_{x\xi};$$

$$J'_{yy} = J^*_{\xi\xi}\alpha^{*2}_{y\xi} + J^*_{\eta\eta}\alpha^{*2}_{y\eta} + J^*_{\zeta\zeta}\alpha^{*2}_{y\zeta} - 2J^*_{\xi\eta}\alpha^*_{y\xi}\alpha^*_{y\eta} - 2J^*_{\eta\zeta}\alpha^*_{y\eta}\alpha^*_{y\zeta} - \\ - 2J^*_{\zeta\xi}\alpha^*_{y\zeta}\alpha^*_{y\xi};$$

$$J'_{zz} = J^*_{\xi\xi}\alpha^{*2}_{z\xi} + J^*_{\eta\eta}\alpha^{*2}_{z\eta} + J^*_{\zeta\zeta}\alpha^{*2}_{z\zeta} - 2J^*_{\xi\eta}\alpha^*_{z\xi}\alpha^*_{z\eta} - 2J^*_{\eta\zeta}\alpha^*_{z\eta}\alpha^*_{z\zeta} - \\ - 2J^*_{\zeta\xi}\alpha^*_{z\zeta}\alpha^*_{z\xi};$$

$$J'_{xy} = -J^*_{\xi\xi}\alpha^*_{x\xi}\alpha^*_{y\xi} - J^*_{\eta\eta}\alpha^*_{x\eta}\alpha^*_{y\eta} - J^*_{\zeta\zeta}\alpha^*_{x\zeta}\alpha^*_{y\zeta} + J^*_{\xi\eta}(\alpha^*_{x\xi}\alpha^*_{y\eta} + \alpha^*_{x\eta}\alpha^*_{y\xi}) + \\ + J^*_{\eta\zeta}(\alpha^*_{x\eta}\alpha^*_{y\zeta} + \alpha^*_{x\zeta}\alpha^*_{y\eta}) + J^*_{\zeta\xi}(\alpha^*_{x\zeta}\alpha^*_{y\xi} + \alpha^*_{x\xi}\alpha^*_{y\zeta});$$

$$J'_{yz} = -J^*_{\xi\xi}\alpha^*_{y\xi}\alpha^*_{z\xi} - J^*_{\eta\eta}\alpha^*_{y\eta}\alpha^*_{z\eta} - J^*_{\zeta\zeta}\alpha^*_{y\zeta}\alpha^*_{z\zeta} + J^*_{\xi\eta}(\alpha^*_{y\xi}\alpha^*_{z\eta} + \alpha^*_{y\eta}\alpha^*_{z\xi}) + \\ + J^*_{\eta\zeta}(\alpha^*_{y\eta}\alpha^*_{z\zeta} + \alpha^*_{y\zeta}\alpha^*_{z\eta}) + J^*_{\zeta\xi}(\alpha^*_{y\zeta}\alpha^*_{z\xi} + \alpha^*_{y\xi}\alpha^*_{z\zeta});$$

$$J'_{zx} = -J^*_{\xi\xi}\alpha^*_{z\xi}\alpha^*_{x\xi} - J^*_{\eta\eta}\alpha^*_{z\eta}\alpha^*_{x\eta} - J^*_{\zeta\zeta}\alpha^*_{z\zeta}\alpha^*_{x\zeta} + J^*_{\xi\eta}(\alpha^*_{z\xi}\alpha^*_{x\eta} + \alpha^*_{z\eta}\alpha^*_{x\xi}) + \\ + J^*_{\eta\zeta}(\alpha^*_{z\eta}\alpha^*_{x\zeta} + \alpha^*_{z\zeta}\alpha^*_{x\eta}) + J^*_{\zeta\xi}(\alpha^*_{z\zeta}\alpha^*_{x\xi} + \alpha^*_{z\xi}\alpha^*_{x\zeta}).$$

(6.65)

Datorită faptului că relațiile precedente,— cu ultimele trei, care dau momentele de inerție centrifugale, luate cu semnele schimbate—, sînt identice celora care exprimă modificarea componentelor unui tensor de ordinul al doilea la transformarea de coordonate (6.61), ansamblul momentelor de inerție axiale și centrifugale — ultimele luate cu semnele schimbate — corespunzătoare unui anumit reper cu originea într-un pol Q al rigidului a fost numit *tensorul de inerție al rigidului în polul* Q : în cazul reperului $Gx'y'z'$ considerat, matricea

acestui tensor de inerţie va fi notată cu simbolul

$$\mathbf{J}'_G = \begin{Vmatrix} J'_{xx} & -J'_{xy} & -J'_{xz} \\ -J'_{yx} & J'_{yy} & -J'_{yz} \\ -J'_{zx} & -J'_{zy} & J'_{zz} \end{Vmatrix} \tag{6.66}$$

3°. Momente centrale de inerţie. Axe centrale de inerţie.

a) *Definirea momentelor centrale de inerţie. Elipsoidul central de inerţie.* Relaţia (6.63) scoate în evidenţă faptul că pentru un rigid dat şi pentru un reper $G\xi^*\eta^*\zeta^*$ dat — deci pentru valori determinate ale momentelor de inerţie $J^*_{\xi\xi}, J^*_{\eta\eta}, \ldots, J^*_{\zeta\xi}$ —, momentul de inerţie al rigidului în raport cu axa (Δ') ce trece prin centrul de masă G este o funcţie de cosinusurile directoare ale axei, adică se poate scrie

$$J'_\Delta = J'_\Delta(\alpha^*_{\Delta\xi}, \alpha^*_{\Delta\eta}, \alpha^*_{\Delta\zeta}). \tag{6.67}$$

Considerînd un punct $N(\bar{r}'_N)$ situat pe axa (Δ'), a cărui distanţă la polul G să se modifice, în timpul schimbării orientării axei (Δ'), astfel încît să fie satisfăcută condiţia

$$J'_\Delta \bar{r}'^2_N = [J^*_{\xi\xi}\alpha^{*2}_{\Delta\xi} + J^*_{\eta\eta}\alpha^{*2}_{\Delta\eta} + J^*_{\zeta\zeta}\alpha^*_{\Delta\zeta} - 2J^*_{\xi\eta}\alpha^*_{\Delta\xi}\alpha^*_{\Delta\eta} - 2J^*_{\eta\zeta}\alpha^*_{\Delta\eta}\alpha^*_{\Delta\zeta} -$$

$$- 2J^*_{\zeta\xi}\alpha^*_{\Delta\zeta}\alpha^*_{\Delta\xi}]\bar{r}'^2_N = \text{const.} = C, \tag{6.68}$$

locul geometric al poziţiilor acestui punct corespunzător diverselor orientări ale axei (Δ') va fi o suprafaţă, a cărei ecuaţie va putea fi obţinută efectuîndu-se în relaţia (6.68) înlocuirile

$$\alpha^*_{\Delta\xi}|\bar{r}'_N| = \xi^*_N = \xi^*\,; \quad \alpha^*_{\Delta\eta}|\bar{r}'_N| = \eta^*_N = \eta^*\,; \quad \alpha^*_{\Delta\zeta}|\bar{r}'_N| = \zeta^*_N = \zeta^* \tag{6.69}$$

ultimele expresii rezultînd din proiectarea pe axele reperului $G\xi^*\eta^*\zeta^*$ a relaţiei

$$\bar{r}'_N = \xi^*\bar{i}_\xi + \eta^*\bar{i}_\eta + \zeta^*\,\bar{i}_\zeta = |\bar{r}'_N|\bar{i}'_\Delta = |\bar{r}'_N|[\alpha^*_{\Delta\xi}\bar{i}_\xi + \alpha^*_{\Delta\eta}\,\bar{i}_\eta + \alpha^*_{\Delta\zeta}\,\bar{i}_\zeta].$$

Rezultă astfel ecuaţia

$$J^*_{\xi\xi}\,\xi^{*2} + J^*_{\eta\eta}\eta^{*2} + J^*_{\zeta\zeta}\zeta^{*2} - 2J^*_{\xi\eta}\xi^*\eta^* - 2J^*_{\eta\zeta}\eta^*\zeta^* - 2J^*_{\zeta\xi}\zeta^*\xi^* = C \tag{6.70}$$

reprezentînd un elipsoid ($J'_\Delta \neq 0$, deci $|\bar{r}'_N|^2 = \frac{C}{J'_\Delta}$ nu poate lua valori infinite), cu centrul în originea G (în ecuație lipsesc termenii de gradul întîi) și cu axele rotite față de axele reperului $G\xi^*\eta^*\zeta^*$, (forma pătratică a ecuației conține și termenii dreptunghiulari); rezultă de aici că distanța $\overline{GN} = |\bar{r}'_N|$ va fi cuprinsă între valoarea $|\bar{r}'_N|_{min}$ corespunzătoare situației cînd axa (Δ') va coincide cu semiaxa mică a elipsoidului—și între valoarea $|\bar{r}'_N|_{max}$—corespunzătoare cazului cînd axa (Δ') va coincide cu semiaxa mare a elipsoidului.

Relația (6.68) arată, în consecință, că momentul de inerție în raport cu axa (Δ'), corespunzător unei poziții oarecare a axei, va fi cuprins între valorile extreme

$$J'_{\Delta min} = \frac{C}{|\bar{r}'_N|^2_{max}} \leqslant J'_\Delta = \frac{C}{\bar{r}'^2_N} \leqslant \frac{C}{|\bar{r}'_N|^2_{min}} = J'_{\Delta max}, \qquad (6.71)$$

Aceste valori extreme, $J'_{\Delta min}$ și $J'_{\Delta max}$ precum și valoarea $J'_{\Delta min\, max}$ corespunzătoare celei de-a treia semiaxe a elispoidului, sînt numite *momente centrale de inerție*; de asemenea, semiaxele elipsoidului, pentru care momentul de inerție J'_Δ ia valori extreme, au fost numite *momente centrale de inerție* ale rigidului, iar elipsoidul însuși a fost numit *elipsoid central de inerție.*

Ecuația elipsoidului central de inerție în raport cu reperul $Gx'y'z'$, dedusă în același mod în care a fost stabilită și ecuația (6.70), va avea forma

$$J'_{xx}x'^2 + J'_{yy}y'^2 + J'_{zz}z'^2 - 2J'_{xy}x'y' - 2J'_{yz}y'z' - 2J'_{zx}z'x' = C \qquad (6.72)$$

Orientarea axelor reperului $Gx'y'z'$ după axele elipsoidului central de inerție va face însă ca ecuația precedentă să capete forma redusă, corespunzătoare raportării elipsoidului chiar la axele lui, adică

$$J'_{xx}x'^2 + J'_{yy}y'^2 + J'_{zz}z'^2 = C, \qquad (6.73)$$

rezultînd de aici concluzia că în cazul coincidenței axelor reperului $Gx'y'z'$ cu axele centrale de inerție, momentele centrifugale de inerție devin egale cu zero:

$$J'_{xy} = J'_{yz} = J'_{zx} = 0. \qquad (6.74)$$

În această situație, momentele axiale de inerție — egale cu momentele centrale de inerție — vor fi notate cu un singur indice

($J'_{xx} \to J'_x$; $J'_{yy} \to J'_y$; $J'_{zz} \to J'_z$); se înțelege, de asemenea, că în acest caz matricea tensorului de inerție se va reduce la o matrice diagonală

$$\mathbf{J}'_G \left\| \begin{matrix} J'_x & 0 & 0 \\ 0 & J'_y & 0 \\ 0 & 0 & J'_z \end{matrix} \right\| \qquad (6.75)$$

Se mai face mențiunea că, repetîndu-se întocmai raționamentele precedente, se poate defini un elipsoid de inerție și într-un pol Q, altul decît centrul de masă G; în acest caz el va fi numit *elipsoid de inerție relativ la polul Q*, axele lui vor fi numite *axe principale de inerție relative la polul Q*, iar momentele de inerție față de axele sale, alese ca axe ale reperului $Qx'y'z'$, vor fi numite *momente principale de inerție relative la polul Q*, fiind notate tot cu un singur indice.

b) *Determinarea direcțiilor axelor centrale de inerție și a momentelor centrale de inerție.* Faptul că alegerea axelor reperului $Gx'y'z'$ după axele centrale de inerție ale unui rigid permite reducerea matricei tensorului de inerție la forma (6.75), justifică necesitatea stabilirii, de la început chiar, a direcțiilor acestor axe centrale de inerție. Dacă, în unele cazuri, anumite simetrii în repartiția masei vor da posibilitatea să se stabilească — fără nici un fel de calcule, doar pe baza unor proprietăți ce vor fi demonstrate ulterior — aceste direcții, în schimb în foarte multe alte cazuri ele nu vor putea fi determinate decît pe baza unor calcule, prezentate în continuare și care vor da valorile celor trei serii de cosinusuri directoare ($\alpha^*_{x\zeta}$, $\alpha^*_{x\eta}$, $\alpha^*_{x\zeta}$, $\alpha^*_{y\xi}$, $\alpha^*_{y\eta}$, $\alpha^*_{y\zeta}$; $\alpha^*_{z\xi}$, $\alpha^*_{z\eta}$, $\alpha^*_{z\zeta}$) ale axelor centrale de inerție (alese ca axe ale reperului $Gx'y'z'$), în raport cu axele reperului $G\xi^*\eta^*\zeta^*$, față de care se consideră cunoscute momentele de inerție axiale și centrifugale.

Rezolvarea acestei probleme se va baza pe observația că funcția $J'_\Delta = J'_\Delta(\alpha^*_{\Delta\xi}, \alpha^*_{\Delta\eta}, \alpha^*_{\Delta\zeta})$, cu variabilele $\alpha^*_{\Delta\xi}$, $\alpha^*_{\Delta\eta}$, și $\alpha^*_{\Delta\zeta}$ satisfăcînd ecuația de legătură

$$f(\alpha^*_{\Delta\xi}, \alpha^*_{\Delta\eta}, \alpha^*_{\Delta\zeta}) = \alpha^{*2}_{\Delta\xi} + \alpha^{*2}_{\Delta\eta} + \alpha^{*2}_{\Delta\zeta} - 1 = 0 \qquad (6.76)$$

ia valori extremale — $J'_{\Delta min}$, $J'_{\Delta max}$ sau $J'_{\Delta minmax}$ — pentru valorile cosinusurilor directoare corespunzătoare uneia dintre direcțiile (Δ'_i), ($i = 1,2,3$), ale celor trei axe centrale de inerție

Scanned with CamScanner

Utilizînd, pentru studiul acestor extreme cu legături, metoda multiplicatorului lui Lagrange, se vor scrie condițiile de extremum pentru funcția

$$\Phi(\alpha^*_{\Delta\xi}, \alpha^*_{\Delta\eta}, \alpha^*_{\Delta\zeta}) = J'_\Delta(\alpha^*_{\eta\xi}, \alpha^*_{\Delta\eta}, \alpha^*_{\Delta\zeta}) - \lambda f(\alpha^*_{\Delta\xi}, \alpha^*_{\Delta\eta}, \alpha^*_{\Delta\zeta}), \quad (6.77)$$

cu toate variabilele considerate acum independente între ele, condiții de forma

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha^*_{\Delta\xi}}\right)_{\substack{\alpha^*_{\Delta\xi}=\alpha^*_{\Delta_i\xi}\\ \alpha^*_{\Delta\eta}=\alpha^*_{\Delta_i\eta}\\ \alpha^*_{\Delta\zeta}=\alpha^*_{\Delta_i\zeta}}} = 0; \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha^*_{\Delta\eta}}\right)_{\substack{\alpha^*_{\Delta\xi}=\alpha^*_{\Delta_i\xi}\\ \alpha^*_{\Delta\eta}=\alpha^*_{\Delta_i\eta}\\ \alpha^*_{\Delta\zeta}=\alpha^*_{\Delta_i\zeta}}} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha^*_{\Delta\zeta}}\right)_{\substack{\alpha^*_{\Delta\xi}=\alpha^*_{\Delta_i\xi}\\ \alpha^{\Delta*}_{\eta}=\alpha^*_{\Delta_i\eta}\\ \alpha^*_{\Delta\zeta}=\alpha^*_{\Delta_i\zeta}}} = 0,$$

rezultînd de aici, după simplificarea prin 2 și ordonarea convenabilă a termenilor, următorul sistem de ecuații algebrice liniare omogene în necunoscutele $\alpha^*_{\Delta_i\xi}$, $\alpha^*_{\Delta_i\eta}$ și $\alpha^*_{\Delta_i\zeta}$:

$$\begin{cases} (J^*_\xi - \lambda)\alpha^*_{\Delta_i\xi} - J^*_{\xi\eta}\alpha^*_{\Delta_i\eta} - J^*_{\xi\zeta}\alpha^*_{\Delta_i\zeta} = 0; \\ -J^*_{\eta\xi}\alpha^*_{\Delta_i\xi} + (J^*_{\eta\eta} - \lambda)\alpha^*_{\Delta_i\eta} - J^*_{\eta\zeta}\alpha^*_{\Delta_i\zeta} = 0; \\ -J^*_{\zeta\xi}\alpha^*_{\Delta_i\xi} - J^*_{\zeta\eta}\alpha^*_{\Delta_i\eta} + (J^*_{\zeta\zeta} - \lambda)\alpha^*_{\Delta_i\zeta} = 0, \end{cases} \quad (6.78)$$

în care va trebui precizată însă, mai întîi, semnificația fizică a multiplicatorului λ. În acest scop se va înmulți prima dintre ecuațiile (6.78) cu $\alpha^*_{\Delta_i\xi}$, a doua cu $\alpha^*_{\Delta_i\eta}$ și a treia cu $\alpha^*_{\Delta_i\zeta}$ și se vor aduna relațiile astfel multiplicate; rezultă, după reducerea termenilor asemenea și gruparea convenabilă a lor, egalitatea

$$(J^*_{\xi\xi}\alpha^{*2}_{\Delta_i\xi} + J^*_{\eta\eta}\alpha^{*2}_{\Delta_i\eta} + J^*_{\zeta\zeta}\alpha^{*2}_{\Delta_i\zeta} - 2J^*_{\xi\eta}\alpha^*_{\Delta_i\xi}\alpha^*_{\Delta_i\eta} - 2J^*_{\eta\zeta}\alpha^*_{\Delta_i\eta}\alpha^*_{\Delta_i\zeta} - 2J^*_{\zeta\xi}\alpha^*_{\Delta_i\zeta}\alpha^*_{\Delta_i\xi}) - \lambda(\alpha^{*2}_{\Delta_i\xi} + \alpha^{*2}_{\Delta_i\eta} + \alpha^{*2}_{\Delta_i\zeta}) = 0. \quad (6.79)$$

Scanned with CamScanner

Este suficient acum să se observe că suma din prima paranteză reprezintă una din cele trei valori extremale ale momentului de inerţie J'_Δ, pentru moment necunoscută şi notată cu simbolul $J'_{\Delta_i} = J'_{\Delta extr}$ şi că suma din cea de-a doua paranteză are valoarea 1, pentru a se obţine astfel semnificaţia multiplicatorului λ:

$$\lambda = J'_{\Delta_i} \tag{6.80}$$

şi deci următoarea formă finală a sistemului de ecuaţii (6.78):

$$\begin{cases} (J^*_{\xi\xi} - J'_{\Delta_i})\,\alpha^*_{\Delta_i\xi} - J^*_{\xi\eta}\alpha^*_{\Delta_i\eta} - J^*_{\xi\zeta}\alpha^*_{\Delta_i\zeta} = 0; \\ -J^*_{\eta\xi}\alpha^*_{\Delta_i\xi} + (J^*_{\eta\eta} - J'_{\Delta_i})\,\alpha^*_{\Delta_i\eta} - J^*_{\eta\zeta}\alpha^*_{\Delta_i\zeta} = 0; \\ -J^*_{\zeta\xi}\alpha^*_{\Delta_i\xi} - J^*_{\zeta\eta}\alpha^*_{\Delta_i\eta} + (J^*_{\zeta\zeta} - J'_{\Delta_i})\,\alpha^*_{\Delta_i\zeta} = 0. \end{cases} \tag{6.81}$$

Existenţa unei soluţii nebanale a acestui sistem, evidenţiată şi de posibilitatea definirii elipsoidului de inerţie, implică satisfacerea condiţiei

$$\Delta(J'_{\Delta_i}) = \begin{vmatrix} J^*_{\xi\xi} - J'_{\Delta_i} & -J^*_{\xi\eta} & -J^*_{\xi\zeta} \\ -J^*_{\eta\xi} & J^*_{\eta\eta} - J'_{\Delta_i} & -J^*_{\eta\zeta} \\ -J^*_{\zeta\xi} & -J^*_{\zeta\eta} & J^*_{\zeta\zeta} - J'_{\Delta_i} \end{vmatrix} = 0, \tag{6.82}$$

reprezentînd o ecuaţie de gradul trei în momentul de inerţie extremal J'_{Δ_i}, ale cărei rădăcini vor fi chiar cele trei momente de inerţie extremale — deci cele trei momente centrale de inerţie — , aceste rădăcini fiind notate în continuare, într-o ordine absolut arbitrară, cu J'_x, J'_y şi J'_z.

Fiecărei din aceste valori extremale îi va corespunde cîte un sistem de ecuaţii omogene în cosinusurile directoare ale axei centrale de inerţie, notate cu indicele cu care a fost prevăzut momentul central de inerţie respectiv, (de ex., pentru $J'_{\Delta_i} = J'_x$ se vor face, în sistemul (6.81), înlocuirile: $\alpha^*_{\Delta_i\xi} = \alpha^*_{x\xi}$; $\alpha^*_{\Delta_i\eta} = \alpha^*_{x\eta}$; $\alpha^*_{\Delta_i\zeta} = \alpha^*_{x\zeta}$ etc); datorită condiţiei (6.82), satisfăcută de fiecare dintre valorile celor trei momente centrale de inerţie, una dintre ecuaţiile sistemului (6.81) va fi consecinţa celorlalte două, astfel că sistemele de ecuaţii

(6.81) vor trebui completate, de fiecare dată, cu ecuațiile de legătură corespunzătoare

$$\alpha^{*2}_{\Delta_i\xi} + \alpha^{*2}_{\Delta_i\eta} + \alpha^{*2}_{\Delta_i\zeta} = 1. \tag{6.83}$$

Se înțelege că toate calculele precedente se vor efectua la fel și în cazul determinării direcțiilor axelor principale de inerție relative la un pol Q diferit de centrul de masă G, ales ca origine comună a reperelor $Q\xi^*\eta^*\zeta^*$ și $Qx'y'z'$.

4°. **Proprietățile momentelor de inerție.** În multe situații, direcțiile axelor principale de inerție relative la un pol oarecare, respectiv ale axelor centrale de inerție — sau, cel puțin, a unora din ele — , pot fi stabilite direct, pe baza unor proprietăți legate de existența unor simetrii în repartiția masei, proprietăți ce vor fi prezentate în continuare.

Proprietatea I: dacă un rigid admite un plan de simetrie în repartiția masei, atunci normala la acest plan, într-un pol arbitrar Q al planului, este axă principală de inerție.

Prin alegerea planului de simetrie ca plan de coordonate $Q\xi^*\eta^*$ rezultă și acum condițiile (6.17), cu consecințele

$$J^*_{\xi\zeta} = \int_{(M)} \xi^*\zeta^*\, dm = 0\,; \quad J^*_{\eta\zeta} = \int_{(M)} \eta^*\zeta^*\, dm = 0 \tag{6.84}$$

în baza cărora ecuația elipsoidului de inerție relativ la polul Q va lua forma

$$J^*_{\xi\xi}\xi^{*2} + J^*_{\eta\eta}\eta^{*2} + J^*_{\zeta\zeta}\zeta^{*2} - 2J^*_{\xi\eta}\xi^*\eta^* = C, \tag{6.85}$$

care scoate în evidență rotirea elipsoidului de inerție numai în jurul axei $Q\zeta^*$ și deci coincidența acestei axe cu una din axele principale de inerție.

În cazul cînd polul Q va coincide chiar cu centrul de masă al rigidului, aflat tot în planul de simetrie în repartiția masei, normala $G\zeta^*$ la planul de simetrie va fi chiar axă centrală de inerție.

Proprietatea a II-a: dacă un rigid admite o axă de simetrie în repartiția masei, atunci această axă este axă centrală de inerție.

Alegerea axei de simetrie ca axă $Q\zeta^*$, cu polul Q luat arbitrar pe această axă, va justifica valabilitatea condițiilor (6.20) și deci și a condițiilor (6.84) cu consecința (6.85), rezultînd de aici că axa de simetrie $Q\zeta^*$ este principală de inerție; faptul că pe axa de simetrie

Scanned with CamScanner

se află, în baza celei de-a doua proprietăți a centrelor de masă, și centrul de masă G, dovedește că ea este chiar axă centrală de inerție.

Proprietatea a III-a: Dacă un rigid admite simetrie de revoluție în repartiția masei, atunci axa de simetrie de revoluție și cu orice pereche de axe perpendiculare între ele și perpendiculare și pe axa de simetrie, într-un punct Q arbitrar al ei, sînt axe principale de inerție relative la polul Q.

Proprietatea este evidentă: axa de simetrie de revoluție este, în baza proprietății precedente, nu numai axă principală de inerție, ci chiar axă centrală de inerție: axele $Q\xi^*$ și $\theta\eta^*$, normale la planele axiale $Q\zeta^*\eta^*$ și $Q\zeta^*\xi^*$, care sînt și plane de simetrie în repartiția masei în cazul simetriei de revoluție, sînt, în baza primei proprietăți a momentelor de inerție, axe principale de inerție. Dacă polul Q este ales chiar în centrul de masă al rigidului, toate cele trei axe considerate mai sus sînt axe centrale de inerție.

Distribuția materială simetrică identică față de toate planele ce conțin axa de simetrie de revoluție are drept consecință condiția

$$J^*_{\xi\xi} = J^*_{\xi} = J^*_{\eta\eta} = J^*_{\eta}, \tag{6.86}$$

care permite să se tragă concluzia că toate razele vectoare ale elipsoidului de inerție normale la axa de revoluție a corpului sînt egale între ele, deci că elipsoidul central de inerție este și el de revoluție în raport cu axa de simetrie de revoluție a rigidului.

Șirul evident de egalități de mai jos, scrise în raport cu reperul $Qx'y'z' \equiv Q\xi^*\eta^*\zeta^*$:
$J'_x + J'_y = 2J'_x = 2J'_y = (J'_{\pi_y} + J'_{\pi_z}) + (J'_{\pi_x} + J'_{\pi_z}) = (J'_{\pi_x} + J'_{\pi_y}) + 2J'_{\pi_z} =$
$= J'_z + 2J'_{\pi_z}$ conduce la următoarea relație de calcul al momentelor de inerție $J'_x = J'_y$ în funcție de momentele de inerție J'_z și J'_{π_z}:

$$\boxed{J'_x = J'_y = \frac{1}{2} J'_z + J'_{\pi_z}}. \tag{6.87}$$

În scopul ușurării determinării momentelor de inerție ale corpurilor cu forme geometrice oarecare, va mai fi demonstrată următoarea

Teoremă a compunerii momentelor de inerție: dacă un rigid, de masă M, căruia i se atașază un reper $W\xi\eta\zeta$, poate fi descompus într-un număr determinat, n, de porțiuni simple, de mase

Scanned with CamScanner

M_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, cărora li se cunosc momentele de inerție $J'_{\xi\xi_{(i)}}, J'_{\eta\eta_{(i)}}, \ldots, J'_{\zeta\xi_{(i)}}$, în raport cu reperul menționat legat de rigid (fig. 6.18), atunci momentele de inerție axiale și centrifugale ale rigidului în raport cu reperul $W\xi\eta\zeta$ vor fi date de relațiile

$$\boxed{\begin{aligned} &J'_{\xi\xi} = \sum_{i=1}^{n} J'_{\xi\xi_{(i)}}\ ;\ J'_{\eta\eta} = \sum_{i=1}^{n} J'_{\eta\eta_{(i)}}\ ;\ J'_{\zeta\zeta} = \sum_{i=1}^{n} J'_{\zeta\zeta_{(i)}}\ ; \\ &J'_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^{n} J'_{\xi\eta_{(i)}}\ ;\ J'_{\eta\zeta} = \sum_{i=1}^{n} J'_{\eta\zeta_{(i)}}\ ;\ J'_{\zeta\xi} = \sum_{i=1}^{n} J'_{\zeta\xi_{(i)}}. \end{aligned}} \tag{6.88}$$

Pentru demonstrarea relațiilor va fi suficient să se descompună domeniul de integrare M în cele n subdomenii M_i, scriindu-se

$$J'_{\xi\xi} = \int_{(M)} (\eta^2 + \zeta^2)\, dm = \sum_{i=1}^{n} \int_{(M_i)} (\eta^2 + \zeta^2)\, dm = \sum_{i=1}^{n} J'_{\xi\xi_{(i)}}$$

etc.

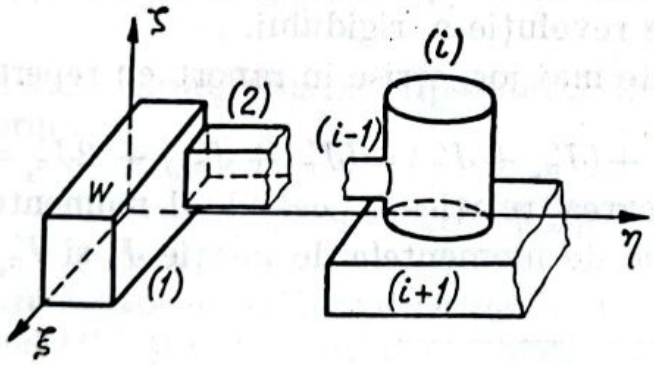


Fig. 6.18.

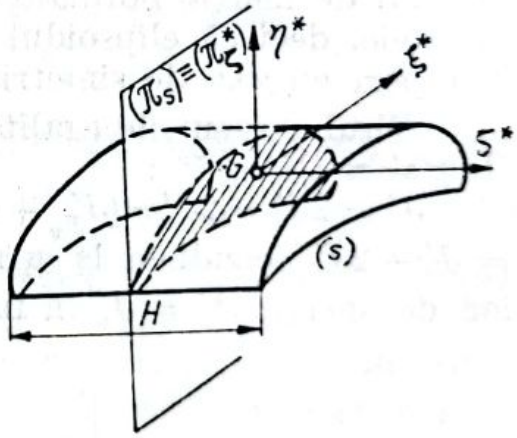


Fig. 6.19.

64

5°. Determinarea momentelor de inerție la unele corpuri omogene, cu simetrii geometrice planare și axiale.

a) *Determinarea momentelor de inerție ale corpurilor omogene cilindrice și prismatice drepte, cu secțiuni transversale oarecare.* Fie (S), (fig. 6.19), un cilindru (prismă) drept, cu secțiune transversală oarecare, căruia i se cunosc masa M (kg), aria $A(m^2)$ a bazei și înălțimea (grosimea) egală cu $H(m)$.

Scanned with CamScanner

Alegînd planul secţiunii transversale mediane a cilindrului (prismei) ca plan de coordonate $W\xi\eta$ al reperului $W\xi\eta\zeta$ ataşat rigidului, axa $W\zeta$ va fi axă principală de inerţie relativă la polul W, iar normala la planul $W\xi\eta$ în centrul de masă G al rigidului — coincizînd şi cu centrul de masă geometric al ariei secţiunii transversale mediane — va fi axă centrală de inerţie a rigidului; în consecinţă, celelalte două axe centrale de inerţie ale corpului cilindric omogen considerat se vor afla în planul $W\xi\eta$ al secţiunii transversale mediane.

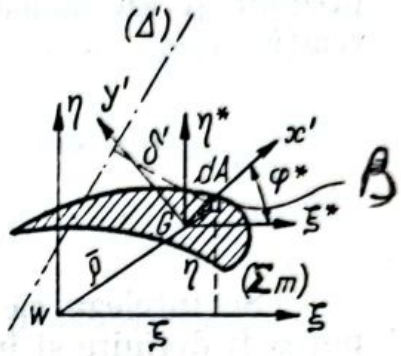


Fig. 6.20.

În cele ce urmează se va arăta că determinarea direcţiilor acestor din urmă două axe centrale de inerţie va putea fi făcută cu ajutorul noţiunilor de *momente de inerţie geometrice*.

Considerînd secţiunea transversală mediană ($\sum_m$), de care este ataşat reperul plan $W\xi\eta$ (fig. 6.20), precum şi o dreaptă (Δ') situată în planul secţiunii, faţă de care elementul de arie dA, cu centrul în punctul $B(\xi,\eta)$, este situat la distanţa δ', se va numi *moment de inerţie geometric al ariei A în raport cu axa* (Δ') mărimea I'_Δ, definită prin relaţia

$$I'_\Delta = \int_{(A)} \delta'^2\, dA. \tag{6.89}$$

În particular, momentele de inerţie geometrice ale ariei A în raport cu axele reperului $W\xi\eta$ vor fi definite prin relaţiile

$$\boxed{I'_{\xi\xi} = \int_{(A)} \eta^2\, dA\,; \quad I'_{\eta\eta} = \int_{(A)} \xi^2\, dA} \tag{6.90}$$

În mod analog va putea fi definit un *moment de inerţie geometric polar* în raport cu originea axelor considerate, în baza relaţiei

$$\boxed{I'_W = \int_{(A)} \bar{\rho}^2\, dA = \int_{(A)} (\xi^2+\eta^2)\, dA}\,, \tag{6.91}$$

Scanned with CamScanner

între acest ultim moment de inerție și cele precedente existînd relația evidentă

$$\boxed{I'_W = I'_{\xi\xi} + I'_{\eta\eta}}, \tag{6.92}$$

precum și un *moment de inerție geometric centrifugal*, definit prin relația

$$\boxed{I'_{\xi\eta} = \int_{(A)} \xi\eta dA}. \tag{6.93}$$

Se înțelege că asemenea momente de inerție geometrice vor putea fi definite și în raport cu reperul $G\xi_3\eta^*\zeta^*$, translat față de primul, (fig. 6.20), în baza relațiilor

$$\boxed{I^*_{\xi\xi} = \int_{(A)} \eta^{*2} dA\,;\quad I^*_{\eta\eta} = \int_{(A)} \xi^{*2} dA\,;\quad I^*_{\xi\eta} = \int_{(A)} \xi^*\eta^* dA}, \tag{6.94}$$

cît și în raport cu reperul $Gx'y'$, rotit de unghiul φ^* în jurul axei $G\zeta^*$, (fig. 6.20), scriindu-se

$$\boxed{I'_{xx} = \int_{(A)} y'^2 dA\,;\quad I'_{yy} = \int_{(A)} x'^2 dA\,;\quad I'_{xy} = \int_{(A)} x'y' dA}. \tag{6.95}$$

Efectuînd, în relațiile (6.94), înlocuirile

$$\xi^* = \xi - \xi_G\,;\quad \eta^* = \eta - \eta_G,$$

corespunzătoare trecerii de la reperul $W_{\xi\eta}$ la reperul translat $G\xi^*\eta^*$ cu originea în centrul de masă $G(\xi_G, \zeta_G\,;\, 0)$ al rigidului — ultimul coincizînd și cu centrul de masă geometric al ariei secțiunii transversale mediane (Σ_m) — , se obțin următoarele relații, exprimînd *variația momentelor de inerție geometrice la translația axelor*:

$$\boxed{I^*_{\xi\xi} = I'_{\xi\xi} - A\eta_G^2\,;\quad I^*_{\eta\eta} = I'_{\eta\eta} - A\xi_G^2\,;\quad I^*_{\xi\eta} = I'_{\xi\eta} - A\xi_G\eta_G}, \tag{6.96}$$

Scanned with CamScanner

primele două putînd fi incluse în relaţia generală

$$\boxed{I'_\Delta = I'_{\Delta G} + Aa^2}, \tag{6.97}$$

exprimînd *teorema Huyghens-Steiner pentru momente de inerţie geometrice*, cu o formulare analogă celei date în cazul momentelor de inerţie mecanice.

De asemenea, efectuînd în relaţiile (6.95), înlocuirile

$$x' = \xi^* \cos\varphi^* + \eta^* \sin\varphi^*; \quad y' = -\xi^* \sin\varphi^* + \eta^* \cos\varphi^*,$$

rezultînd din proiectarea pe axele reperului $Gx'y'$ a relaţiei

$$\bar{r}' = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' = \bar{\rho}^* = \xi^*\bar{i}_\xi + \eta^*\bar{i}_\eta,$$

rezultă, după efectuarea calculelor şi ţinînd seama şi de relaţiile (6.94), următoarele relaţii, exprimînd *variaţia momentelor de inerţie geometrice la rotaţia axelor*:

$$\boxed{\begin{aligned} I'_{xx} &= I^*_{\xi\xi}\cos^2\varphi^* + I^*_{\eta\eta}\sin^2\varphi^* - 2I^*_{\xi\eta}\cos\varphi^*\sin\varphi^*; \\ I'_{yy} &= I^*_{\xi\xi}\sin^2\varphi^* + I^*_{\eta\eta}\cos^2\varphi^* + 2I^*_{\xi\eta}\cos\varphi^*\sin\varphi^*; \\ I'_{xy} &= (I^*_{\xi\xi} - I^*_{\eta\eta})\cos\varphi^*\sin\varphi^* + I^*_{\xi\eta}(\cos^2\varphi^* - \sin^2\varphi^*), \end{aligned}} \tag{6.98}$$

primele două putînd fi incluse în relaţia generală

$$\boxed{I'_\Delta = I^*_{\xi\xi}\cos^2\varphi^*_\Delta + I^*_{\eta\eta}\sin^2\varphi^*_\Delta - 2I^*_{\xi\eta}\cos\varphi^*_\Delta\sin\varphi^*_\Delta}, \tag{6.99}$$

φ^*_Δ fiind unghiul format cu axa $G\xi^*$ de axa (Δ') ce trece prin centrul de masă, (fig. 6.21).

Relaţia (6.99) arată că pentru o arie plană dată, A şi pentru un reper $G\xi^*\eta^*$ ataşat ei dat — deci pentru valori date ale momentelor de inerţie geometrice $I^*_{\xi\xi}$, $I^*_{\eta\eta}$ şi $I^*_{\xi\eta}$ —, momentul de inerţie I'_Δ este o funcţie numai de unghiul φ^*_Δ, adică

$$I'_\Delta = I'_\Delta(\varphi^*_\Delta) \tag{6.100}$$

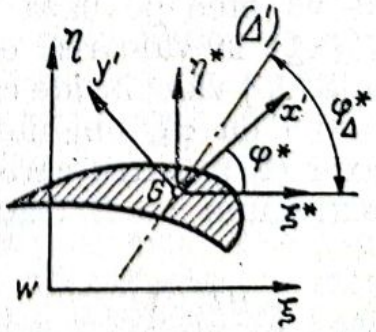


Fig. 6.21.

Scanned with CamScanner

Luînd pe axa (Δ') un punct $M(\xi^*, \eta^*)$, (fig. 6.21), a cărui distanță la centrul de masă G să satisfacă condiția

$$I'_\Delta \cdot \overline{GM}^2 = I'_\Delta \bar{r}'^2_M = [I^*_{\xi\xi} \cos^2\varphi^*_\Delta + I^*_{\eta\eta} \sin^2\varphi^*_\Delta - 2I^*_{\xi\eta} \cos\varphi^*_\Delta \sin\varphi^*_\Delta]\bar{r}'^2_M = \\ = c = \text{const.}, \tag{6.101}$$

locul geometric al pozițiilor lui corespunzătoare diferitelor orientări ale axei (Δ') va fi o curbă a cărei ecuație va putea fi obținută efectuînd în relația (6.101) înlocuirile

$$\cos\varphi^*_\Delta \cdot |\bar{r}'_M| = \xi^*; \quad \sin\varphi^*_\Delta \cdot |\bar{r}'_M| = \eta^* \tag{6.102}$$

rezultînd din proiectarea pe axele reperului $G\xi^*\eta^*$ a relației

$$\bar{r}'_M = \bar{\rho}^*_M = \bar{\rho}^* = |\bar{r}'_M| \bar{i}'_\Delta = |\bar{r}'_M| [\cos\varphi^*_\Delta \bar{i}_\xi + \sin\varphi^*_\Delta \bar{i}_\eta],$$

obținîndu-se astfel ecuația

$$\boxed{I^*_{\xi\xi}\xi^{*2} + I^*_{\eta\eta}\eta^{*2} - 2I^*_{\xi\eta}\xi^*\eta^* = c} \tag{6.103}$$

reprezentînd o elipsă ($I'_\Delta \neq 0$, deci $(\bar{r}'_M)^2 = \dfrac{c}{I'_\Delta}$ nu poate lua valori infinite), cu centrul în origine (în ecuație lipsesc termenii de gradul întîi) și rotită față de axele de coordonate (ecuația are termenul dreptunghiular $I^*_{\xi\eta}\xi^*\eta^*$); această elipsă este numită *elipsa centrală de inerție a ariei A*, axele ei sînt numite *axele centrale de inerție ale ariei A*, iar momentele de inerție geometrice ale ariei în raport cu aceste axe sînt numite *momente centrale de inerție geometrice ale ariei A*.

Determinarea direcțiilor axelor centrale de inerție ale ariei A se va face pe baza observației că momentul de inerție geometric $I'_\Delta(\varphi^*_\Delta)$ ia valoarea extremă — maximă, sau minimă — atunci cînd axa (Δ') va coincide cu una din axele elipsei de inerție; în consecință, notînd cu $\varphi^*_{\Delta i}$ unghiul corespunzător uneia din cele două poziții ale axei (Δ') pentru care funcția $I'_\Delta(\varphi^*_\Delta)$ ia valori extremale, condiția de extremum va fi tradusă prin relația

$$\left(\frac{dI'_\Delta}{d\varphi^*_\Delta}\right)_{\varphi^*_\Delta = \varphi^*_{\Delta i}} = (I^*_{\eta\eta} - I^*_{\xi\xi}) \sin 2\varphi^*_{\Delta i} - 2I^*_{\xi\eta} \cos 2\varphi^*_{\Delta i} = 0, \tag{6.104}$$

Scanned with CamScanner

rezultînd de aici ecuaţia

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\varphi^*_{\Delta i} = \frac{2I^*_{\xi\eta}}{I^*_{\eta\eta} - I^*_{\xi\xi}}}, \tag{6.105}$$

cu soluţia generală

$$\varphi^*_{\Delta i} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2I^*_{\xi\eta}}{I^*_{\eta\eta} - I^*_{\xi\xi}}\right) + k\frac{\pi}{2}, \ (k = 0,1\ldots), \tag{6.106}$$

unghiurile corespunzătoare celor două direcţii căutate corespunzînd valorile particulare $k = 0$ şi $k = 1$.

Considerînd axa corespunzătoare primei rădăcini ca axă Gx', iar axa corespunzătoare celei de-a doua rădăcini ca axă Gy', $\left(\varphi^*_{\Delta 1} = \varphi^*_x;\ \varphi^*_{\Delta_2} = \varphi^*_y = \varphi^*_x + \frac{\pi}{2}\right)$, momentele centrale de inerţie geometrice, notate acum cu un singur indice, vor fi date de relaţiile:

$$\boxed{\begin{aligned} I'_x &= I'_\Delta(\varphi^*_x) = I^*_{\xi\xi}\cos^2\varphi^*_x + I^*_{\eta\eta}\sin^2\varphi^*_x - 2I^*_{\xi\eta}\cos\varphi^*_x\sin\varphi^*_x; \\ I'_y &= I'_\Delta\left(\varphi^*_x + \frac{\pi}{2}\right) = I^*_{\xi\xi}\sin^2\varphi^*_x + I^*_{\eta\eta}\cos^2\varphi^*_x + 2I^*_{\xi\eta}\cos\varphi^*_x\sin\varphi^*_x \end{aligned}} \tag{6.107}$$

Se înţelege că în raport cu acest ultim reper ecuaţia elipsei centrale de inerţie nu va mai conţine termenul dreptunghiular $I'_{xy}\,x'\,y'$, rezultînd de aici concluzia că în cazul orientării axelor reperului $Gx'y'$ după axele centrale de inerţie geometrice ale ariei plane A, momentul de inerţie geometric centrifugal devine egal cu zero ($I'_{xx} = I'_x;\ I'_{yy} = I'_y;\ I'_{xy} = 0$).

De asemenea, nu este greu de înţeles că asemenea elipse de inerţie vor putea fi definite şi în alţi poli Q din planul ariei; în acest caz ele vor purta numele de *elipse de inerţie relative la polii* Q, axele lor se vor numi *axe principale de inerţie geometrice relative la polii* Q,

Scanned with CamScanner

iar momentele de inerţie geometrice în raport cu aceste axe se vor numi şi ele *momente principale de inerţie geometrice relative la polii Q.*

Cu aceste precizări, vor putea fi stabilite acum relaţiile dintre momentele de inerţie mecanice ale rigidului considerat şi dintre momentele de inerţie geometrice ale ariei secţiunii transversale mediane a corpului, de care este ataşat planul de coordonate $W\xi\eta$ al reperului $W\xi\eta\zeta$ (fig. 6.22). Pentru aceasta, se va observa că întrucît axa $W\zeta$ este axă principală de inerţie relativă la polul W, $(J'_{\xi\zeta} = J'_{\eta\zeta} = 0)$, vor trebui determinate numai următoarele patru momente de inerţie mecanice:

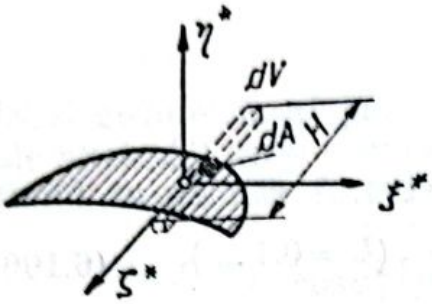


Fig. 6.22.

$$
\begin{cases}
J'_{\xi\xi} = \int_{(M)} (\eta^2 + \zeta^2)dm = \rho_V \int_{(V)} (\eta^2 + \zeta^2)dV = \rho_V \left[\int_{(V)} \eta^2 dV + \right. \\
\qquad\qquad \left. + \int_{(V)} \zeta^2 dV \right]; \\
J'_{\eta\eta} = \int_{(M)} (\xi^2 + \zeta^2)dm = \rho_V \int_{(V)} (\xi^2 + \zeta^2)dV = \rho_V \left[\int_{(V)} \xi^2 dV + \right. \\
\qquad\qquad \left. + \int_{(V)} \zeta^2 dV \right]; \qquad (6.108) \\
J'_{\zeta\zeta} = \int_{(M)} (\xi^2 + \eta^2)dm = \rho_V \int_{(V)} (\xi^2 + \eta^2)dV = \rho_V \left[\int_{(V)} \xi^2 dV + \right. \\
\qquad\qquad \left. + \int_{(V)} \eta^2 dV \right]; \\
J'_{\xi\eta} = \int_{(M)} \xi\eta dm = \rho_V \int_{(V)} \xi\eta dV.
\end{cases}
$$

Alegînd mai întîi volumul elementar sub forma unei prisme de bază egală cu dA şi de înălţime H (fig. 6.22), $(dV = HdA)$, vor re-

Scanned with CamScanner

zulta următoarele semnificaţii pentru trei dintre cele patru integrale care figurează în relaţiile (6.108):

$$\int_{(V)} \xi^2 dV = H\int_{(A)} \xi^2 dA = HI'_{\eta\eta};\ \int_{(V)} \eta^2 dV = H\int_{(A)} \eta^2 dA =$$

$$= HI'_{\xi\xi};\ \int_{(V)} \xi\eta\, dV = H\int_{(A)} \xi\eta dA = HI'_{\xi\eta}. \qquad (6.109)$$

Considerînd apoi volumul elementar sub forma unei fîşii paralele la bazele corpului cilindric (prismatic), (fig. 6.23), situată la distanţa ζ de planul $W\xi\eta$ şi de grosime egală cu $d\zeta$, ($dV = Ad\zeta$) va rezulta şi semnificaţia celei de-a patra integrale din relaţiile (6.108):

$$\int_{(V)} \zeta^2 dV = A\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \zeta^2\, d\zeta = \frac{AH^3}{12}. \qquad (6.110)$$

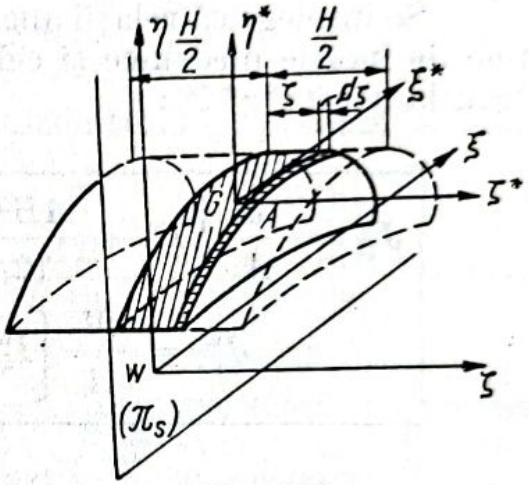


Fig. 6.23.

Dacă se mai ţine seama şi de expresia densităţii:

$$\rho_V = \frac{M}{V} = \frac{M}{AH}, \qquad (6.111)$$

se obţin următoarele relaţii finale între momentele de inerţie mecanice ale corpului considerat şi cele geometrice ale ariei secţiunii lui transversale mediane:

$$J'_{\xi\xi} = \frac{M}{A}\left[I'_{\xi\xi} + \frac{AH^2}{12}\right];\ J^*_{\eta\eta} = \frac{M}{A}\left[I'_{\eta\eta} + \frac{AH^2}{12}\right];$$

$$J'_{\zeta\zeta} = \frac{M}{A}\left[I'_{\xi\xi} + I'_{\eta\eta}\right];\ J'_{\xi\eta} = \frac{M}{A} I'_{\xi\eta}, \qquad (6.112)$$

Scanned with CamScanner

primele două dintre aceste relații putînd fi incluse în relația mai generală

$$\boxed{J'_{\Delta} = \frac{M}{A}\left[I'_{\Delta} + \frac{AH^2}{12}\right],} \tag{6.113}$$

cu condiția ca axa (Δ') să fie considerată în planul secțiunii transversale mediane.

Se înțelege că relații analoge vor putea fi scrise și între momentele de inerție mecanice și cele geometrice corespunzătoare reperului translatat $G\xi^*\eta^*\zeta^*$:

$$\boxed{\begin{gathered} J^*_{\xi\xi} = \frac{M}{A}\left[I^*_{\xi\xi} + \frac{AH^2}{12}\right];\ J^*_{\eta\eta} = \frac{M}{A}\left[I^*_{\eta\eta} + \frac{AH^2}{12}\right]; \\ J^*_{\zeta\zeta} = \frac{M}{A}\left[I^*_{\xi\xi} + I^*_{\eta\eta}\right];\ J^*_{\xi\eta} = \frac{M}{A} I^*_{\xi\eta} \end{gathered}} \tag{6.114}$$

cu momentele de inerție geometrice $I^*_{\xi\xi}$, $I^*_{\eta\eta}$ și $I^*_{\xi\eta}$ calculate cu ajutorul relațiilor (6.96)

Cunoașterea momentelor de inerție geometrice $I^*_{\xi\xi}$, $I^*_{\eta\eta}$ și $I^*_{\xi\eta}$ va permite, așa cum se va arăta în continuare, să se determine și valorile momentelor centrale de inerție mecanice ale rigidului, precum și orientările celor două axe centrale de inerție mecanice din planul $G\xi^*\eta^*$, cea de-a treia axă centrală de inerție mecanică fiind, evident, chiar axa $G\zeta^* \equiv Gz'$. Pot fi folosite următoarele două căi pentru rezolvarea acestei probleme :

Determinarea mai întîi a momentelor centrale de inerție și apoi a direcțiilor axelor centrale de inerție. Avînd în vedere condițiile acestei probleme, $(J^*_{\xi\zeta} = J^*_{\eta\zeta} = 0)$, ecuația (6.82), care furnizează valorile celor trei momete centrale de inerție, va lua forma

$$\begin{vmatrix} J^*_{\xi\xi} - J'_{\Delta t} & -J^*_{\xi\eta} & 0 \\ -J^*_{\eta\xi} & J^*_{\eta\eta} - J^*_{\Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & J^*_{\zeta\zeta} - J'_{\Delta t} \end{vmatrix} = (J^*_{\zeta\zeta} - J'_{\Delta t}) \begin{vmatrix} J^*_{\xi\xi} - J'_{\Delta t} & -J^{\xi\eta}_{*} \\ -J^*_{\xi\eta} & J^*_{\eta\eta} - J'_{\Delta t} \end{vmatrix} = 0 \tag{6.115}$$

Scanned with CamScanner

rezultînd de aici, pe de o parte, concluzia cunoscută

$$J'_{\Delta_3} = J'_z = J^*_{\zeta\zeta} = \frac{M}{A}(I^*_{\xi\xi} + I^*_{\eta\eta}) \tag{6.116}$$

și, pe de altă parte, ecuația

$$\begin{vmatrix} J^*_{\xi\xi} - J'_{\Delta i} & -J^*_{\xi\eta} \\ -J^*_{\xi\eta} & J^*_{\eta\eta} - J'_{\Delta i} \end{vmatrix} = 0. \tag{6.117}$$

Efectuînd în ultima ecuație înlocuirile (6.114), precum și înlocuirea analogă

$$J'_{\Delta i} = \frac{M}{A}\left(I'_{\Delta i} + \frac{AH^2}{12}\right) \tag{6.118}$$

pentru momentul de inerție extremal $J'_{\Delta i}$ rezultă, după reducerea termenilor asemenea și simplificarea prin $\left(\frac{M}{A}\right)^2$, ecuația

$$\begin{vmatrix} I^*_{\xi\xi} - I'_{\Delta i} & -I^*_{\xi\eta} \\ -I^*_{\xi\eta} & I^*_{\eta\eta} - I'_{\Delta i} \end{vmatrix} = 0, \tag{6.119}$$

sau încă

$$I'^2_{\Delta i} - (I^*_{\xi\xi} + I^*_{\eta\eta})I'_{\Delta i} + (I^*_{\xi\xi} I^*_{\eta\eta} - I^{*2}_{\xi\eta}) = 0, \tag{6.120}$$

cu rădăcinile

$$\boxed{\begin{aligned} I'_{\Delta_1} = I'_{\Delta max} &= \frac{1}{2}\left[I^*_{\xi\xi} + I^*_{\eta\eta}) + \sqrt{(I^*_{\eta\eta} - I^*_{\xi\xi})^2 + 4\, I^{*2}_{\xi\eta}}\right]; \\ I'_{\Delta_2} = I'_{\Delta min} &= \frac{1}{2}\left[(I^*_{\xi\xi} + I^*_{\eta\eta}) - \sqrt{(I^*_{\eta\eta} - I^*_{\xi\xi})^2 + 4\, I^{*2}_{\xi\eta}}\right]. \end{aligned}} \tag{6.121}$$

Scanned with CamScanner

Considerînd primul moment de inerţie geometric ca fiind cel corespunzător axei Gx' şi pe cel de-al doilea ca fiind corespunzător axei Gy' şi ţinînd seama şi de egalitatea evidentă

$$I^*_{\xi\xi} + I^*_{\eta\eta} = I'_x + I'_y = I'_G \tag{6.122}$$

se obţin următoarele valori pentru cele trei momente de inerţie centrale mecanice, calculate cu ajutorul momentelor centrale de inerţie geometice ale ariei secţiunii transversale mediane:

$$J'_x = \frac{M}{A}\left(I'_x + \frac{AH^2}{12}\right);\quad J'_y = \frac{M}{A}\left(I'_y + \frac{AH^2}{12}\right);$$

$$J'_z = \frac{M}{A}(I'_x + I'_y) \tag{6.123}$$

Pentru determinarea cosinusurilor directoare corespunzătoare axelor Gx' şi Gy', considerate orientate acum după axele centrale de inerţie din planul secţiunii transversale mediane, se vor utiliza primele două din sistemele de ecuaţii (6.81), evident cu simplificările corespunzătoare acestei situaţii ($J^*_{\xi\zeta} = J^*_{\eta\zeta} = 0$; $\alpha^*_{\Delta_1\zeta} = \alpha^*_{x\zeta} = 0$; $\alpha^*_{\Delta_2\zeta} = \alpha^*_{y\zeta} = 0$) şi cu considerarea şi acum a ecuaţiei de legătură dintre cosinusurile directoare corespunzătoare unei direcţii date.

Determinarea, mai întîi, a direcţiilor axelor centrale de inerţie şi apoi a valorilor momentelor centrale de inerţie. Cele două axe centrale de inerţie din planul $G\xi^*\eta^*$ vor fi chiar axele elipsei de intersecţie a elispoidului central de inerţie cu planul de coordonate $G\xi^*\eta^*(\zeta^* = 0)$. În condiţiile acestei probleme ($J^*_{\xi\zeta} = J^*_{\eta\zeta} = 0$) ecuaţia acestei elipse de intersecţie va avea forma

$$J^*_{\xi\xi}\xi^{*2} + J^*_{\eta\eta}\eta^{*2} - 2J^*_{\xi\eta}\xi^*\eta^* = C. \tag{6.124}$$

Unghiurile formate cu axa $G\xi^*$ de axele acestei elipse vor fi rădăcinile ecuaţiei

$$\operatorname{tg} 2\varphi^* = \frac{2J^*_{\xi\eta}}{J^*_{\eta\eta} - J^*_{\xi\xi}} \tag{6.125}$$

Scanned with CamScanner

sau încă, efectuînd și acum înlocuirile (6.114), precum și reducerile și simplificările corespunzătoare, ale ecuației

$$\operatorname{tg} 2\varphi^* = \frac{2I^*_{\xi\eta}}{I^*_{\eta\eta} - I^*_{\xi\xi}} = \operatorname{tg} 2\varphi^*_{\Delta}, \tag{6.126}$$

rezultînd deci concluzia că axele elipsei de intersecție a elipsoidului de inerție coincid cu axele elipsei de inerție centrale geometrice a ariei secțiunii transversale mediane a corpului.

Notînd cu φ^*_x și cu $\varphi^*_y = \varphi^*_x + \frac{\pi}{2}$ rădăcinile ecuației (6.126), se vor calcula, cu ajutorul relațiilor (6.107), momentele de inerție centrale geometrice I'_x și I'_y determinîndu-se apoi, pe baza relațiilor (6.123), momentele de inerție centrale mecanice.

Relațiile (6.123) pot fi înlocuite cu altele, mai simple dar cu caracter aproximativ, în următoarele două situații întîlnite destul de des în aplicațiile tehnice:

Cazul barelor rectilinii foarte subțiri, caracterizate prin arii ale secțiunilor transversale mediane foarte mici, fapt care permite neglijarea, în relațiile (6.123), a momentelor de inerție centrale geometrice în raport cu termenul $\frac{AH^2}{12}$, putîndu-se astfel accepta formulele aproximative

$$\boxed{J'_x = M\frac{H^2}{12}\,;\, J'_y = M\frac{H^2}{12}\,;\, J'_z = 0\,;} \tag{6.127}$$

Cazul plăcilor plane foarte subțiri, caracterizate prin grosime neglijabilă, fapt care permite neglijarea, în relațiile (6.123), a termenului $\frac{AH^2}{12}$ în raport cu momentele de inerție geometrice centrale I'_x și I'_y, rezultînd astfel relațiile aproximative

$$\boxed{J'_x = \frac{M}{A}I'_x\,;\; J'_y = \frac{M}{A}I'_y\,;\; J'_z = \frac{M}{A}(I'_x + I'_y)} \tag{6.128}$$

Scanned with CamScanner

b) *Determinarea momentelor de inerție ale corpurilor omogene cu simetrie de revoluție.* Întrucît axele reperului $Gx'y'z'$, ales cu axa Gz' după axa de simetrie de revoluție a rigidului omogen (S), (fig. 6.24), coincid, conform celei de-a treia proprietăți a momentelor de inerție, cu axele centrale de inerție ale rigidului, iar între cele trei momente centrale de inerție există relația (6.87), rezultă că pentru determinarea acestor momente centrale de inerție va fi suficient să se calculeze integralele:

$$J'_z = \int_{(M)} (x'^2 + y'^2)dm = \rho_V \int_{(V)} (x'^2 + y'^2)dV;$$

$$J'_{xz} = \int_{(M)} z'^2 dm = \rho_V \int_{(V)} z'^2 dV. \tag{6.129}$$

Considerînd și acum volumul corpului ca fiind generat prin rotirea în jurul axei Gz' a ariei plane A, de secțiune a corpului cu planul de coordonate $Gz'x'$, arie limitată de cotele z'_1 și z'_2 și de curbele (Γ_1) și (Γ_2), (fig. 6.24), determinate prin ecuațiile

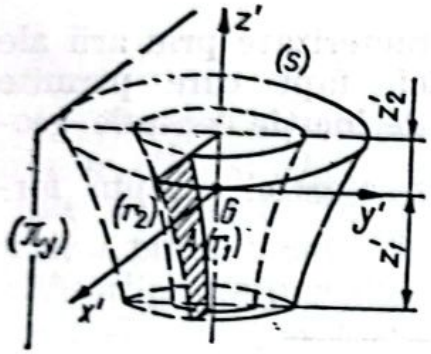


Fig. 6.24.

$$x'_1 = f_1(z'); \quad x'_2 = f_2(z'), \tag{6.130}$$

se vor introduce, în locul coordonatelor carteziene, coordonatele cilindrice ($x' = \rho\cos\varphi$; $y' = \rho\sin\varphi$; $z' = \zeta$; $dV = \rho d\rho d\varphi d\zeta) = \rho d\rho d\varphi dz'$), scriindu-se deci

$$\int_{(V)} (x'^2 + y'^2)dV = \iiint_{(V)} \rho^3 d\rho d\varphi dz' = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z'_1}^{z'_2} dz' \int_{f_1(z')}^{f_2(z')} \rho^3 d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{z'_1}^{z'_2} [f_2^4(z') - f_1^4(z')]dz' \tag{6.131}$$

și

$$\int_{(V)} z'^2 dV = \iiint_{(V)} z'^2 \rho d\rho d\varphi dz' = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z'_1}^{z'_2} z'^2 dz' \int_{f_1(z')}^{f_2(z')} \rho d\rho =$$

$$= \pi \int_{z'_1}^{z'_2} z'^2 [f_2^2(z') - f_1^2(z')]dz'. \tag{6.132}$$

Scanned with CamScanner

Este suficient să se mai țină seama și de expresia densității în această situație, adică

$$\rho_f = \frac{M}{V} = \frac{M}{\iiint_{(V)} \rho d\rho d\varphi dz'} = \frac{M}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_1'}^{z_2'} dz' \int_{f_1(z')}^{f_2(z')} \rho d\rho} =$$

$$= \frac{M}{\pi \int_{z_1'}^{z_2'} f[_2^2(z') - f_1^2(z')] dz'}, \tag{6.133}$$

pentru a se obține astfel următoarele relații de calcul al celor trei momente centrale de inerție:

$$J_z' = \frac{M}{2} \frac{\int_{z_1'}^{z_2'} [f_2^4(z') - f_1^4(z')] dz'}{\int_{z_1'}^{z_2'} [f_2^2(z') - f_1^2(z')] dz'} \; ; \; J_x' = J_y' =$$

$$= \frac{1}{2} J_z' + M \frac{\int_{z_1'}^{z_2'} z'^2 [f_2^2(z') - f_x^2(z')] dz'}{\int_{z_1'}^{z_2'} [f_2^2(z') - f_1^2(z')] dz'}. \tag{6.134}$$

6 8

6° Raze de girație (raze inerție).

a) *Raze de girație mecanice.* În ramurile de mecanică aplicată se înlocuiesc, deseori, momentele centrale de inerție mecanice cu expresii de forma

$$J_x' = Mk_x'^2 \; ; \; J_y' = Mk_y'^2 \; : \; J_z' = Mk_z'^2 \tag{6.135}$$

Scanned with CamScanner

unde mărimile k'_x, k'_y şi k'_z sînt nişte distanţe fictive, definite prin relaţiile

$$\boxed{k'_x = \sqrt{\frac{J'_x}{M}} \; ; \; k'_y = \sqrt{\frac{J'_y}{M}} \; ; \; k'_z = \sqrt{\frac{J'_z}{M}}} \qquad (6.136)$$

şi purtînd numele de *raze de inerţie mecanice centrale*, sau *raze de giraţie centrale mecanice*.

Introducerea acestor noţiuni are următoarele justificări:

— pe de o parte, se creează posibilitatea scoaterii în factor comun, într-o serie de calcule interesînd aplicaţiile tehnice, a masei rigidului, obţinîndu-se astfel relaţii mai uşor de mînuit;

— pe de altă parte, există metode de laborator pentru determinarea experimentală a razelor de giraţie mecanice şi deci cunoaşterea lor va permite şi determinarea momentelor de inerţie mecanice.

b) *Raze de giraţie geometrice*. Ca şi momentele de inerţie mecanice şi momentele de inerţie geometrice ale unei arii plane se înlocuiesc uneori cu expresii de forma

$$I'_x = Ai'^2_x \; ; \quad I'_y = Ai'^2_y \qquad (6.137)$$

mărimile

$$\boxed{i'_x = \sqrt{\frac{I'_x}{A}} \; ; \; i'_y = \sqrt{\frac{I'_y}{A}} \, ,} \qquad (6.138)$$

reprezentînd şi acum nişte distanţe fictive, purtînd numele de *raze de inerţie geometrice centrale*, sau *raze de giraţie geometrice centrale*.

Explicaţia introducerii acestor noi noţiuni este următoarea:

— pe de o parte, permite simplificarea unor formule folosite în calculele tehnice, prin scoaterea în factor comun a ariei plane respective:

— pe de altă parte, se creează posibilitatea determinării pe cale grafică a momentului de inerţie geometric al ariei plane de secţiune transversală mediană (Σ_m) a unui corp cilindric (prismatic) omogen

Scanned with CamScanner

drept în raport cu o axă (Δ'), de orientarea arbitrară în planul secţiunii şi trecînd prin centrul de masă G şi cu aceasta, evident, şi a momentului de inerţie mecanic al corpului în raport cu axa considerată.

Într-adevăr, dînd constantei c din ecuaţia

$$I'_x x'^2 + I'_y y'^2 = c$$

a elipsei centrale de inerţie a secţiunii (Σ_m) raportată chiar la axele ei (fig. 6.25), valoarea particulară

$$c = A i'^2_x i'^2_y, \qquad (6.139)$$

ecuaţia precedentă va lua, ţinînd seama şi de relaţiile (6.137), forma

$$\frac{x'^2}{i'^2_y} + \frac{y'^2}{i'^2_x} = 1, \qquad (6.140)$$

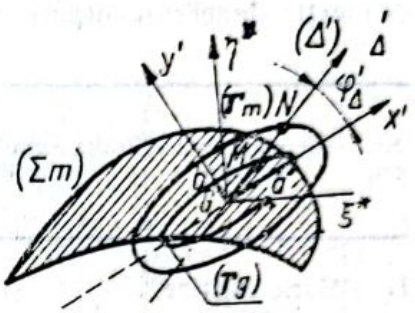


Fig. 6.25.

rezultînd, în aceste condiţii, următoarele valori pentru semiaxele acestei elipse de inerţie

$$a = i'_y; \quad b = i'_x, \qquad (6.141)$$

care fac astfel posibilă trasarea efectivă a elipsei (fig. 6.25).

Pentru a determina acum momentul de inerţie I'_Δ al ariei considerate în raport cu o axă (Δ') situată în planul ariei, de orientare oarecare şi trecînd prin centrul de masă G, va fi suficient să se măsoare distanţa $\overline{GM} = i'_\Delta$ de la centrul elipsei la punctul M de intersecţie a axei cu elipsa construită, pentru a se obţine astfel, în baza relaţiei (6.101), prin care se defineşte elipsa de inerţie, valoarea momentului de inerţie I'_Δ:

$$I'_\Delta = \frac{c}{i'^2_\Delta} = \frac{A i'^2_x i'^2_y}{i'^2_\Delta} \qquad (6.142)$$

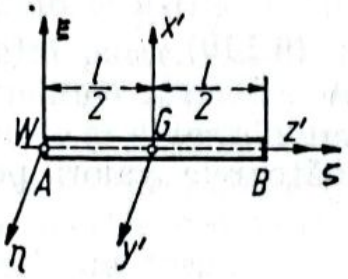
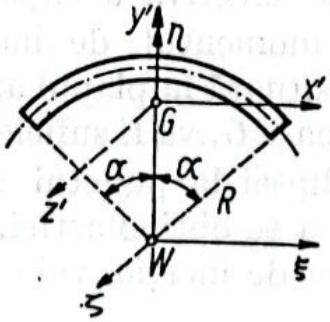
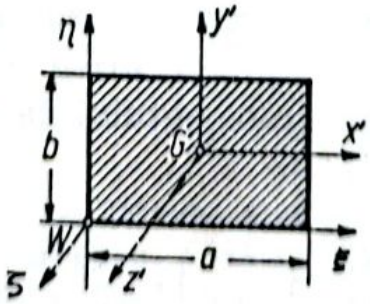
şi deci, în baza relaţiei (6.113), şi a momentului de inerţie mecanic al corpului în raport cu axa (Δ'):

$$I'_\Delta = \mathrm{M}\left(\frac{i'^2_x i'^2_y}{i'^2_\Delta} + \frac{H^2}{12}\right). \qquad (6.143)$$

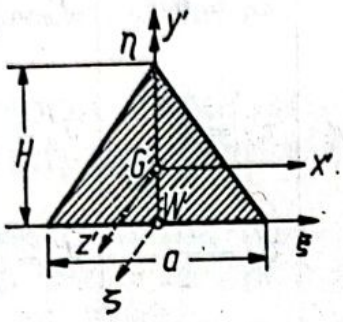
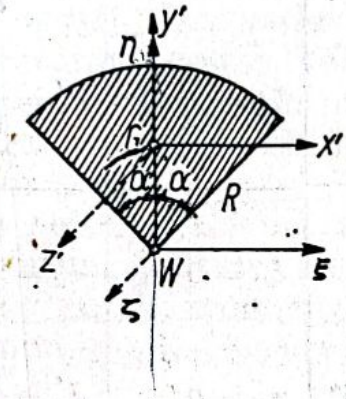
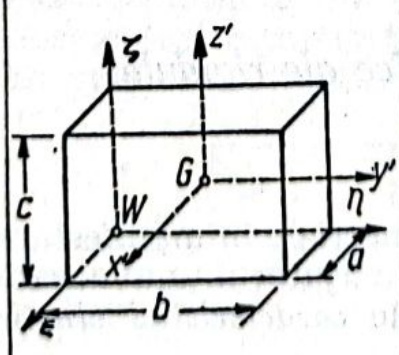
Scanned with CamScanner

6.1.6. Aplicaţii: Poziţiile centrelor de masă şi valorile momentelor centrale de inerţie ale unor corpuri omogene uzuale.

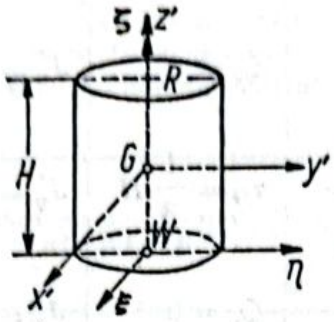
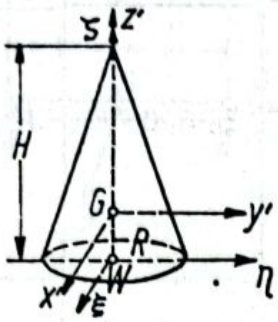
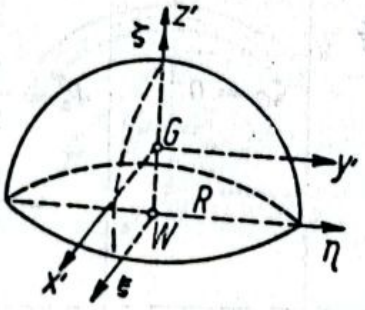
În tabelul de mai jos sînt date, pentru o serie de corpuri omogene întîlnite curent în aplicaţiile mecanicii, coordonatele centrelor lor de masă în raport cu nişte repere iniţiale $W\xi\eta\zeta$, alese în mod convenabil, precum şi valorile momentelor centrale de inerţie ale acestor corpuri, cu axele centrale de inerţie luate ca axe ale reperului $Gx'y'z'$.

Nr. crt.	Forma corpului omogen	Schiţa corpului, cu orientările reperelor $W\xi\eta\zeta$ şi $G'x'y'z$	Coordonatele centrelor de masă faţă de reperul $W\xi\eta\zeta$	Valorile momentelor centrale de inerţie J'_x, J'_y, J'_z
1.	Bara subţire rectilinie		$\xi_G = 0$ $\eta_G = 0$ $\zeta_G = \frac{l}{2}$	$J'_x = M\frac{l^2}{12} = \rho_c\frac{l^3}{12}$; $J'_y = M\frac{l^2}{12} = \rho_c\frac{l^3}{12}$; $J'_y = 0$
2.	Bara subţire în arc de cerc		$\xi_G = 0$ $\eta_G = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ $\zeta_G = 0$	$J'_x = \frac{1}{2}MR^2\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - 2\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\right)$ $J'_y = \frac{1}{2}MR^2\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$ $J'_z = MR^2\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\right)$
3.	Placa subţire dreptunghiulară		$\xi_G = \frac{a}{2}$ $\eta_G = \frac{b}{2}$ $\zeta_G = 0$	$J'_x = M\frac{b^2}{12}$ $J'_y = M\frac{a^2}{12}$ $J'_z = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$

Scanned with CamScanner

Nr. crt.	Forma corpului omogen	Schița corpului, cu orientările reperelor $W\xi\eta\zeta$ și $Gx'y'z'$	Coordonatele centrelor de masă față de reperul $W\xi\eta\zeta$	Valorile momentelor centrale de inerție J'_x, J'_y, J'_z
4.	Placa subțire în formă de triunghi isoscel		$\xi_G = 0$ $\eta_G = \frac{1}{3}H$ $\zeta_G = 0$	$J'_x = \frac{1}{18}MH^2$ $J'_y = \frac{1}{24}Ma^2$ $J'_z = \frac{1}{72}M(4H^2 + 3a^2)$
5.	Placa subțire în formă de sector circular		$\xi_G = 0$ $\eta_G = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ $\zeta_G = 0$	$J'_x = \frac{1}{4}MR^2\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - \frac{16}{9}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\right)$ $J'_y = \frac{1}{4}MR^2\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$ $J'_z = \frac{1}{2}MR^2\left(1 - \frac{8}{9}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\right)$
6.	Paralelipipedul drept		$\xi_G = \frac{a}{2}$ $\eta_G = \frac{b}{2}$ $\zeta_G = \frac{c}{2}$	$J'_x = \frac{1}{12}M(b^2 + c^2)$ $J'_y = \frac{1}{12}M(a^2 + c^2)$ $J'_z = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

Scanned with CamScanner

Nr. crt.	Forma corpului omogen	Schița corpului, cu orientările reperelor $W\xi\eta\zeta$ și $Gx'y'z'$	Coordonatele centrelor de masă față de reperul $W\xi\eta\zeta$	Valorile momentelor centrale de inerție J'_x, J'_y, J'_z
7.	Cilindrul circular drept		$\xi_G = 0$ $\eta_G = 0$ $\zeta_G = \frac{H}{2}$	$J'_x = \frac{1}{12} M(3R^2 + H^2)$ $J'_y = \frac{1}{12} M(3R^2 + H^2)$ $J'_z = \frac{1}{2} MR^2$
8.	Conul circular drept		$\xi_G = 0$ $\eta_G = 0$ $\zeta_G = \frac{1}{4} H$	$J'_x = \frac{3}{80} M(4R^2 + H^2)$ $J'_y = \frac{3}{80} M(4R^2 + H^2)$ $J'_z = \frac{3}{10} MR^2$
9.	Emisfera plină		$\xi_G = 0$ $\eta_G = 0$ $\zeta_G = \frac{3}{8} R$	$J'_x = \frac{83}{320} MR^2$ $J'_y = \frac{83}{320} MR^2$ $J'_z = \frac{2}{5} MR^2$

6.2. *Caracteristicile cinetice ale rigidului în mișcare generală*

Influența caracteristicilor inerțiale în manifestarea fenomenului de inerție este pusă în evidență cu ajutorul unui ansamblu de mărimi fizice, purtînd numele generic de *caracteristici cinetice*, care vor fi definite în continuare.

Scanned with CamScanner

În funcţie de caracterul lor — vectorial, sau scalar — , caracteristicile cinetice se împart în :

— *caracteristicile cinetice vectoriale*, reprezentate prin noţiunile de *componente ale torsorului impulsurilor unui rigid* ;

— *caracteristica cinetică scalară*, reprezentată prin noţiunea de *energie cinetică a rigidului*.

6.2.2. Torsorul impulsurilor unui rigid în mişcare generală

În dinamica rigidului, fiecărei mase elementare dm, cu sediul în punctul $B(\bar{r}')$, (fig. 6.26), care se deplasează în raport cu reperul fix $(\mathscr{R}) \equiv Oxyz$ cu viteza

$$\bar{v} = \bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}' = \bar{v}_Q + \bar{v}_{rot} \tag{6.144}$$

i se asociază un vector elementar $d\overline{\mathscr{H}}$, definit prin relaţia

$$d\overline{\mathscr{H}} = dm\bar{v}, \tag{6.145}$$

numit *impulsul masei elementare* dm.

Sistemul tuturor acestor vectori elementari legaţi, ale căror puncte de aplicaţie formează un ansamblu rigid, va putea fi redus, fie în polul Q legat de rigid, fie în polul fix O, la un torsor numit *torsorul impulsurilor rigidului în polul considerat*, vectorul rezultant al torsorului purtînd denumirea de *impulsul rigidului*, iar momentul rezultant purtînd denumirea de *momentul cinetic al rigidului*.

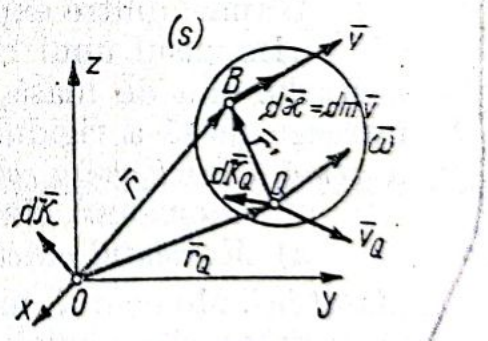


Fig. 6.26

Aceste ultime două noţiuni vor fi prezentate în continuare.

1°. **Impulsul unui rigid în mişcare generală.** Ca vector rezultant al unei distribuţii de vectori elementari repartizaţi pe întreaga masă a rigidului, impulsul rigidului va fi definit prin relaţia

$$\boxed{\overline{\mathscr{H}} = \int_{(M)} dm\bar{v}} \tag{6.146}$$

Înlocuind viteza cu expresia ei (6.144), descompunînd integrala într-o sumă de două integrale, scoţînd apoi, după asocierea lui dm

Scanned with CamScanner

vectorului $\bar{r}'$, în afara semnelor de integrare vectorii $\bar{v}_Q$ şi $\bar{\omega}$ — aceeaşi pentru toate masele elementare asupra cărora sînt extinse operaţiile de integrare — şi ţinînd seama, în fine, de semnificaţiile integralelor rămase, rezultă următoarele expresii de calcul al impulsului unui rigid :

$$\boxed{\bar{\mathcal{H}} = M(\bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}'_G) = M\bar{v}_G,} \tag{6.147}$$

cu transcrierile matriceale

$$\boxed{\mathbf{H}' = M\mathbf{v}'_Q + M\,\tilde{\boldsymbol{\omega}}'\mathbf{r}'_G} \tag{6.148}$$

în cazul exprimării analitice în raport cu reperul legat de rigid şi

$$\boxed{\boldsymbol{H} = M\mathbf{v}_G} \tag{6.149}$$

în cazul exprimării analitice în raport cu reperul fix, $\boldsymbol{H}'$ şi $\boldsymbol{H}$ fiind matricele coloană

$$\boldsymbol{H}' = \left\| \begin{matrix} \mathcal{H}'_x \\ \mathcal{H}'_y \\ \mathcal{H}'_z \end{matrix} \right\| \text{ respectiv } \boldsymbol{H} = \left\| \begin{matrix} \mathcal{H}_x \\ \mathcal{H}_y \\ \mathcal{H}_z \end{matrix} \right\| \tag{6.150}$$

Ultimei dintre expresiile (6.147) i se dă următoarea interpretare : „Impulsul unui rigid în mişcare generală este egal cu impulsul centrului său de masă, considerîndu-se concentrată în acest centru întreaga masă a rigidului", această formulare exprimînd aşa numita *teoremă a lui Koenig relativă la impulsul rigidului.*

2°. **Momentul cinetic al unui rigid în mişcare generală.**

a) *Momentul cinetic al rigidului în raport cu polul Q invariabil ataşat lui.* Momentul, în raport cu polul Q, al impulsului $d\bar{\mathcal{H}}$ al masei elementare dm, adică vectorul

$$d\bar{\mathcal{K}}_Q = \bar{r}' \times d\bar{\mathcal{H}} = \bar{r}' \times dm\bar{v} \tag{6.151}$$

este numit *momentul cinetic în raport cu polul Q al masei elementare dm*, iar mărimea definită prin relaţia

$$\boxed{\bar{\mathcal{K}}_Q = \int_{(M)} \bar{r}' \times dm\,\bar{v}} \tag{6.152}$$

poartă numele de *moment cinetic, în raport cu polul Q, al rigidului.*

Scanned with CamScanner

Înlocuind și acum viteza cu expresia (6.144), descompunînd integrala într-o sumă de două integrale, asociind în prima integrală pe dm vectorului $\bar{r}'$ scoțînd în afara semnului de integrare vectorul $\bar{v}_Q$ și notînd cea de-a doua integrală cu simbolul

$$\bar{\mathcal{K}}_{Qrot} = \int_{(M)} \bar{r}' \times dm\bar{v}_{rot}, \tag{6.153}$$

această expresie purtînd numele de *momentul cinetic al rigidului corespunzătoare rotației sale instantanee în jurul polului Q*, rezultă relația

$$\boxed{\bar{\mathcal{K}}_Q = M\bar{r}'_G \times \bar{v}_Q + \bar{\mathcal{K}}_{Qrot}} \tag{6.154}$$

Pentru a obține expresia curentă de calcul a momentului cinetic $\bar{\mathcal{K}}_{Qrot}$ se va înlocui viteza de rotație cu expresia ei, scriindu-se

$$\bar{\mathcal{K}}_{Qrot} = \int_{(M)} \bar{r}' \times dm(\bar{\omega} \times \bar{r}') = \int_{(M)} [\bar{r}' \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')]dm =$$

$$\int_{(M)} [\bar{r}'^2\bar{\omega} - (\bar{r}'\bar{\omega})\bar{r}']dm,$$

sau încă, trecînd la exprimarea analitică a operațiilor în raport cu reperul legat de rigid, mai rezultă

$$\bar{\mathcal{K}}_{Qrot} = \int_{(M)} [(x'^2 + y'^2 + z'^2)(\omega'_x\bar{i}' + \omega'_y\bar{j}' + \omega'_z\bar{k}') - (x'\omega'_x + y'\omega'_y + z'\omega'_z)(x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}')]dm. \tag{6—155}$$

Scoțînd în factori comuni mai întîi versorii axelor reperului legat de rigid și apoi proiecțiile vitezei unghiulare, descompunînd integrala într-o sumă de 9 integrale, corespunzătoare celor 9 grupuri de termeni astfel formați și scoțînd în afara semnelor de integrare versorii $\bar{i}'$, $\bar{j}'$ și $\bar{k}'$ și mărimile ω'_x, ω'_y și ω'_z — aceleași pentru toate masele elementare asupra cărora se extind operațiile de integrare —,

Scanned with CamScanner

rezultă, ţinînd seama şi de semnificaţiile integralelor rămase, următoarea expresie curentă de calcul al momentului cinetic $\overline{\mathcal{K}}_{Qrot}$:

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{\mathcal{K}}_{Qrot} = &[J'_{xx}\omega'_x - J'_{xy}\omega'_y - J'_{xz}\omega'_z]\,\bar{i}' + [-J'_{yx}\omega'_x + J'_{yy}\omega'_y - J'_{yz}\omega'_z]\bar{j}' + \\ &+ [-J'_{zx}\omega'_x - J'_{zy}\omega'_y + J'_{zz}\omega'_z]\bar{k}',\end{aligned}} \tag{6.156}$$

cu transcrierea matriceală

$$\boxed{\mathbf{K}'_{Qrot} = \mathbf{J}'_Q\boldsymbol{\omega}'} \tag{6.157}$$

$\mathbf{J}'_Q$ fiind matricea tensorului de inerţie corespunzătoare polului Q, de aceeaşi formă ca şi matricea $\mathbf{J}'_G$, definită prin relaţia (6.66), iar $\mathbf{K}'_{Qrot}$ fiind matricea coloană cu elementele $\mathcal{K}'_{Qrot_x}$, $\mathcal{K}'_{Qrot_y}$, $\mathcal{K}'_{Qrot_z}$.

Expresia (6.156) capătă forme simplificate în următoarele situaţii :

— cînd axele invariabil legate de rigid sînt axe principale de inerţie, ($J'_{xx} = J'_x$; $J'_{yy} = J'_y$; $J'_{zz} = J'_z$; $J'_{xy} = J'_{yz} = J'_{zx} = 0$), rezultînd în acest caz expresia

$$\boxed{\overline{\mathcal{K}}_{Qrot} = J'_x\omega'_x\bar{i}' + J'_y\omega'_y\bar{j}' + J'_z\omega'_z\bar{k}'} \tag{6.158}$$

— cînd axa de rotaţie are direcţie fixă în spaţiu, această direcţie fiind luată ca direcţie comună a axelor Qz şi Qz' ; rezultă, în această situaţie ($\omega'_x = \omega'_y = 0$; $\omega'_z = \omega$) :

$$\boxed{\overline{\mathcal{K}}_{Qrot} = -J'_{xz}\omega\bar{i}' - J'_{yz}\omega\bar{j}' + J'_{zz}\omega\bar{k}'\,;} \tag{6.159}$$

— cînd axa de rotaţie are direcţie fixă în spaţiu şi este şi axă principală de inerţie relativă la polul Q, ($J'_{xz} = J'_{yz} = 0$; $\omega'_x = \omega'_y = 0$; $\omega'_z = \omega$), în această din urmă situaţie obţinîndu-se cea mai simplă expresie a momentului cinetic $\overline{\mathcal{K}}_{Qrot}$:

$$\boxed{\overline{\mathcal{K}}_{Qrot} = J'_z\omega\bar{k}' = J'_z\bar{\omega} = J\bar{\omega}} \tag{6.160}$$

în ultima formă subînţelegîndu-se însă că J reprezintă momentul de inerţie al rigidului în raport cu axa sa de rotaţie.

Scanned with CamScanner

b) *Momentul cinetic al rigidului în raport cu polul fix.* Momentul cinetic al rigidului în raport cu polul fix O, definit prin relația

$$\boxed{\overline{\mathcal{K}} = \int_{(M)} \bar{r} \times dm\bar{v}}, \tag{6.161}$$

va putea fi exprimat în funcție de momentul cinetic în raport cu polul Q legat de rigid, în baza relației generale (1.190) de trecere de la un pol la altul a momentelor rezultante, relație care va avea acum forma

$$\boxed{\overline{\mathcal{K}} = \bar{r}_Q \times \overline{\mathcal{H}} + \overline{\mathcal{K}}_Q}, \tag{6.162}$$

sau încă, ținînd seama și de relația (6.154), mai rezultă

$$\boxed{\overline{\mathcal{K}} = \bar{r}_Q \times \overline{\mathcal{H}} + M\bar{r}'_G \times \bar{v}_Q + \overline{\mathcal{K}}_{Qrot}}, \tag{6.163}$$

În cazul cînd polul Q coincide cu centrul de masă al rigidului ($Q \equiv G$; $\bar{r}'_G = 0$; $\bar{r}_Q = \bar{r}_G$; $\overline{\mathcal{K}}_{Qrot} = \overline{\mathcal{K}}_{Grot} = \overline{\mathcal{K}}_G$), relația precedentă ia forma simplificată

$$\boxed{\overline{\mathcal{K}} = \bar{r}_G \times M\bar{v}_G + \overline{\mathcal{K}}_G} \tag{6.164}$$

și exprimă *teorema lui Koenig relativă la momentul cinetic* în mișcarea generală a rigidului, cu următoarea formulare: "momentul cinetic în raport cu un pol fix al unui rigid în mișcare este egal cu momentul cinetic în raport cu acel pol fix al centrului de masă al rigidului, considerîndu-se concentrată în acest centru întreaga masă a corpului, adunat geometric cu momentul cinetic al rigidului corespunzător rotației sale instantanee în jurul centrului de masă".

Scanned with CamScanner

(3)

3°. Torsorul impulsurilor unui rigid în mişcare generală.

a) *Torsorul impulsurilor în polul Q legat de rigid.* Acest torsor va avea forma

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_Q(\overline{\mathcal{H}}) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathcal{H}} = M(\bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}'_G) \\ \overline{\mathcal{K}}_Q = M\bar{r}'_Q \times \bar{v}_Q + \overline{\mathcal{K}}_{Qrot} \end{array} \right\}} \tag{6.165}$$

în cazul cînd polul Q este oarecare şi forma

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_G(\overline{\mathcal{H}}) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathcal{H}} = M\bar{v}_G \\ \overline{\mathcal{K}}_G = \overline{\mathcal{K}}_{Grot} \end{array} \right\}} \tag{6.166}$$

în cazul cînd polul Q coincide cu centrul de masă.

b) *Torsorul impulsurilor în polul fix.* În cazul cînd polul Q este oarecare în rigid, torsorul în polul fix al impulsurilor rigidului va avea forma

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{H}}) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathcal{H}} = M(\bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}'_G) \\ \overline{\mathcal{K}} = \bar{r}_Q \times \overline{\mathcal{H}} + M\bar{r}'_G \times \bar{v}_Q + \overline{\mathcal{K}}_{Qrot} \end{array} \right\}}, \tag{6.167}$$

iar în cazul cînd polul Q coincide cu centrul de masă se va scrie

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{H}}) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathcal{H}} = M\bar{v}_G \\ \overline{\mathcal{K}} = \bar{r}_G \times M\bar{v}_G + \overline{\mathcal{K}}_G \end{array} \right\}} \tag{6.168}$$

Ca semnificaţie fizică, torsorul impulsurilor caracterizează capacitatea pe care o au corpurile în mişcare de a-şi păstra, în condiţii ce vor fi stabilite ulterior, starea de mişcare mecanică, impulsul caracterizînd capacitatea de conservare a mişcării de translaţie rectilinie uniformă, iar momentul cinetic, capacitatea de conservare a mişcării de rotaţie uniformă.

Scanned with CamScanner

6.2.2. Energia cinetică a rigidului în mișcare generală

Se numește *energie cinetică a masei elementare dm aflată* în mișcare cu viteza $\bar{v}$, mărimea sclară elementară

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{2} dm\bar{v}^2, \tag{6.169}$$

iar mărimea definită prin relația

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int_{(M)} dm\,\bar{v}^2} \tag{6.170}$$

este numită *energie cinetică a rigidului în mișcare.*

Înlocuind și acum viteza $\bar{v}$ cu expresia sa (6.144), descompunînd integrala (6.170) într-o sumă de 3 integrale, corespunzătoare celor trei termeni ai dezvoltării pătratului vitezei, scoțînd, în prima integrală în afara semnului de integrare pe $\bar{v}_Q^2$, iar în a doua integrală, după asocierea în prealabil a lui *dm* vectorului $\bar{r}'$, pe vectorii $\bar{v}_G$ și $\bar{\omega}$ — cu respectarea ordinii operațiilor — și introducînd pentru cea de-a treia integrală notația

$$\mathcal{E}_{rot} = \frac{1}{2}\int_{(M)} dm\,\bar{v}_{rot}^2, \tag{6.171}$$

acest termen purtînd denumirea de *energie de rotație a rigidului în jurul polului Q*, se obține următoarea relație curentă de calcul a energiei rigidului:

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} M\bar{v}_Q^2 + M\bar{v}_Q(\bar{\omega}\times\bar{r}'_G) + \mathcal{E}_{rot}} \tag{6.172}$$

În cazul cînd polul *Q* coincide cu centrul de masă al rigidului ($\bar{v}_Q = \bar{v}_G$; $\bar{r}'_G = 0$), relația precedentă ia forma

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} M\bar{v}_G^2 + \mathcal{E}_{rot}} \tag{6.173}$$

Scanned with CamScanner

şi exprimă *teorema lui Koenig relativă la energia cinetică*, cu următoarea formulare: energia cinetică a unui rigid în mişcare este egală cu energia cinetică a centrului său de masă, considerîndu-se concentrată în acest centru întreaga masă a corpului, adunată cu energia cinetică corespunzătoare rotaţiei instantanee a rigidului în jurul centrului de masă.

Pentru a stabili şi expresia curentă de calcul al energiei de rotaţie, se va efectua în relaţia (6.171), în baza identităţii lui Lagrange (1.93), înlocuirea

$$\bar{v}_{rot}^2 = (\bar{\omega}\times\bar{r}')^2 = \bar{\omega}^2\bar{r}'^2-(\bar{\omega}\bar{r}')^2 = (\omega_x'^2+\omega_y'^2+\omega_z'^2)(x'^2+y'^2+z'^2) -$$
$$-(\omega_x'x'+\omega_y'y'+\omega_z'z')^2 = \omega_x'^2(y'^2+z'^2)+\omega_y'^2(x'^2+z'^2)+\omega_z'^2(x'^2+y'^2) -$$
$$-2\omega_x'\omega_y'x'y'-2\omega_y'\omega_z'y'z'-2\omega_z'\omega_x'z'x' \qquad (6.174)$$

Descompunînd integrala care defineşte energia de rotaţie într-o sumă de 6 integrale, corespunzătoare celor 6 termeni de mai sus ai lui $\bar{v}_{rot}^2$, scoţînd în afara semnelor de integrare proiecţiile vitezei unghiulare şi ţinînd seama de semnificaţiile integralelor rămase, se obţine expresia

$$\boxed{\mathcal{E}_{rot}=\frac{1}{2}[J'_{xx}\omega_x'^2+J'_{yy}\omega_y'^2+J'_{zz}\omega_z'^2-2J'_{xy}\omega_x'\omega_y'-2J'_{yz}\omega_y'\omega_z'-2J'_{zx}\omega_z'\omega_x']}, \qquad (6.175)$$

care capătă forme simplificate în următoarele două situaţii:

— cînd axele invariabil legate de rigid coincid cu axele principale de inerţie relative la polul $Q(J'_{xx}=J'_x;\ J'_{yy}=J'_y;\ J'_{zz}=J'_z;\ J'_{xy}=J'_{yz}=J'_{zx}=0)$ rezultînd în această situaţie

$$\boxed{\mathcal{E}_{rot}=\frac{1}{2}(J'_x\omega_x'^2+J'_y\omega_y'^2+J'_z\omega_z'^2)}; \qquad (6.176)$$

— cînd axa de rotaţie are direcţie fixă în spaţiu, această direcţie fiind luată şi ca direcţie comună a axelor Oz şi Qz', $(\omega_x'=\omega_y'=0;\ \omega_z'=\omega)$, în care situaţie va rezulta

$$\boxed{\mathcal{E}_{rot}=\frac{1}{2}J'_{zz}\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2} \qquad (6.177)$$

Scanned with CamScanner

în ultima expresie subînțelegîndu-se că J reprezintă momentul de inerție al rigidului în raport cu axa de rotație.

Ca una din formele posibile ale energiei, care caracterizează capacitatea materiei de a-și conserva, în anumite condițiuni, mișcarea înțeleasă în sensul cel mai larg al cuvîntului, energia cinetică caracterizează capacitatea corpurilor rigide de a-și conserva, în condiții determinate, mișcarea mecanică în ansamblul ei, energia cinetică de translație reprezentînd o măsură a mișcării de translație, iar energia cinetică de rotație o măsură a mișcării de rotație instantanee a rigidului în jurul polului invariabil atașat lui.

6.3. *Caracteristicile dinamice ale mișcării generale a rigidului*

Experiența de toate zilele dovedește că evoluția mișcării unui rigid este condiționată de interacțiunile lui cu corpurile din mediul înconjurător, interacțiuni caracterizate printr-un ansamblu de mărimi specifice unei mișcări concrete date, purtînd numele generic de *caracteristici dinamice* și împărțite în :

— *caracteristici dinamice vectoriale*, reprezentate prin noțiunile de *componente ale torsorilor solicitărilor* aplicate rigidului ;

— *caracteristici dinamice scalare*, reprezentate prin noțiunile de *lucru mecanic* și *putere mecanică*.

Aceste noțiuni vor fi definite în cele ce urmează.

6.3.1. Torsorii solicitărilor aplicate unui rigid

Întrucît definirea noțiunii de *solicitări* este strîns legată de procesul de axiomatizare a disciplinei de mecanică, este firesc să se preceadă prezentarea problemei solicitărilor cu enunțarea axiomelor fundamentale ale disciplinei.

1°. **Principiile fundamentale ale dinamicii rigidului.** Rigidele, ale căror mișcări sînt studiate în practica inginerească, nu sînt izolate în spațiu, ci se găsesc în permanentă interacțiune mecanică cu corpuri din mediul înconjurător, fie că este vorba de *interacțiuni la distanță*, care se produc pe baza unor legi fizice cunoscute (de exemplu legea atracției universale), fie că este vorba de *interacțiuni de contact*.

Măsura acestor interacțiuni o constituie totdeauna o *distribuție de forțe elementare de interacțiune*, al căror caracter este condiționat de tipul de intracțiune realizată.

Scanned with CamScanner

Concluziile și generalizările experienței umane privind interacțiunile mecanice dintre corpuri s-au cristalizat sub forma unui număr de *trei axiome fundamentale*, menționate, în parte, încă în lucrările lui Galileo Galilei și formulate, într-o formă considerată și astăzi de mulți mecanicieni ca definitivă, în monumentala lucrare „PHYLOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA" a marelui Isaac Newton.

În lucrarea de față, cele trei principii fundamentale ale dinamicii vor căpăta formulări întrucîtva diferite de cele întîlnite în literatura de specialitate, corespunzătoare noului model mecanic adoptat în construcția disciplinei, solidul rigid.

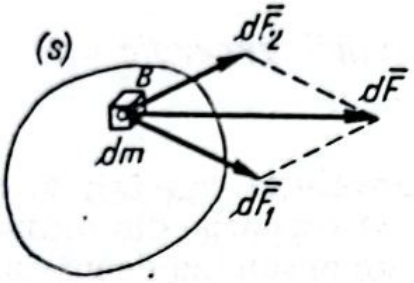


Fig. 6.27.

(5) Aceste trei principii sînt:

Principiul I: *principiul independenței acțiunii forțelor*, cu următorul enunț: acțiunile simultane ale forțelor elementare $d\bar{F}_1$ și $d\bar{F}_2$, exercitate asupra masei elementare dm a unui rigid de către două corpuri cu care masa dm se găsește în interacțiune, sînt independente între ele și pot fi înlocuite cu acțiunea unică a rezultantei $d\bar{F}$ a celor două forțe, determinată după regula paralelogramului (fig. 6.27).

Acest prim principiu, care se extinde, cu ușurință, la cazul unui număr oarecare, determinat, de forțe elementare solicitînd o masă elementară, postulează:

— existența forței elementare $d\bar{F}$ ca măsură a interacțiunii dintre masa elementară dm a unui rigid și totalitatea maselor elementare cu care masa dm se găsește într-un anumit tip de interacțiune, fie că această totalitate aparține aceluiași rigid din care face parte și masa elementară considerată, fie că aparține unui alt corp din mediul înconjurător, în interacțiune cu rigidul;

— independența efectului unei forțe de efectele acțiunilor simultane ale forțelor exercitate de alte corpuri, efectul total al tuturor acestor acțiuni simultane obținîndu-se deci prin însumarea efectelor produse de fiecare forță elementară în parte;

— valabilitatea, pentru forțe, a *principiului paralelogramului*, respectiv a *regulii poligonului* pentru un număr mai mare de forțe elementare solicitînd masa elementară considerată.

(6) *Principiul al II-lea*: *principiul coliniarității forței și accelerației*, avînd următoarea formulare: orice forță elementară $d\bar{F}$, care acționează asupra unei mase elementare dm, îi imprimă acesteia o accelerație avînd aceeași orientare ca și forța, factorul de coliniari-

Scanned with CamScanner

tate dintre forță și accelerație fiind, pentru un sistem dat de unități, masa elementară.

Acest de-al doilea principiu, tradus matematic prin relația

$$\boxed{d\bar{F} = dm\,\bar{a}} \tag{6.178}$$

prezintă o importanță deosebită pentru construcția mecanicii prin următoarele consecințe care decurg din enunțul lui:

— postulează existența, în cadrul mecanicii clasice, a cel puțin unui sistem de referință absolut, în raport cu care poate fi scrisă relația de coliniaritate (6.178);

— justifică caracterul vectorial, atribuit fără explicații în cinematică, al accelerației, aceasta fiind caracterizată acum ca efect al acțiunii unei forțe elementare asupra masei elementare;

— furnizează criteriul de comparare a forțelor, două forțe elementare fiind numite egale atunci cînd, acționînd asupra aceleiași mase elementare, îi imprimă acesteia accelerații egale;

— evidențiază independența relației de coliniaritate (6.178) de tipul de forță acționînd asupra masei elementare, relația menționată luînd în cazul greutății elementare forma

$$d\bar{P} = dm\bar{g}, \tag{6.179}$$

$\bar{g}$ fiind *accelerația gravitației* avînd, la latitudinea Bucureștiului, valoarea $|\bar{g}| = g = 9{,}806$ (m/s²);

— precizează necesitatea adoptării unui sistem de unități de măsură mecanice pentru scrierea, sub forma (6.178), a relației de coliniaritate dintre forță și accelerație, ceea ce implică stabilirea de unități de măsură arbitrare numai pentru două dintre mărimile care intră în relații, unitatea de măsură pentru cea de-a treia mărime urmînd a fi definită în funcție de unitățile adoptate pentru celelalte două.

În cadrul *Sistemului Internațional de Unități* (SI) de măsură, adoptat oficial și în Republica Socialistă România, se stabilesc ca unități de măsură *kilogramul* (kg) pentru masă, *metrul pe secundă la pătrat* (m/s²) pentru accelerație și se definește *newtonul* (N) ca unitate de măsură pentru forțe.

În cazul cînd asupra masei elementare dm acționează un număr n de forțe elementare $d\bar{F}_i (i = 1,2,\ldots,n)$, atunci, în conformitate cu cele

Scanned with CamScanner

două principii enunţate pînă acum, fiecare din forţe îi imprimă masei dm acceleraţia $\bar{a}_i$, satisfăcînd relaţia

$$d\bar{F}_i = dm\,\bar{a}_i,\ (i = 1,2,..,\ n).$$

Însumînd aceste relaţii scrise pentru toate cele n forţe rezultă egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} d\bar{F}_i = dm \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i, \tag{6.180}$$

în care membrul stîng reprezintă rezultanta $d\bar{\mathcal{F}}$ a celor n forţe elementare — evident, tot o forţă elementară — care înlocuieşte, în baza primului principiu, ansamblul forţelor $d\bar{F}_i$, iar suma din membrul drept reprezintă acceleraţia totală, $\bar{a}$, a masei elementare dm; în consecinţă, relaţia (6.180) va lua forma

$$\boxed{d\,m\bar{a} = d\bar{\mathcal{F}}} \tag{6.181}$$

şi va reprezenta *ecuaţia fundamentală a mecanicii clasice.*

Principiul al III-lea : principiul acţiunii şi reacţiunii, cu următoarea formulare : acţiunile reciproce dintre două mase elementare sînt coliniare, de sensuri contrare şi de mărimi egale şi au ca suport comun dreapta care uneşte punctele reprezentînd sediile celor două mase în interacţiune.

Acest ultim principiu fundamental al mecanicii clasice postulează :

— gruparea tuturor forţelor elementare de interacţiune în perechi de vectori elementari direct opuşi, dar aplicaţi la mase elementare diferite ;

— valabilitatea principiului enunţat pentru toate masele elementare în interacţiune, fie că aparţin unor corpuri distincte, fie că aparţin aceluiaşi rigid.

Principiul al III-lea al mecanicii clasice are următoarea completare logică privind, de astă dată, interacţiunile finite dintre două corpuri rigide oarecare : torsorului, într-un pol oarecare, al forţelor de acţiune a unui rigid asupra unui alt rigid îi corespunde un torsor, în acelaşi pol, al reacţiunilor celui de-al doilea rigid asupra primului, cei doi torsori avînd componentele de mărimi egale şi de sensuri contrarii.

Scanned with CamScanner

Acest complement al ultimului principiu postulează posibilitatea reducerii oricărei distribuţii de forţe elementare—care sînt vectori legaţi — la un torsor, posibilitate justificată de faptul că punctele de aplicaţie ale acestor vectori elementari formează un ansamblu rigid.

2°. **Reducerea forţelor aplicate unui rigid.** Celor două moduri de interacţiune dintre corpuri — la distanţă şi de contact — le corespund *distribuţii de forţe elementare de interacţiune la distanţă* — repartizate, de regulă, pe toată masa rigidului, din care motiv se mai numesc şi *forţe masice* — , respectiv *distribuţii de forţe elementare de interacţiune prin contact* — , repartizate pe porţiuni A ($i = 1,2,..,m$) practic finite, din aria totală A ce mărgineşte rigidul, în care se realizează contactul, aceste din urmă forţe numindu-se *forţe superficiale.*

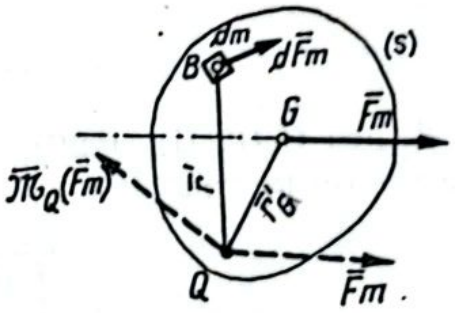


Fig. 6.28.

Componentele torsorului rezultant în polul invariabil legat de rigid — de regulă, în centrul său de masă — al oricărei din distribuţiile de forţe menţionate mai sus — deci forţa rezultantă şi momentul rezultant în polul Q — vor fi numite, în continuare, *solicitări.*

Considerînd mai întîi cazul unei distribuţii de forţe elementare masice $d\bar{F}_m$, aplicate în punctele $B(\bar{r}')$, (fig. 6.28), va rezulta următorul torsor al ei în polul Q

$$\bar{\mathcal{T}}_Q(\bar{F}_m) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_m = \int_{(M)} d\bar{F}_m \\ \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{F}_m) = \int_{(M)} \bar{r}' \times d\bar{F}_m \end{array} \right\}. \qquad (6.182)$$

În foarte multe cazuri distribuţiile de forţe masice elementare sînt echivalente, aşa cum se va vedea ulterior, unei rezultante unice $\bar{F}_m$, acţionînd în centrul de masă al rigidului; valabilitatea în aceste condiţiuni, a teoremei lui Varignon; $(\bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{F}_m) = \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{F}_m) = \bar{r}'_G \times \bar{F}_m)$, face ca torsorul precedent să ia forma

$$\bar{\mathcal{T}}_Q(\bar{F}_m) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_m \\ \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{F}_m) = \bar{r}'_G \times \bar{F}_m = \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{F}_m) \end{array} \right\}. \qquad (6.183)$$

Trecînd la examinarea unei distribuţii de forţe superficiale $d\bar{F}_s$, aplicate în punctele $B(\bar{r}')$ ale unei porţiuni A_i a ariei A ce limi-

teză rigidul, porțiune în interiorul căreia se găsește și *punctul teoretic de contact* C_i (punctul de contact considerat în ipoteza perfectei rigidități a suprafețelor celor două rigide în interacțiune directă), se va defini mai întîi torsorul acestei distribuții în punctul C_i:

$$\overline{\mathcal{T}}_{Ci}(\overline{F}_{si}) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{F}_{si} = \int_{(A_i)} d\overline{F}_s \\ \overline{\mathcal{M}}_{C_i}(\overline{F}_{si}) = \int_{(A_i)} \bar{r}'_{C_iB} \times d\overline{F}_s \end{array} \right\}, \qquad (6.184)$$

($\bar{r}'_{C_iB} = \overrightarrow{C_iB}$; fig. 6.29), trecerea de la polul C_i la polul Q făcîndu-se apoi după relațiile

$$\overline{\mathcal{T}}_Q(\overline{F}_{si}) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{F}_{si} \\ \overline{\mathcal{M}}_Q(\overline{F}_{si}) = \overline{\mathcal{M}}_{C_i}(\overline{F}_{si}) + \bar{r}'_{C_i} \times \overline{F}_{si} \end{array} \right\}. \qquad (6.185)$$

În foarte multe situații, distribuțiile de forțe superficiale pot fi aproximate cu distribuții echivalente unor rezultante unice $\overline{F}_{si}$, acționînd în punctele teoretice de contact $C_i(\bar{r}'_{C_i})$, ($\overline{\mathcal{M}}_{C_i}(\overline{F}_{si}) = 0$; $\overline{\mathcal{M}}_Q(\overline{F}_{si}) = \overline{\mathcal{M}}_Q(\overline{F}_{si})$), ceea ce face ca torsorul precedent să ia forma

$$\overline{\mathcal{T}}_Q(\overline{F}_{si}) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{F}_{si} \\ \overline{\mathcal{M}}_Q(\overline{F}_{si}) = \bar{r}'_{C_i} \times \overline{F}_{si} = \overline{\mathcal{M}}_Q(\overline{F}_{si}) \end{array} \right\}. \qquad (6.186)$$

Așa se explică faptul că în aplicațiile practice curente ale mecanicii se consideră frecvent forțe de contact finite $\overline{F}_i$, acționînd în puncte discrete C_i, fără să se mai specifice că în realitate este vorba de aproximarea semnalată mai sus.

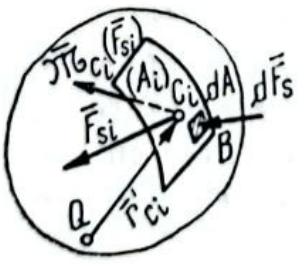


Fig. 6.29.

În cazul cel mai general, asupra unui rigid vor putea acționa atît forțe masice de diverse tipuri, cît și forțe superficiale într-un număr determinat de porțiuni A_i, ceea ce va face ca asupra unei mase elementare dm, cu sediul în punctul $B(\bar{r}')$, să acționeze forța elementară rezultantă totală

$$d\overline{\mathcal{F}} = d\overline{\mathcal{F}}_m + d\overline{\mathcal{F}}_s = \sum_j d\overline{F}_{mj} + \sum_i d\overline{F}_{si}, \qquad (6.187)$$

$d\overline{\mathcal{F}}_m$ fiind rezultanta tuturor forțelor elementare masice, iar $d\overline{\mathcal{F}}_s$

fiind rezultanta tuturor forţelor elementare superficiale, ultima fiind diferită de zero numai în cazul cînd masa elementară aparţine uneia din zonele în care sînt repartizate forţele de contact.

Torsorul rezultant în polul Q al tuturor acestor distribuţii de forţe elementare va fi definit sub forma

$$\overline{\mathcal{T}}_Q(\overline{\mathcal{F}}) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathcal{F}} = \int_{(M)} d\overline{\mathcal{F}} = \sum_j \int_{(M)} d\overline{F}_{mj} + \sum_i \int_{(A_i)} d\overline{F}_{si} \\ \overline{\mathfrak{M}}_Q = \int_{(M)} \bar{r}' \times d\overline{\mathcal{F}} = \sum_j \int_{(M)} \bar{r}' \times d\overline{F}_{mj} + \sum_i \int_{(A_i)} \bar{r}' \times d\overline{F}_{si} \end{array} \right\}. \tag{6.188}$$

calculul efectiv al componentelor lui făcîndu-se însă cu ajutorul relaţiilor

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_Q(\overline{\mathcal{F}}) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathcal{F}} = \sum_j \overline{F}_{mj} + \sum_i \overline{F}_{si} \\ \overline{\mathfrak{M}}_Q = \sum_j \overline{\mathcal{M}}_Q(\overline{F}_{mj}) + \sum_i [\overline{\mathfrak{M}}_{C_i}(\overline{F}_{si}) + \bar{r}'_{C_i} \times \overline{F}_{S_i}] \end{array} \right\}} \tag{6.189}$$

dacă distribuţiile de forţe superficiale elementare sînt oarecare şi cu ajutorul relaţiilor

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_Q(\overline{\mathcal{F}}) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathcal{F}} = \sum_j \overline{F}_{mj} + \sum_i \overline{F}_{si} \\ \overline{\mathfrak{M}}_Q = \sum_j \overline{\mathcal{M}}_Q(\overline{F}_{mj}) + \sum_i \overline{\mathcal{M}}_Q(\overline{F}_{si}) \end{array} \right\}} \tag{6.190}$$

dacă distribuţiile de forţe elementare superficiale sînt echivalente unor rezultante unice, aplicate în punctele teoretice de contact; în relaţiile precedente sumarea după indicele j corespunde diverselor tipuri posibile de forţe masice, iar sumarea după indicele i diferitelor porţiuni A_i de arie pe care sînt repartizate forţele superficiale.

În funcţie de valorile componentelor $\overline{\mathcal{F}}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_Q$ vor putea fi întîlnite cele patru cazuri cunoscute de reducere:

Cazul I: *sistem de solicitări reductibile la un sistem echivalent cu zero*, corespunzător condiţiilor:

$$\overline{\mathcal{F}}\,\overline{\mathfrak{M}}_Q = 0\,;\quad \overline{\mathcal{F}} = 0\,;\quad \overline{\mathfrak{M}}_Q = 0. \tag{6.191}$$

Scanned with CamScanner

Cazul II : *sistem de solicitări reductibile la un cuplu de forţe*, caracterizat prin condiţiile

$$\bar{\mathcal{F}}\,\overline{\mathcal{M}}_Q = 0\,;\ \bar{\mathcal{F}} = 0\,;\ \overline{\mathcal{M}}_Q \neq 0. \tag{6.192}$$

Cazul III : *sistem de solicitări reductibile la o forţă unică*, în condiţiile

$$\bar{\mathcal{F}}\,\overline{\mathcal{M}}_Q = 0\,;\ \bar{\mathcal{F}} \neq 0\,;\ \overline{\mathcal{M}}_Q \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases} \tag{6.193}$$

forţa unică fiind aplicată în polul Q în cazul $\overline{\mathcal{M}}_Q = 0$ şi avînd suportul determinat prin ecuaţia

$$\bar{r}' = \frac{\bar{\mathcal{F}} \times \overline{\mathcal{M}}_Q}{\bar{\mathcal{F}}^2} + \lambda\,\bar{\mathcal{F}} \tag{6.194}$$

dacă $\overline{\mathcal{M}}_Q \neq 0$.

Cazul IV : *sistem de solicitări reductibile la un torsor propriu zis*, în cazul

$$\bar{\mathcal{F}}\,\overline{\mathcal{M}}_Q \neq 0\,;\ \bar{\mathcal{F}} \neq 0\,;\ \overline{\mathcal{M}}_Q \neq 0. \tag{6.195}$$

În această ultimă situaţie sistemul admite o axă centrală, reprezentînd locul geometric al punctelor de moment rezultant minim

$$\overline{\mathcal{M}}_{min} = \frac{\bar{\mathcal{F}}\,\overline{\mathcal{M}}_Q}{\bar{\mathcal{F}}^2}\,\bar{\mathcal{F}}, \tag{6.196}$$

ecuaţia axei centrale avînd tot forma (6.194).

3°. **Clasificarea solicitărilor aplicate unui rigid.** În funcţie de natura interacţiunilor, solicitările aplicate unui rigid pot fi împărţite în trei mari categorii, fiecare din ele conţinînd, la rîndul ei, grupe şi subgrupe, aşa cum se va arăta în continuare.

a) *Solicitări exterioare.* În această primă categorie de solicitări intră forţele rezultante şi momentele rezultante corespunzătoare distribuţiilor de forţe elementare exercitate asupra maselor elementare ale unui rigid de către alte corpuri din mediul înconjurător, cu care rigidul se găseşte în interacţiune.

După efectele pe care le produc atunci cînd acționează ca forțe elementare aplicate maselor elementare, solicitările exterioare pot fi împărțite în următoarele două grupe:

Solicitări exterioare active, corespunzătoare distribuțiilor de forțe elementare exterioare caracterizate prin următoarele două trăsături specifice:

— existența lor este independentă de starea de mișcare a rigidului asupra căruia sînt exercitate, precum și de preexistența altor solicitări aplicate rigidului;

— forțele elementare active pot fie să accelereze mișcările maselor elementare solicitate, fie să le încetinească, în funcție de unghiurile — ascuțite (fig. 6.30, a), sau obtuze (fig. 6.30, b) — pe care le fac cu vitezele maselor solicitate.

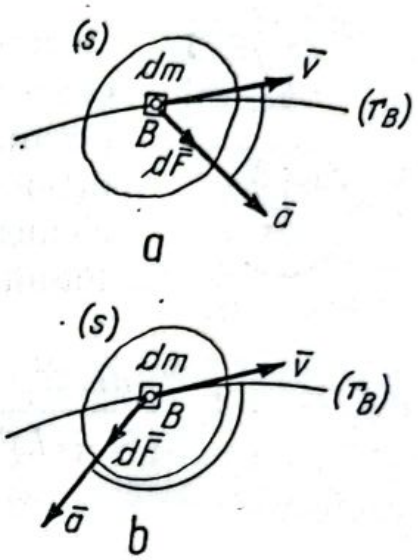


Fig. 6.30.

Această grupă de solicitări se împarte, la rîndul ei, în următoarele două subgrupe:

(α) *Solicitări exterioare active de interacțiune directă*, corespunzătoare distribuțiilor de forțe exterioare active care se exercită direct, fără elemente intermediare, între masele elementare ale celor două rigide în interacțiune.

Unul din tipurile cu o importanță deosebită pentru aplicațiile tehnice din această subgrupă îl constituie *solicitările gravitaționale terestre*, corespunzătoare distribuțiilor de forțe de atracție universală exercitate de Pămînt asupra corpurilor aflate în sfera sa de atracție.

Conform *legii atracției universale*, descoperită și formulată de Newton la nivelul maselor finite, între o masă elementară dm a unui corp solid (S) și orice masă elementară dm^* a unui alt corp (S^*) din mediul înconjurător se exercită forțe de atracție de mărimi proporționale cu produsul maselor respective și invers proporționale cu pătratul distanței dintre ele, factorul de proporționalitate, numit *constanta atracției universale*, avînd valoarea

$$k_a = 6{,}664 \cdot 10^{-14} (\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}) \qquad (6.197)$$

Datorită valorii foarte mici a acestei constante, forțele de atracție universală pot fi luate în considerație numai în cazurile cînd corpurile care interacționează — sau, cel puțin, unul din ele — sînt corpuri cerești, cu mase enorme.

Scanned with CamScanner

Cea de-a doua situaţie, care interesează, de altfel, în cea mai mare măsură aplicaţiile tehnice, este întîlnită în cazul forţelor de atracţie exercitate de Pămînt asupra corpurilor de dimensiuni obişnuite, neglijabile în raport cu cele ale Pămîntului, situate în imediata apropiere a solului terestru.

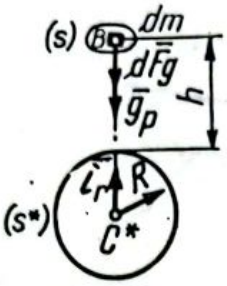


Fig. 6.31.

Unele ipoteze simplificatoare privind forma şi structura Pămîntului — acesta este considerat ca fiind constituit din straturi concentrice sferice omogene — permit să se tragă concluzia că forţa elementară gravitaţională exercitată de Pămînt asupra unei mase elementare dm a unui rigid (S) situat la suprafaţa Pămîntului (fig. 6.31), are valoarea

$$d\bar{F}_g = -k_a \frac{dmM_p}{(R+h)^2}\bar{i}_r = \left(-ka\frac{M_p}{(R+h)^2}\bar{i}_r\right)dm = dm\bar{g}_p, \qquad (6.198)$$

vectorul

$$\boxed{\bar{g}_p = -k_a \frac{M_p}{(R+h)^2}\bar{i}_r} \qquad (6.199)$$

reprezentînd *acceleraţia gravitaţională terestră*: în relaţiile precedente M_p şi R sînt, respectiv, masa şi raza Pămîntului, h este distanţa masei elementare dm la solul terestru, iar $\bar{i}_r = \text{vers}\,\overrightarrow{C_pB}$ este versorul vectorului de poziţie al masei elementare în raport cu centrul C_p al Pămîntului.

În condiţiile dimensiunilor reduse ale rigidului (S), cu totul neglijabile în raport cu raza Pămîntului ($R = 6370$ km), mărimile h şi $\bar{i}_r$ — şi deci şi acceleraţia gravitaţională terestră $\bar{g}_p$ — pot fi considerate aceleaşi pentru toate masele elementare ale rigidului, ceea ce revine la a considera sistemul vectorilor elementari $d\bar{F}_g$ ca un sistem de vectori paraleli, reductibili la o rezultantă unică, determinată prin relaţia

$$\bar{F}_g = \int_{(M)} d\bar{F}_g = \bar{g}_p \int_{(M)} dm,$$

adică

$$\boxed{\bar{F}_g = M\bar{g}_p} \qquad (6.200)$$

Scanned with CamScanner

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI

și acționînd în centrul C al acestor vectori paraleli, cu vectorul de poziție $\bar{r}'_C$ în raport cu polul Q legat de rigid dat de relația

$$\bar{r}'_C = \frac{\int_{(M)} dF_g \bar{r}'}{\int_{(M)} dF_g} = \frac{\int_{(M)} g_p dm \bar{r}'}{\int_{(M)} g_p dm} = \frac{g_p \int_{(M)} \bar{r}' dm}{g_p \int_{(M)} dm} = \frac{\int_{(M)} \bar{r}' dm}{M},$$

adică

$$\bar{r}'_C = \bar{r}'_G \tag{6.201}$$

rezultînd de aici concluzia coincidenței acestui punct de aplicație cu centrul de masă al rigidului.

Se va vedea ulterior că forța gravitațională terestră reprezintă principala componentă a greutății corpurilor.

(β) *Solicitări exterioare de legătură activă.* Se numește *legătură activă* a unui rigid cu un alt corp din mediul înconjurător orice interacțiune de contact realizată prin intermediul unui element elastic cu masă neglijabilă — arc elicoidal (fig. 6.32 a), arc spiral (fig. 6.32, b), bară elastică deformată prin încovoiere (fig. 6.32, c), tijă elastică deformată prin torsionare (fig. 6.32, d) — element care, prin deformare elastică, dezvoltă în cele două zone de legătură cu corpurile pe care le cuplează distribuții de forțe elementare elastice, reductibile în unele situații la o *forță elastică rezultantă* — cazul arcului elicoidal deformat numai prin întindere și comprimare, sau al barei elastice deformate prin încovoiere — , în alte situații la un *cuplu elastic rezultant* — cazul arcului spiral și al tijei elastice deformate prin torsionare — sau, alteori, chiar la un *răsucitor al solicitărilor elastice* — cazul arcului elicoidal deformat atît prin întindere și comprimare, cît și prin torsionare.

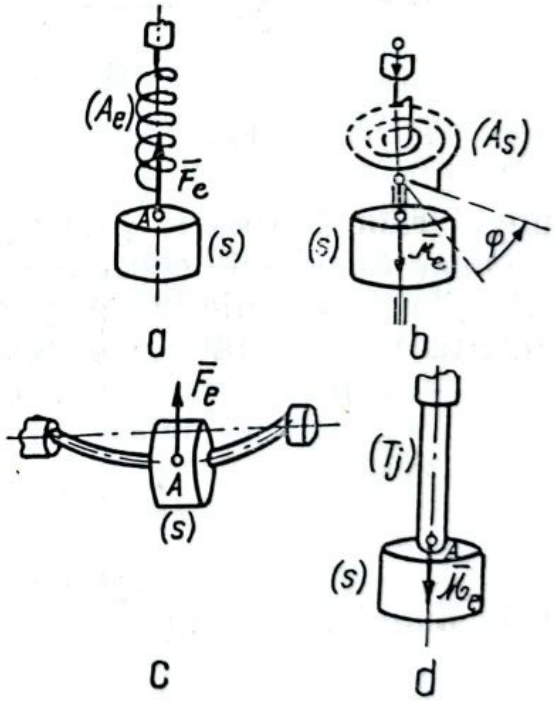


Fig. 6.32.

Considerînd acest ultim model, mai general, de legătură elastică, se va admite, ca ipoteză de lucru simplificatoare — acceptabilă

totuşi în cele mai multe din situaţii — că axa longitudinală a elementului elastic rămîne în permanenţă rectilinie şi fixă în spaţiu, neglijîndu-se deci eventualele mici abateri ale ei de la această poziţie în timpul mişcărilor rigidelor cuplate; aceasta revine la a considera că rigidele cuplate execută mişcări elicoidale după axa (Δ), (fig. 6.33 a), cu parametrii cinematici $\bar{v}_Q$ şi $\bar{\omega}$, respectiv $\bar{v}_E$ şi $\bar{\omega}_E$, ultimii avînd valorile zero dacă corpul (S_*) este fix. Reprezentarea schematică a unei asemenea legături active se face ca în fig. 6.33, b dacă corpul (S^*) este în mişcare — $\xi_E(t)$ indicînd deplasarea prin translaţie a corpului (S^*), iar $\varphi_E(t)$ rotaţia lui — şi ca în fig. 6.33, c, dacă corpul (S^*) este fix.

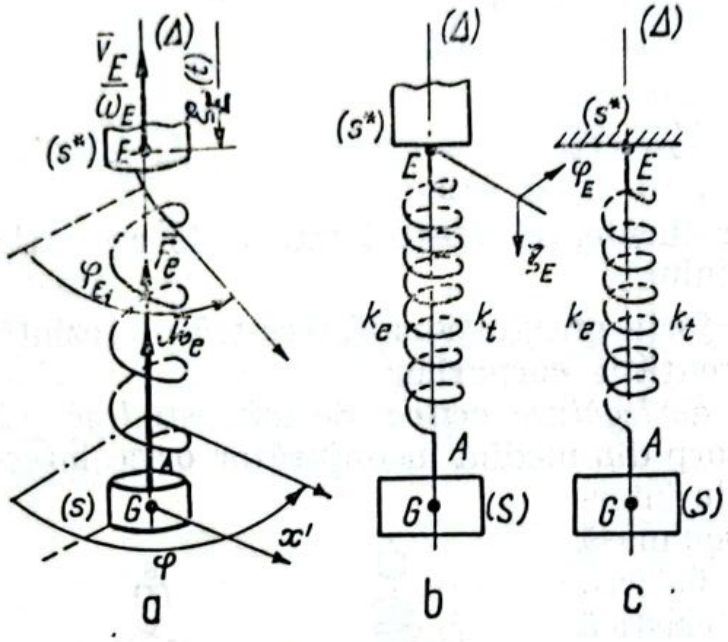


Fig. 6.33.

Alegînd un versor $\bar{i}_\Delta$ pentru axa (Δ), la care vor fi raportate atît sensurile solicitărilor elastice — deci semnele valorilor lor scalare —, cît şi sensurile unghiurilor de rotaţie φ_E şi $\varphi_A = \varphi$, ale corpurilor cuplate, deformaţia elementului elastic considerat, într-un moment oarecare cînd extremităţile A şi E ale lui au poziţii oarecare pe axa (Δ), va fi determinată prin următoarele două mărimi:

— *deformaţia axială* a elementului, reprezentată prin vectorul

$$\bar{\lambda} = (\bar{r}_A - \bar{r}_E) - (\bar{r}_{A_0} - \bar{r}_{E_0}); \tag{6.202}$$

— *deformaţia unghiulară* a elemntului elastic, reprezentată prin unghiul orientat

$$\chi = (\varphi - \varphi_E) - (\varphi_0 - \varphi_{E_0}) \tag{6.203}$$

cu semnele tuturor unghiurilor din relaţie raportate la versorul $\bar{i}_\Delta$ al axei (Δ); A_0 şi E_0 sînt poziţiile punctelor A şi E într-un moment în care elementul elastic este nedeformat.

Cercetările experimentale au permis să se tragă concluzia că în cazul cînd aceste deformaţii nu depăşesc anumite limite-ipoteză

care poate fi acceptată în cele mai multe din situaţiile întîlnite în practica inginerească — distribuţia de forţe elastice exercitate de către elementul elastic asupra rigidului (S) — o distribuţie direct opusă se exercită şi asupra corpului (S^*), dar acest corp nu constituie obiectul studiului şi deci despre această de-a doua distribuţie nu se va discuta — este echivalentă unui răsucitor aplicat în punctul de legătură A, cu componentele orientate în lungul axei (Δ) astfel încît să se opună deformaţiilor care le-au provocat apariţia şi cu modulii componentelor verificînd *legea lui Hooke* (modulul forţei elastice este proporţional cu modulul deformaţiei axiale, iar modulul momentului elastic este proporţional cu modulul deformaţiei unghiulare).

Concluziile experimentale menţionate îşi găsesc următoarea traducere matematică

$$\begin{cases} \bar{F}_e = -k_e\,[(\bar{r}_A - \bar{r}_E) - (\bar{r}_{A_0} - \bar{r}_{E_0})]; \\ \bar{\mathcal{M}}_e = -k_t\,[(\varphi - \varphi_E) - (\varphi_0 - \varphi_{E_0})\bar{i}_A, \end{cases} \tag{6.204}$$

k_e (N/m) şi k_t (Nm/rad) fiind două constante de proporţionalitate purtînd numele de *constantă elastică*, respectiv *constantă de torsiune*, depinzînd de natura materialului din care este construit elementul elastic şi de datele lui constructive; aceste constante fizice, determinate uneori prin calcule şi cel mai adesea experimental, sînt indicate, în schiţele mecanice, prin simbolurile lor scrise în dreptul elementului elastic.

Utilizarea expresiilor precedente ale celor două solicitări elastice are dezavantajul că pentru sisteme mecanice gata montate, în funcţie în momentul începerii studiului, nu pot fi apreciate lungimea nedeformată $|\bar{r}_{A_0} - \bar{r}_{E_0}|$ şi deschiderea unghiulară nedeformată $|\varphi_0 - \varphi_{E_0}|$ a elementului elastic; din acest motiv, termenii corespunzători din expresiile (6.204) sînt înlocuiţi cu alţii, care pot fi uşor determinaţi şi anume prin valorile celor două solicitări elastice corespunzătoare poziţiei de echilibru static a elementului elastic — deci şi a corpurilor cuplate prin el — , valori care, aşa cum se va vedea mai tîrziu, vor putea fi deduse din ecuaţiile de echilibru scrise pentru rigidul (S).

Într-adevăr, pentru poziţia de echilibru static, determinate prin valorile $\bar{r}_{A_{st}}$ şi φ_{st}, respectiv $\bar{r}_{E_{st}}$ şi $\varphi_{E_{st}}$, ale parametrilor de poziţie ai celor două rigide cuplate, solicitările elastice iau valorile $\bar{F}_{e_{st}}$ şi $\bar{\mathcal{M}}_{e_{st}}$, care satisfac relaţiile

$$\left.\begin{aligned} \bar{F}_{e_{st}} &= -k_e\,[(\bar{r}_{A_{st}} - \bar{r}_{E_{st}}) - (\bar{r}_{A_0} - \bar{r}_{E_0})]; \\ \bar{\mathcal{M}}_{e_{st}} &= -k_t\,[(\varphi_{st} - \varphi_{E_{st}}) - (\varphi_0 - \varphi_{E_0})]\,\bar{i}_\Delta \end{aligned}\right\} \tag{6.205}$$

Eliminarea termenilor $k_e(\bar{r}_{A_0} - \bar{r}_{E_0})$ şi $k_t(\varphi_0 - \varphi_{E_0})\bar{i}_\Delta$ între expresiile (6.204) şi (6.205), conduce la următoarea formă a torsorului rezultant în punctul de legătură A al solicitărilor elastice exercitate asupra rigidului (S):

$$\boxed{\bar{\mathcal{T}}_A(\bar{F}_e) = \begin{Bmatrix} \bar{F}_e = -k_e\,[(\bar{r}_A - \bar{r}_{A_{st}}) - (\bar{r}_E - \bar{r}_{E_{st}})] + \bar{F}_{e_{st}} \\ \bar{\mathcal{M}}_e = -k_e\,[(\varphi - \varphi_{st}) - (\varphi_E - \varphi_{E_{st}})]\,\bar{i}_\Delta + \bar{\mathcal{M}}_{e_{st}} \end{Bmatrix}} \tag{6.206}$$

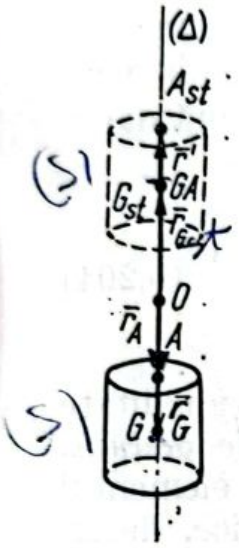


Fig. 6.34.

În foarte multe cazuri, centrul de masă al rigidului (S) se găseşte pe axa longitudianlă a elementului elastic; prin alegerea lui ca centru de reducere a forţelor elastice şi considerarea relaţiilor evidente din fig. 6.34:

$$\begin{cases} \bar{r}_A - \bar{r}_{A_{st}} = (\bar{r}_G + \bar{r}'_{GA}) - (\bar{r}_{G_{st}} + \bar{r}'_{GA}) = \bar{r}_G - \bar{r}_{G_{st}} \\ \bar{\mathcal{M}}_A(\bar{F}_e) = \bar{\mathcal{M}}_e = \bar{\mathcal{M}}_{e_G} = \bar{\mathcal{M}}_G(\bar{F}_e), \end{cases}$$

va rezulta următoarea formulă a torsorului în centrul de masă G al solicitărilor elastice:

$$\boxed{\bar{\mathcal{T}}_G(\bar{F}_e) = \begin{Bmatrix} \bar{F}_e = -k_e(\bar{r}_G - \bar{r}_{G_{st}}) - (\bar{r}_E - \bar{r}_{E_{st}})] + \bar{F}_{e_{st}} \\ \bar{\mathcal{M}}_e = -k_t\,[(\varphi - \varphi_{st}) - (\varphi_E - \varphi_{E_{st}})]\,\bar{i}_\Delta + \bar{\mathcal{M}}_{e_{st}} \end{Bmatrix}} \tag{6.207}$$

Termenii

$$\begin{cases} \bar{F}_{e_c} = -k_e(\bar{r}_G - \bar{r}_{G_{st}}) + \bar{F}_{e_{st}} \\ \bar{\mathcal{M}}_{e_c} = -k_t(\varphi - \varphi_{st})\,\bar{i}_\Delta + \bar{\mathcal{M}}_{e_{st}} \end{cases} \tag{6.208}$$

sînt numiţi, din motive ce vor fi justificate la sfîrşitul paragrafului, *componentele conservative* ale torsorului solicitărilor elastice, iar termenii

$$\begin{cases} \bar{F}_{e_{pt}} = k_e(\bar{r}_E - \bar{r}_{E_{st}}) = \bar{F}_{e_{pt}}(t) \\ \bar{\mathcal{M}}_{e_{pt}} = k_t(\varphi_E - \varphi_{E_{st}})\,\bar{i}_\Delta = \bar{\mathcal{M}}_{e_{pt}}(t), \end{cases} \tag{6.209}$$

funcţii cunoscute de timp, sînt numiţi *componentele perturbatoare* ale solicitărilor elastice; cu aceste notaţii, torsorul în centrul de masă G al solicitărilor elastice va mai putea fi scris sub forma

$$\bar{\mathcal{T}}_G(\bar{F}_e) = \bar{\mathcal{T}}_G(\bar{F}_{e_c}) + \bar{\mathcal{T}}_G(\bar{F}_{e_{pt}}) = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{e_c} \\ \bar{\mathcal{M}}_{e_c} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{F}_{e_{pt}} \\ \bar{\mathcal{M}}_{e_{pt}} \end{Bmatrix}. \tag{6.210}$$

Scanned with CamScanner

În cazul cînd extremitatea E, legată cu exteriorul, a elementului elastic este fixă, ($\bar{r}_E - \bar{r}_{Est} \equiv 0$; $\varphi_E - \varphi_{Est} \equiv 0$, deci $\bar{F}_{ept} \equiv 0$; $\bar{\mathcal{M}}_{ept} \equiv 0$) și reperul fix se alege astfel încît originea O să coincidă cu poziția de echilibru static a centrului de masă, ($O \equiv G_{st}$; $\bar{r}_{G_{st}} = 0$), iar axa de referință pentru măsurarea unghiului de rotație se ia astfel încît să rezulte $\varphi_{st} = 0$, torsorul în centrul de masă al solicitărilor elastice ia forma

$$\boxed{\bar{\mathcal{T}}_G(\bar{F}_e) = \bar{\mathcal{T}}_G(\bar{F}_{ec}) = \begin{Bmatrix} (\bar{F}_e = \bar{F}_{ec}) = -k_e \bar{r}_G + \bar{F}_{est} = \bar{F}_{ed} + \bar{F}_{est} \\ \bar{\mathcal{M}}_e = \bar{\mathcal{M}}_{ec} = -k_t \varphi \bar{i}_\Delta + \bar{\mathcal{M}}_{est} = \bar{\mathcal{M}}_{ed} + \bar{\mathcal{M}}_{est} \end{Bmatrix}} \tag{6.211}$$

termenii $\bar{F}_{ed}$ și $\bar{\mathcal{M}}_{ed}$ purtînd numele de *componentele dinamice* ale solicitărilor elastice conservative.

Forma generală (6.207) a torsorului solicitărilor elastice se particularizează cu ușurință la următoarele modele mai simple de elemente elastice :

Arcul elicoidal deformat numai prin întindere și comprimare, model care corespunde condițiilor

$$\varphi - \varphi_{st} \equiv 0 \; ; \quad \varphi_E - \varphi_{E_{st}} \equiv 0 \; ; \quad \bar{\mathcal{M}}_{e_{st}} = 0 \tag{6.212}$$

Bara elastică deformată prin încovoiere plană, model corespunzător condițiilor

$$\varphi - \varphi_{st} \equiv 0 \; ; \; \varphi_E - \varphi_{E_{st}} \equiv 0 \; ; \; \bar{\mathcal{M}}_{e_{st}} = 0 \; ; \; \bar{r}_E - \bar{r}_{E_{st}} \equiv 0, \tag{6.213}$$

justificate de observația că, în ipoteza—acceptată în majoritatea covîrșitoare a situațiilor întîlnite în aplicațiile practice —a menținerii în permanență a punctului teoretic de legătură G în același plan (π_n), normal la axa nedeformată a barei, acest tip de legătură poate fi asimilat unui arc elicoidal deformat numai prin întindere și comprimare, cu extremitatea E fixă pe axa nedeformată a barei.

În legătură cu acest model, mai trebuie făcută mențiunea că în această situație constanta elastică k_e depinde și de modul de fixare a barei și de poziția rigidului pe bară ; în unele probleme tehnice, această constantă este înlocuită cu inversa ei

$$\alpha = \frac{1}{k_e} \tag{6.214}$$

purtînd numele de *coeficient de influență*.

Scanned with CamScanner

Arcul spiral torsionat şi tija elastică deformată prin torsionare, acest ultim model corespunzînd condiţiilor

$$\bar{r}_G - \bar{r}_{G_{st}} \equiv 0\,; \quad \bar{r}_E - \bar{r}_{E_{st}} \equiv 0\,; \quad \bar{F}_{e_{st}} = 0. \tag{6.215}$$

(γ) *Solicitări exterioare pasive*, corespunzătoare distribuţiilor de forţe elementare exterioare caracterizate prin următoarele două trăsături principale:

— existenţa lor este condiţionată fie de starea de mişcare a rigidului, fie de preexistenţa unui sistem de solicitări exterioare active aplicate rigidului;

— forţele elementare pasive pot numai să încetinească mişcările maselor elementare asupra cărora acţionează, sau chiar să împiedice deplasarea lor în anumite direcţii, fără a le putea însă accelera, ele formînd totdeauna unghiuri obtuze cu vitezele maselor elementare.

Acestei grupe de solicitări exterioare îi aparţin următoarele trei subgrupe:

(δ) *Solicitările de rezistenţă a mediului.* Mişcările rigidelor întîlnite în aplicaţiile tehnice se produc totdeauna în medii fluide, acestea fiind în marea majoritate a situaţiilor aerul şi uneori apa. Dacă mediul fluid în care se deplasează un rigid se găseşte în mişcare, cu o viteză superioară, sau cel puţin comparabilă cu cea de translaţie a rigidului, atunci el exercită asupra acestuia din urmă o distribuţie de forţe elementare cu caracter de forţe active; în cazul însă cînd mediul fluid este imobil, sau se deplasează cu viteză neglijabilă în raport cu viteza de translaţie a rigidului, distribuţia de forţe elementare exercitate de mediu asupra corpului în mişcare are caracter de forţe pasive.

Considerînd, în cele ce urmează, numai cea din urmă situaţie, şi ţinînd seama şi de concluziile cercetărilor experimentale efectuate asupra deplasărilor rigidelor în medii rezistente, se precizează că orice element al *suprafeţei de atac* al unui rigid — porţiunea din suprafaţa exterioară a rigidului în care normalele exterioare la elementele de arie formează unghiuri ascuţite cu vitezele acestor elemente — întîmpină din partea mediului în care se deplasează o forţă elementară de rezistenţă, exprimată, în baza *legii lui Bernoulli*, prin relaţia

$$\mathrm{d}\bar{R}_z = -\,c\,\mathrm{d}A\,v^{\lambda}\cos(\bar{v}, \bar{n})\bar{\imath}_v \tag{6.216}$$

unde $c(\mathrm{Nm}^{-(\lambda+2)}\,s^{\lambda})$ este un factor de proporţionalitate depinzînd de densitatea mediului şi de forma şi de modul de prelucrare a suprafeţei de atac, $\bar{\imath}_v = \mathrm{vers}\,\bar{v}$ este versorul vitezei elementului de arie,

$\bar{n}$ este versorul normalei exterioare a elementului de arie dA de pe suprafața de atac A_a (fig. 6.35), iar λ este un exponent depinzînd de mărimea vitezei elementului de arie, determinat experimental.

Torsorul, în polul Q invariabil legat de rigid, al acestor rezistențe elementare va avea forma

$$\overline{\mathcal{T}}_Q(\bar{R}_z) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_z = \int_{(A_a)} d\bar{R}_z = -\int_{(A_a)} c dA v^\lambda \cos(\bar{v}, \bar{n})\bar{\imath}_v \\ \\ \overline{\mathfrak{M}}_Q(\bar{R}_z) = \int_{(A_a)} \bar{r}' \times d\bar{R}_z = -\int_{(A_a)} \bar{r}' \times c dA v^\lambda \cos(\bar{v}, \bar{n})\bar{\imath}_v \end{array} \right\}. \tag{6.217}$$

În practica inginerească se utilizează curent două forme particulare ale legii generale a lui Bernoulli și anume:

Legea I-a a lui Newton, corespunzătoare valorii $\lambda = 1$, adoptată în cazul vitezelor cu modul inferior lui 50 m/s și exprimată sub forma

$$d\bar{R}_z = -c dA \bar{v} \cos(\bar{v}, \bar{n}). \tag{6.218}$$

Legea a II-a a lui Newton, corespunzătoare valorii $\lambda = 2$, adoptată în cazul vitezelor cu modulul cuprins între 50 m/s și 250 m/s, această lege fiind exprimată prin relația

$$d\bar{R}_z = -c dA \bar{v}^2 \cos(\bar{v}, \bar{n})\bar{\imath}_v. \tag{6.219}$$

În continuare, vor fi calculate componentele torsorului rezistențelor mediului în conformitate cu prima lege a lui Newton pentru o placă omogenă dreptunghiulară subțire, care execută o mișcare elicoidală cu parametrii cinematici $\bar{v}_G$ și $\bar{\omega}$ în lungul uneia din cele două axe de simetrie geometrică ale ei, axa (Δ), (fig. 6.36), observîndu-se că în această situație aria totală de atac rezultă din următoarele două porțiuni, ambele simetrice în raport cu axa (Δ):

— Aria de atac la translație, reprezentată prin aria dreptunghiulară $ABCD$, de mărime A_{a_1}, în care normalele exterioare la elementele de arie formează unghiuri drepte cu viteza de rotație ($\cos(\bar{v}_{rot}, \bar{n}_1) = 0$ și unghiuri egale cu zero cu viteza de translație,

$(\cos(\bar{v}_G, \bar{n}_1) = 1$. Pentru această porțiune de arie de atac toate rezistențele elementare ale mediului vor avea sensurile inverse vitezei de translație și vor fi egale între ele, coeficientul c_1 fiind practic același în toate punctele ariei A_{a_1}; datorită distribuției simetrice a acestor

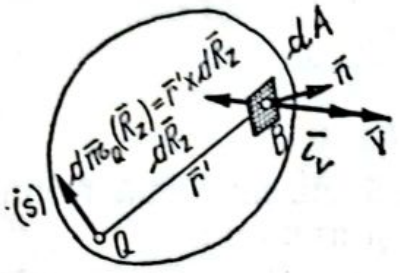


Fig. 6.35.

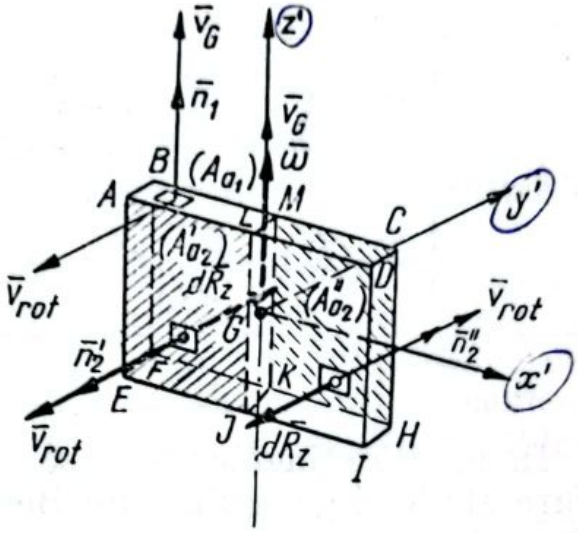


Fig. 6.36.

forțe în raport cu centrul $G_{A_{a_1}}$ al ariei de atac A_{a_1} prin care trece și axa (Δ), ele se vor reduce la o rezultantă unică aplicată în $G_{A_{a_1}}$, sau în G, determinată prin relația

$$\bar{R}_z = \int_{(A_{a_1})} d\bar{R}_z = -\int_{(A_{a_1})} c_1 \bar{v}_G dA = -c_1 \bar{v}_G \int_{(A_{a_1})} dA = -(c_1 A_{a_1}) \bar{v}_G. \quad (6.220)$$

— Aria de atac la rotație, reprezentată prin porțiunile $AEJL$ și $CHKM$, de arii $A'_{a_2} = A''_{a_2} = \frac{A_{a_2}}{2}$, în care normalele exterioare la elementele de arii formează unghiuri drepte cu viteza de translație $(\cos(\bar{v}_G, \bar{n}'_2) = \cos(\bar{v}_G, \bar{n}''_2) = 0)$ și unghiuri egale cu zero cu vitezele de rotație $(\cos(\bar{v}_{rot'}, \bar{n}'_2) = \cos(\bar{v}_{rot'}, \bar{n}''_2) = 1$. Datorită simetriei geometrice a acestei de-a doua arii de atac în raport cu axa (Δ), precum și observației că și în cazul acestei arii coeficientul de rezistență c_2 poate fi consderat practic același în toate punctele ei, toate rezistențele elementare repartizate pe ariile A'_{a_2} și A''_{a_2}, datorate numai rotației, se vor reduce la un cuplu, cu momentul orientat în lungul axei (Δ), în sens cotrar vectorului $\bar{\omega}$ și cu modulul determinat — în ipoteza

acceptată de la început, a plăcii subțiri ($y' \approx 0$, fig. 6.36) — prin relația

$$|\overline{\mathfrak{M}}_G(\bar{R}_z)| = \int_{(A'_{a_2})} |x'|\, c_2 |\bar{v}_{rot}| dA + \int_{(A''_{a_2})} x' c_2 |\bar{v}_{rot}| dA =$$

$$= \int_{(A'_{a_2})} |x'|\, c_2 |x'|\, |\bar{\omega}| dA + \int_{(A''_{a_2})} x' c_2 x' |\bar{\omega}| dA = \tag{6.221}$$

$$= c_2 |\bar{\omega}| \left[\int_{(A'_{a_2})} x'^2 dA + \int_{(A''_{a_2})} x'^2 dA \right] = (c_z I'_z)\, |\bar{\omega}|,$$

I'_z fiind momentul de inerție geometric al celei de-a doua arii de atac în raport cu axa (Δ).

Introducînd notațiile

$$c_1 A_{a_1} = c_R \qquad \text{și} \qquad C_z I'_z = k_R, \tag{6.222}$$

c_R fiind numit *coeficient total de rezistență la translație*, iar k_R *coeficient total de rezistență la rotație*, ambii determinați de regulă experimental, va rezulta, pentru modelul mecanic considerat, următorul torsor în centrul de masă al rezistențelor mediului:

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_G(\bar{R}_z) = \left\{ \begin{matrix} \bar{R}_z = -c_R \bar{v}_G \\ \overline{\mathfrak{M}}_G(\bar{R}_z) = -k_R \bar{\omega} \end{matrix} \right\}}, \tag{6.223}$$

cu forme particulare reduse la una singură dintre componente în cazurile cînd mișcarea rigidului este numai o translație ($\bar{\omega} \equiv 0$), sau numai o rotație ($\bar{v}_G \equiv 0$).

Solicitările de amortizare ale elementelor de legătură elastică. Cercetările experimentale au stabilit că în cazul modelului mai general de element elastic, care permite corpurilor cuplate să execute mișcări elicoidale coaxiale, în punctele de legătură A și E cu rigidele cuplate se dezvoltă, în afara distribuției forțelor elastice, și o a doua distribuție de forțe elementare, reductibile de asemenea la un răsucitor admițînd axa mișcării elicoidale ca axă centrală. Aceste din urmă

Scanned with CamScanner

distribuţii de forţe elementare, datorate unor proprietăţi intrinseci ale materialelor din care sînt confecţionate elementele elastice şi depinzînd şi de vîscozitatea fluidelor în care sînt implantate elementele elastice, se opun mişcărilor relative — una faţă de cealaltă —ale rigidelor cuplate, din care motiv se numesc *rezistenţe de amortizare.*

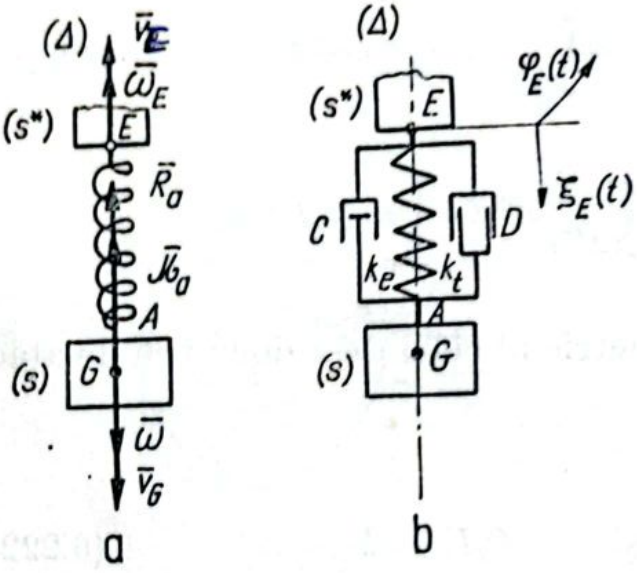


Fig. 6.37.

Considerînd numai răsucitorul rezistenţelor de amortizare aplicate rigidului (S) şi admiţînd şi acum că centrul de masă al acestui rigid se găseşte pe axa mişcării elicoidale ca şi punctul de legătură A (fig. 6.37), rezultă următoarele expresii — stabilite pe cale exerimentală — pentru componentele torsorului în centrul de masă G al rezistenţelor de amortizare — *rezistenţa totală de amortizare* — şi *momentul rezultant de amortizare* :

$$\boxed{\overline{\mathscr{T}}_G(\bar{R}_a) = \begin{cases} \bar{R}_a = -C(\bar{v}_G - \bar{v}_E) \\ \overline{\mathfrak{M}}_G(\bar{R}_a) = \bar{\mathcal{M}}_a = -D(\bar{\omega} - \bar{\omega}_E) \end{cases}}, \tag{6.224}$$

C fiind *coeficientul de amortizare la translaţie*, iar D *coeficientul de amortizare la rotaţie*; aceste două constante fizice, determinate experimental, depind de natura materialului din care este confecţionat elementul elastic, de datele lui constructive, precum şi de proprietăţile vîscoase ale fluidului în care se găseşte elementul elastic.

Termenii

$$\begin{cases} \bar{R}_{a_d} = -C\bar{v}_G; \\ \bar{\mathcal{M}}_{a_d} = -D\bar{\omega}, \end{cases} \tag{6.225}$$

sînt numiţi *componentele disipative* ale solicitărilor de amortizare, datorită faptului că, aşa cum se va vedea mai tîrziu, ei provoacă disi-

Scanned with CamScanner

păr‌i de energie mecanică în timpul mişcării unui rigid; termenii

$$\begin{cases} \bar{R}_{a_{pt}} = C\bar{v}_E = \bar{R}_{a_{pt}}(t); \\ \bar{\mathcal{M}}_{a_{pt}} = D\bar{\omega}_E = \bar{\mathcal{M}}_{a_{pt}}(t) \end{cases} \tag{6.226}$$

vor fi numiţi *componentele perturbatoare* ale solicitărilor de amortizare, ei jucînd rol de solicitări active de excitaţie.

Cu aceste notaţii, torsorul în centrul de masă al solicitărilor de amortizare va lua forma

$$\boxed{\bar{\mathcal{T}}_G(\bar{R}_a) = \begin{Bmatrix} \bar{R}_a = \bar{R}_{a_d} + \bar{R}_{a_{pt}} = -C\bar{v}_G + \bar{R}_{a_{pt}} \\ \bar{\mathcal{M}}_a = \bar{\mathcal{M}}_{a_d} + \bar{\mathcal{M}}_{a_{pt}} = -D\bar{\omega} + \bar{\mathcal{M}}_{a_{pt}} \end{Bmatrix}} \tag{6.227}$$

cu componentele perturbatoare avînd, evident, valoarea zero dacă extermitatea E, legată cu exteriorul, este fixă.

Considerarea torsorului rezistenţelor de amortizare va fi precizată în schiţele dinamice prin simboluri specifice — simbolul cilindru-piston pentru rezistenţa de amortizare şi simbolul cilindru — exterior — cilindru interior pentru momentul rezultant de amortizare (fig 6.37. b) — , în dreptul lor trecîndu-se constantele de amortizare C, respectiv D; absenţa, într-o schiţă dinamică, a unuia dintre aceste simboluri va indica neglijarea solicitărilor de amortizare respective.

În mod obişnuit, rezistenţele de amortizare sînt luate în consideraţie numai în cazul arcurilor elicoidale şi spirale.

Solicitările de reacţiune ale legăturilor pasive. Se numeşte *legătură pasivă* a unui rigid (S) cu un corp (S^*) din mediul înconjurător forma de interacţiune realizată fie prin contact direct, fie prin intermediul unor elemente speciale de legătură, care impune anumite restricţii variaţiei parametrilor de poziţie şi uneori şi parametrilor cinematici de ordinul întîi ai rigidului, restricţii traduse matematic printr-un număr de relaţii de forma

$$f_\lambda(x_Q, y_Q, z_Q, \psi, \varphi, \theta; \dot{x}_Q, \dot{y}_Q, \dot{z}_Q, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}; t) \geqslant 0, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots) \tag{6.228}$$

cu unele dintre variabile putînd, evident, să nu figureze în relaţii.

În funcție de forma relațiilor precedente, denumite *condiții de legătură*, sînt posibile următoarele clasificări ale legăturilor pasive :

Clasificarea din punctul de vedere al modului de traducere matematică a restricțiilor, putîndu-se deosebi :

— *legături unilaterale*, traduse prin inegalități ;

— *legături bilaterale*, traduse sub forma egalităților cu zero a unor funcții de parametrii de poziție, de derivatele lor în raport cu timpul și eventual și de timp, purtînd numele de *ecuații de legătură.*

În cele ce urmează vor fi luate în considerație numai legăturile bilaterale.

Clasificarea din punctul de vedere al comportării cinematice, deosebindu-se :

— *legături geometrice*, care introduc restricții numai pentru parametrii de poziție ai rigidului, fiind exprimate prin *ecuații de legătură finite* cu următoarea formă generală

$$f_\lambda(x_Q, y_Q, z_Q, \psi, \varphi, \theta ; t) = 0 ; \qquad (6.229)$$

$$(\lambda = 1, 2, \dots) ;$$

— *legături cinematice*, care introduc restricții atît pentru parametri de poziție ai rigidului, cît și pentru derivatele lor în raport cu timpul exprimate prin *ecuații de legătură diferențiale* avînd următoarea formă generală :

$$f_\lambda(x_Q, y_Q, z_Q, \psi, \varphi, \theta : \dot{x}_Q, \dot{y}_Q, \dot{z}_Q, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\theta} ; t) = 0, \qquad (6.230)$$

$$(\lambda = 1, 2, \dots)$$

aceste ecuații fiind în unele cazuri *integrabile*, iar în altele *neintegrabile.*

Legăturile geometrice, precum și cele cinematice exprimate prin ecuații de legătură diferențiale integrabile, se numesc *legături olonome* și ele vor putea fi traduse matematic, în ultimă instață, numai prin ecuații de legătură finite.

Legăturile cinematice exprimate prin ecuații de legătură diferențiale neintegrabile se numesc *legături neolonome* și ele nu vor intra în discuție în lucrarea de față.

Clasificarea din punctul de vedere al comportării în timp a formelor de interacțiune, putîndu-se distinge :

Scanned with CamScanner

— *legături staţionare*, sau *scleronome*, caracterizate prin absenţa, în mod explicit, a timpului t în ecuaţiile de legătură, absenţă indicînd menţinerea fără modificări în timp a formei de interacţiune dintre corpurile legate :

— *legături nestaţionare*, sau *reonome*, caracterizate prin prezenţa, în mod explicit, a timpului t în ecuaţiile de legătură, evidenţiindu-se astfel modificarea, cu o evoluţie cunoscută în timp, a formei de interacţiune dintre corpuri.

Un caz particular de legături nestaţionare a şi fost considerat în cinematică, atunci cînd s-au presupus cunoscute ecuaţiile finite ale mişcării, acestea fiind, în fond, ecuaţii de legătură nestaţionare de o formă cu totul particulară şi anume de forma

$$\begin{aligned} &f_1(x_Q\,;t)=0\,;\ f_2(y_Q\,;t)=0\,;\ f_3(z_Q\,;t)=0\,;\\ &f_4(\psi\,;t)=0\,;\ f_5(\varphi\,;t)=0\,;\ f_6(\theta\,;t)=0, \end{aligned} \tag{6.231}$$

consecinţe ale aplicării unor legături pasive care prestabilesc mişcarea rigidului.

În marea majoritate a situaţiilor ce vor fi întîlnite în prezentarea problemelor dinamicii rigidului va fi vorba de legături staţionare, traduse prin ecuaţii finite de forma

$$f_\lambda(x_Q, y_Q, z_Q, \psi, \varphi, \theta)=0 \qquad (\lambda=1,2,\ldots) \tag{6.232}$$

în cazul mişcărilor spaţiale şi de forma

$$f_\lambda(x_Q,\ y_Q,\ \varphi)=0, \qquad (\lambda=1,2,\ldots) \tag{6.233}$$

în cazul mişcărilor plane.

Clasificarea din punctul de vedere al modului de realizare practică a formelor de interacţiune, fiind posibilă în acest sens diviziunea :

— *legături pasive simple*, sau *fundamentale* ;

— *legături pasive complexe*, sau *cuple cinematice*.

În continuare, vor fi prezentate dezvoltat tipurile de legături pasive fundamentale, precum şi cîteva doar din tipurile uzuale de cuple cinematice, dat fiind faptul că studiul sistematic al ultimelor constituie principalul obiect al unei alte discipline şi anume Teoria mecanismelor şi maşinilor.

Legături pasive fundamentale. În practica inginerească sînt întîlnite următoarele 4 tipuri de legături pasive simple, sau fundamen-

tale: *reazemul simplu*, *articulația*, *legătura prin fir sau tijă rigidă* și *încastrarea*.

Înainte de a se trece la examinarea, în detaliu, a acestor tipuri de legături pasive, se vor prezenta următoarele concluzii generale, stabilite pe baza cercetărilor teoretice, și, în deosebi, experimentale, efectuate asupra acestor forme particulare de interacțiune:

— Fiecare din cele 4 tipuri de legături pasive fundamentale introduce un număr de l ecuații de legătură între parametrii de poziție ai rigidului căruia îi este aplicată, cu numărul

$$l \leqslant 6 \tag{6.234}$$

în mișcările spațiale și

$$l \leqslant 3 \tag{6.235}$$

în mișcările plane, depinzînd de tipul de legătură și cu ecuațiile de legătură reprezentînd particularizări ale ecuațiilor generale (6.229), particularizări condiționate de tipul legăturii și de modul de alegere a reperului legat de rigid și a reperului fix; în relațiile (6.234) și (6.235) semnul egal corespunde cazului mișcărilor integral prestabilite prin aplicarea de legături pasive.

— În zonele de pe suprafața rigidului în care sînt aplicate legăturile pasive se dezvoltă, atît timp cît legătura este în acțiune, distribuții de forțe elementare de interațiune de contact cu caracteristici de forțe pasive — ceea ce justifică și denumirea de legături pasive dată acestor forme de interacțiune —, distribuții reductibile în punctul teoretic de legătură $C(\bar{r}'_C)$ — situat în interiorul zonei reale de contact și determinat experimental —, la un torsor al *reacțiunilor legăturii pasive*, cu cele două componente ale lui purtînd denumirile de *reacțiune rezultantă a legăturii pasive*, notată $\bar{R}$ și de *moment rezultant în punctul teoretic de legătură al reacțiunilor legăturii pasive*, notat $\overline{\mathcal{M}}_C(\bar{R})$, putîndu-se scrie deci

$$\overline{\mathcal{T}}_C(\bar{R}) = \left\{ \begin{matrix} \bar{R} \\ \overline{\mathfrak{M}}_C(\bar{R}) \end{matrix} \right\} \tag{6.236}$$

— Fiecare din cele două componente ale torsorului reacțiunilor unei legături pasive în punctul teoretic de legătură poate avea, la rîndul ei, două componente, rezultînd astfel două serii de componente ale torsorului rezultant al reacțiunilor.

Componentele ideale ale torsorului reacțiunilor, notate cu simbolurile $\bar{R}_{id}$ și $\overline{\mathfrak{M}}_C(\bar{R}_{id})$ și denumite astfel pentru motivul că, în cazul legăturilor staționare ele nu provoacă, așa cum se va arăta ulterior, disipări de energie; aceste componente pot avea valoarea zero numai în cazul desființării legăturii.

Scanned with CamScanner

Componentele disipative ale torsorului reacţiunilor, datorate fenomenelor de frecare care se produc în zonele de legătură între suprafeţele în contact şi care, aşa cum se va justifica ulterior, provoacă disipări de energie; aceste componente vor fi notate cu simbolurile $\bar{F}_{fr}$ şi $\overline{\mathcal{M}}_C(\bar{F}_{fr})$.

Se va putea deci scrie:

$$\overline{\mathcal{T}}_C(\bar{R}) = \overline{\mathcal{T}}_C(\bar{R}_{id}) + \overline{\mathcal{T}}_C(\bar{F}_{fr}) = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{id} \\ \overline{\mathcal{M}}_C(\bar{R}_{id}) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{F}_{fr} \\ \overline{\mathcal{M}}_C(\bar{F}_{fr}) \end{Bmatrix}. \quad (6.237)$$

— Componentele ideale ale torsorului rezultant al reacţiunilor în punctul teoretic de legătură reprezintă necunoscute ale problemei de dinamica rigidului, ele urmînd a fi determinate din ecuţiile de mişcare; în unele situaţii ele au numai modulii necunoscuţi, în alte situaţii modulii şi sensurile, iar în cazul unora dintre legături sînt necunoscute şi mărimile şi direcţiile şi sensurile lor, ceea ce implică descompunerea lor în componente ortogonale, orientate fie după axele reperului legat de rigid — cel mai adesea —, fie după axele reperului fix — de regulă în problemele de statică —, cu sensurile stabilite arbitrar, valorile scalare ale acestor componente raportate la versorii axelor respective reprezentînd, în acest caz, necunoscute ale problemei.

Semnificaţia fizică a acestor componente este că se opun desfiinţării legăturii.

— Componentele disipative ale torsorului rezultant al reacţiunilor unei legături pasive se opun deplasărilor relative ale rigidului în raport cu corpul cu care este legat şi modulii lor nu pot depăşi anumite valori limită, depinzînd de tipul de legătură, de natura corpurilor în contact şi de valoarea componentei ideale a reacţiunii legăturii, relaţiile care exprimă aceste dependenţe, stabilite pe cale experimentală, purtînd numele de *legi de frecare*; valoarea limită a componentei disipative a reacţiunii rezultante, notată cu simbolul $\bar{F}_{fr_{lim}} = \overline{\Phi}$, poartă numele de *forţă de frecare*, iar valoarea limită a componentei disipative a momentului rezultant al reacţiunilor legăturii în punctul teoretic de legătură, notată cu simbolul $\overline{\mathcal{M}}_C(\bar{F}_{fr_{lim}}) = \overline{\mathcal{M}}_{fr}$, este numită *moment rezultant de frecare*.

Torsorul, în condiţii limită, al reacţiunilor unei legături pasive, va avea deci următoarea formă în punctul teoretic de legătură

$$\overline{\mathcal{T}}_C(\bar{R}_{lim}) = \overline{\mathcal{T}}_C(\bar{R}_{id}) + \overline{\mathcal{T}}_C(\bar{F}_{fr_{lim}}) = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{id} \\ \overline{\mathcal{M}}_C(\bar{R}_{id}) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \overline{\Phi} \\ \overline{\mathcal{M}}_{fr} \end{Bmatrix}. \quad (6.238)$$

ideal fiz.

Scanned with CamScanner

— În unele situații componentele disipative ale torsorului reacțiunilor unei legături pasive au modulii foarte mici în raport cu modulii componentelor ideale, precum și în raport cu modulii celorlalte solicitări aplicate rigidului; în aceste cazuri, componentele disipative sînt neglijate în torsorul reacțiunilor, ($\bar{\Phi} \approx 0$; $\bar{\mathscr{M}}_{fr} \approx 0$), scriindu-se

$$\bar{\mathscr{T}}_C(\bar{R}_{lim}) = \bar{\mathscr{T}}_C(\bar{R}_{id}) \tag{6.239}$$

și legătura este numită *legătură pasivă cu frecare neglijabilă.*

— Trecerea, pentru torsorul rezultant al reacțiunilor unei legături pasive, de la punctul teoretic de legătură $C(\bar{r}'_C = \vec{QC})$, la polul Q invariabil legat de rigid — originea reperului $Qx'y'z'$, în raport cu care se scriu unele dintre ecuațiile de mișcare ale rigidului — se face pe baza relației cunoscute din teoria vectorilor alunecători, adică

$$\bar{\mathscr{T}}_Q(\bar{R}) = \bar{\mathscr{T}}_C(\bar{R}) + \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{r}'_C \times \bar{R} \end{Bmatrix}. \tag{6.240}$$

— Variația stării de mișcare a unui rigid supus la legături pasive, caracterizată prin parametrii cinematici de ordinul doi $\bar{a}_Q$ și $\bar{\varepsilon}$, este consecința acțiunii simultane asupra rigidului a torsorilor, în centrul de masă al rigidului, ai tuturor solicitărilor active și pasive la care este supus rigidul, această concluzie reflectîndu-se la nivelul masei elementare prin necesitatea considerării în ecuația fundamentală (6.181) și a forțelor elementare pasive.

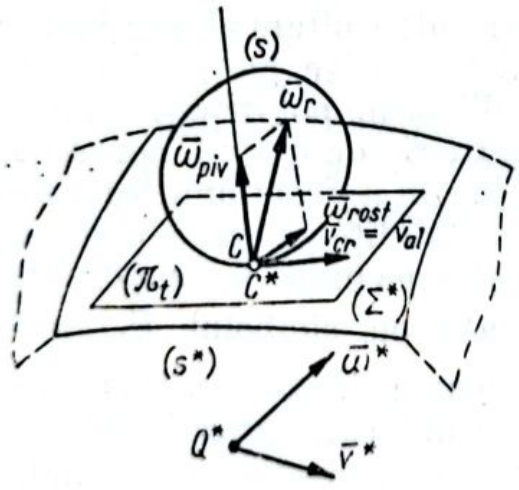


Fig. 6.38.

Toate concluziile precedente vor fi, aplicate direct, fără alte explicații, la examinarea celor patru tipuri de legături pasive fundamentale menționate.

Reazemul simplu.

Legătura pasivă a unui rigid (S) cu un corp (S^*) din mediul înconjurător este numită *reazem simplu* atunci cînd suprafețele lor au în permanență un punct comun C (fig. 6.38), numit *punct teoretic de rezemare* și aflat, în realitate, în interiorul unei zone de contact, produsă prin deformarea — neglijată — a suprafețelor; dacă corpul (S^*) se deplasează în spațiu cu para-

Scanned with CamScanner

metrii cinematici $\bar{v}^*$ și $\bar{\omega}^*$, sau suprafața lui, pe care se sprijină punctul C al rigidului (S) este deformabilă în timp după o lege cunoscută, independentă de mișcarea rigidului, legătura este numită *reazem nestaționar*, iar în cazul cînd corpul (S^*) este fix în spațiu și suprafața lui nu se deformează în timp, legătura este numită *reazem staționar*.

Considerînd cazul mai general, al legăturii nestaționare, ecuația — scrisă în raport cu reperul fix — a suprafeței (Σ^*) a corpului (S^*), pe care se sprijină rigidul (S), va avea forma

$$f(x, y, z, t,) = 0, \tag{6.241}$$

iar mișcarea relativă a rigidului (S) în raport cu corpul (S^*) va fi caracterizată în punctul C prin parametrii cinematici

$$\bar{v}_{Cr} = \bar{v}_C - \bar{v}_{C^*}\,; \quad \bar{\omega}_r = \bar{\omega} - \omega^*\,; \tag{6.242}$$

cu

$$\bar{v}_{Cr} = \bar{v}_C\,; \quad \bar{\omega}_r = \bar{\omega} \tag{6.243}$$

în cazul reazemului staționar ($\bar{v}^* = 0$; $\bar{\omega}^* = 0$), $\bar{v}_C$ și $\bar{\omega}$ fiind parametrii cinematici ai mișcării absolute a rigidului considerat.

Viteza relativă $\bar{v}_{Cr} = \bar{v}_{al}$ — numită și viteză de alunecare — se va găsi, evident, în planul tangent (π_t) comun celor două suprafețe în contact în punctul C, (fig. 6.38); în ceea ce privește viteza unghiulară relativă $\bar{\omega}_r$, ea va putea fi descompusă în două componente ortogonale $\bar{\omega}_{piv}$. — normală la planul tangent (π_t) — și $\bar{\omega}_{rost}$ — situată în planul tangent comun (π_t).

În funcție de valorile vectorilor $\bar{v}_{al}$, $\bar{\omega}_{rost}$ și $\bar{\omega}_{piv}$, vor putea fi deosebite următoarele trei deplasări relative simple ale rigidului (S) pe suprafața de sprijin (Σ^*) a corpului (S^*):

— *Alunecarea pură*, care se produce în condițiile

$$\bar{v}_{al} \neq 0\,; \quad \bar{\omega}_{rost} \equiv 0\,; \quad \bar{\omega}_{piv} \equiv 0 \tag{6.244}$$

și care poate fi recunoscută prin faptul că punctul teoretic de rezemare rămîne mereu același pe una din suprafețele în contact și se schimbă continuu pe cealaltă suprafață; notînd cu ds_C și ds_{C^*} deplasările elementare ale punctelor de contact — C în rigidul (S) și C^* în corpul (S^*) —, această deplasare simplă va fi caracterizată prin una din condițiile

$$ds_C = 0\,; \; ds_{C^*} \neq 0 \quad \text{sau:} \quad ds_C \neq 0\,; \; ds_{C^*} = 0, \tag{6.245}$$

Scanned with CamScanner

prima putînd fi întîlnită, de exemplu, la reazemul din punctul A al barei (S) pe suprafața semicilindrică (Σ^*), (fig. 6.40), iar a doua la reazemul din punctul B al aceluiași rigid.

Rostogolirea pură, care are loc în condițiile

$$\bar{v}_{al} \equiv 0\,; \quad \bar{\omega}_{rost} \neq 0\,; \quad \bar{\omega}_{piv} \equiv 0, \tag{6.246}$$

această deplasare simplă putînd fi recunoscută prin faptul că punctul teoretic de rezemare își schimbă continuu poziția pe ambele suprafețe în contact; această situație va fi caracterizată prin condiția

$$ds_C = ds_{C^*}, \tag{6.247}$$

reprezentînd o ecuație de legătură diferențială, integrabilă numai în cazul unor mișcări particulare de rostogolire.

— *Pivotarea pură*, care se produce în condițiile

$$\bar{v}_{al} \equiv 0: \quad \bar{\omega}_{rost} \equiv 0\,; \quad \bar{\omega}_{piv} \neq 0 \tag{6.248}$$

și poate fi recunoscută prin aceea că punctul teoretic de rezemare rămîne mereu același pe ambele suprafețe în contact; această ultimă situație va fi caracterizată prin condițiile:

$$ds_C = ds_{C^*} = 0 \tag{6.249}$$

Se înțelege că în cazul cel mai general vor putea avea loc, simultan, toate aceste deplasări simple, situație care se va reflecta în condițiile

$$\bar{v}_{al} \neq 0\,; \quad \bar{\omega}_{rost} \neq 0\,; \quad \bar{\omega}_{piv} \neq 0\,; \quad ds_C - ds_{C^*} \neq 0. \tag{6.250}$$

Trecînd la examinarea torsorului reacțiunilor reazemului, se va face precizarea că torsorul reacțiunilor ideale se reduce numai la *reacțiunea normală* $\bar{N}$, orientată după normala în C la planul tangent comun celor două suprafețe în contact, cu sensul nedeterminat în cazul legăturii bilaterale și în sensul în care rigidul (S) poate părăsi suprafața de sprijin (Σ^*) în cazul legăturii unilaterale (fig. 6.39 a și b), modulul ei fiind o necunoscută a problemei de dinamica rigidului supus la o astfel de legătură; în cazul cînd suprafața,

Scanned with CamScanner

de sprijin (Σ^*) este oarecare, fiind determinată prin ecuaţia (6.241), reacţiunea normală, coliniară cu vectorul grad $_cf$ se exprimă sub forma

$$\boxed{\bar{N} = \lambda \operatorname{gra}\partial_c f = \lambda\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_c \bar{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_c \bar{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_c \bar{k}\right]}, \quad (6.251)$$

cu factorul λ urmînd a fi determinat din ecuaţiile de mişcare, iar în cazul cînd normala la suprafaţa de sprijin în punctul teoretic de rezemare este cunoscută, avînd orientarea determinată prin versorul

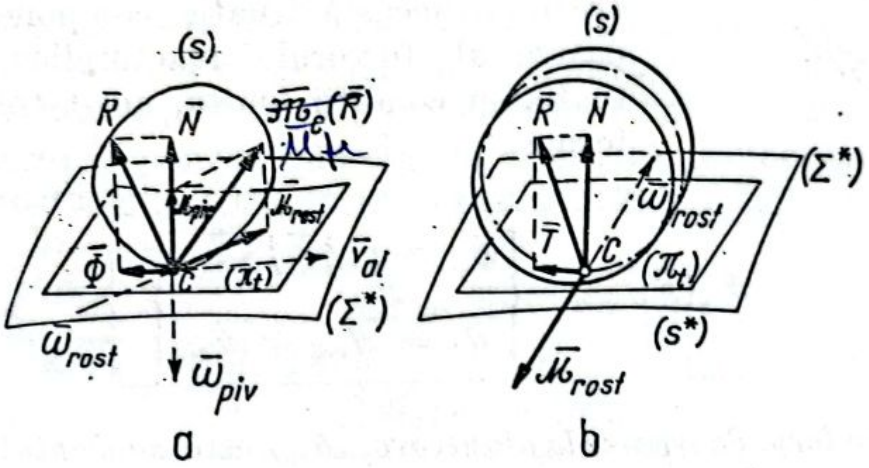


Fig. 6.39.

$\bar{n}(\alpha_{nx}, \alpha_{ny}, \alpha_{nz}) = \bar{n}(\alpha'_{nx}, \alpha'_{ny}, \alpha'_{nz}) - \alpha_{nx}, \alpha_{ny}$ şi α_{nz} fiind cosinusurile lui directoare în raport cu reperul fix, iar α'_{nx}, α'_{ny} şi α'_{nz} cosinusurile sale directoare în raport cu reperul legat de rigid —, se va folosi pentru reacţiunea normală una din expresiile

$$\boxed{\bar{N} = N\bar{n} = N(\alpha_{nx}\bar{i} + \alpha_{ny}\bar{j} + \alpha_{nz}\bar{k}) = N(\alpha'_{nx}\bar{i}' + \alpha'_{ny}\bar{j}' + \alpha'_{nz}\bar{k}')}. \quad (6.252)$$

Se va putea scrie deci

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_c(\bar{R}_{id}) = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{id} = \bar{N} \\ \overline{\mathcal{M}}_c(\bar{R}_{id}) = 0 \end{Bmatrix}}. \quad (6.253)$$

În legătură cu direcţia reacţiunii normale se menţionează faptul că pot fi întîlnite şi situaţii cînd pe una din suprafeţele în contact

Scanned with CamScanner

punctul teoretic de legătură este un punct singular (vîrf, colţ) — de exemplu, punctul A de suprafaţa barei (S) şi punctul B de pe suprafaţa de sprijin (Σ^*) în cazul corpului rezemat din fig. 6.40; în aceste situaţii, luarea în consderaţie a principiului acţiunii şi reacţiunii conduce la concluzia că reacţiunea normală are direcţia normalei la suprafaţa care admite o normală determinată (fig. 6.40).

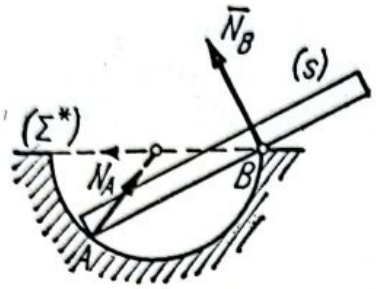


Fig. 6.40.

În ceea ce priveşte torsorul componentelor disipative ale reacţiunilor, vor trebui examinate următoarele două situaţii:

Cazul rigidului cu mişcare relativă efectuată atît prin rotaţie, cît şi prin alunecare. În această situaţie, componentele disipative ale torsorului reacţiunilor se găsesc, toate, în condiţii limită, acest torsor avînd forma

$$\boxed{\bar{\mathcal{T}}_C(\bar{F}_{fr\,lim}) = \begin{Bmatrix} \bar{\Phi} = \mu|\bar{N}|\bar{\imath}_0 \\ \bar{\mathcal{M}}_{fr} = \bar{\mathcal{M}}_{rost} + \bar{\mathcal{M}}_{piv} \end{Bmatrix}}, \qquad (6.254)$$

unde $\bar{\Phi}$ este *forţa de frecare la alunecare*, $\bar{\mathcal{M}}_{rost}$ este *momentul de frecare la rostogolire*, iar $\bar{\mathcal{M}}_{piv}$ este *momentul de fercare la pivotare*; orientările acestor componente sînt indicate în fig. 6. 39 a, iar modulii lor satisfac următoarele *legi de frecare*:

$$|\Phi| = \mu|\bar{N}|: \qquad |\bar{\mathcal{M}}_{rost}| = \sigma|\bar{N}|; \qquad |\bar{\mathcal{M}}_{piv}| = \nu|\bar{N}|, \qquad (6.255)$$

— prima fiind cunoscută sub numele de *legea lui Amonton-Coulomb*-, factorii de proporţionalitate μ, $\sigma(m)$ şi $\nu(m)$ — primul un număr abstract, iar ultimii cu dimensiuni fizice de lungimi — numindu-se, respectiv, *coeficient de frecare la alunecare*, *coeficient de frecare la rostogolire* şi *coeficient de frecare la pivotare*. Toţi aceşti coeficienţi depind, pentru un domeniu determinat de variaţie a solicitărilor active, numai de natura şi de modul de prelucrare a suprafeţelor în contact şi sînt determinaţi experimental.

Din fig. 6.39 a rezultă următoarele expresii vectoriale ale componentelor torsorului reacţiunilor disipative

$$\boxed{\bar{\Phi} = -\mu|\bar{N}|\bar{\imath}_{al}; \quad \bar{\mathcal{M}}_{rost} = -\sigma|\bar{N}|\bar{\imath}_{rost}; \quad \bar{\mathcal{M}}_{piv} = -\nu|\bar{N}|\bar{\imath}_{piv}}, \qquad (6.256)$$

Scanned with CamScanner

unde $\bar{i}_{al}$ = vers $\bar{v}_{al}$, $\bar{i}_{rost}$ = vers $\bar{\omega}_{rost}$ și $\bar{i}_{piv}$ = vers $\bar{\omega}_{piv}$ sînt versorii parametrilor cinematici ai celor trei mișcări relative simple.

Cazul rigidului cu mișcarea relativă o rostogolire pură. În aceasta de a doua situație, componenta disipativă a reacțiunii rezultante a rezemului nu atinge valoarea limită și nu i se cunoaște nici modulul și, în general, nici sensul, ci numai direcția, aceea a normalei la vectorul $\bar{\omega}_{rost}$, în planul tangent comun celor două suprafețe în contact în punctul C; din acest motiv ea este numită *reacțiune tangențială*, fiind notată cu simbolul $\bar{T}$ și în aplicațiile concrete i se atribuie un sens arbitrar, urmînd ca sensul real al ei să i se stabilească după determinarea, din ecuațiile de mișcare, a valorii scalare a ei, raportate la versorul ales pentru direcția ei.

În ceea ce privește componenta disipativă a momentului reacțiunilor, ea se va reduce numai la momentul de frecare la rostogolire, determinat prin cea de-a doua dintre relațiile (6. 256).

Torsorul în punctul teoretic de rezemare al reacțiunilor rezemului cu rostogolire pură va avea deci forma

$$\boxed{\bar{\mathscr{T}}_C(\bar{R}) = \begin{Bmatrix} \bar{R} = \bar{N} + \bar{T} \\ \bar{\mathfrak{M}}_C(\bar{R}) = \bar{\mathscr{M}}_{rost} \end{Bmatrix}}, \tag{6.257}$$

cu reacțiunea tangențială trebuind să satisfacă condiția

$$|\bar{T}| \leqslant |\bar{\Phi}| = \mu |\bar{N}|, \tag{6.258}$$

necesară pentru a se produce rostogolirea pură.

În cazul reazemului cu frecare neglijabilă, torsorul reacțiunilor va avea forma

$$\bar{\mathscr{T}}_C(\bar{R}) = \begin{Bmatrix} \bar{R} = \bar{N} \\ \bar{\mathfrak{M}}_C(\bar{R}) = 0 \end{Bmatrix} \tag{6.259}$$

dacă deplasarea relativă se face cu alunecare și forma

$$\bar{\mathscr{T}}_C(\bar{R}) = \begin{Bmatrix} \bar{R} = \bar{N} + \bar{T} \\ \bar{\mathfrak{M}}_C(\bar{R}) = 0 \end{Bmatrix} \tag{6.260}$$

dacă deplasarea relativă este o rostogolire pură.

Scanned with CamScanner

(2) Articulaţia

Legătura unui rigid (S) cu un corp (S^*) din mediul înconjurător este numită *articulaţie* atunci cînd un anumit punct al rigidului (S) este menţinut în permanenţă în contact, prin mijloace tehnice adecvate, cu un punct C^*, determinat, al corpului (S^*). În această

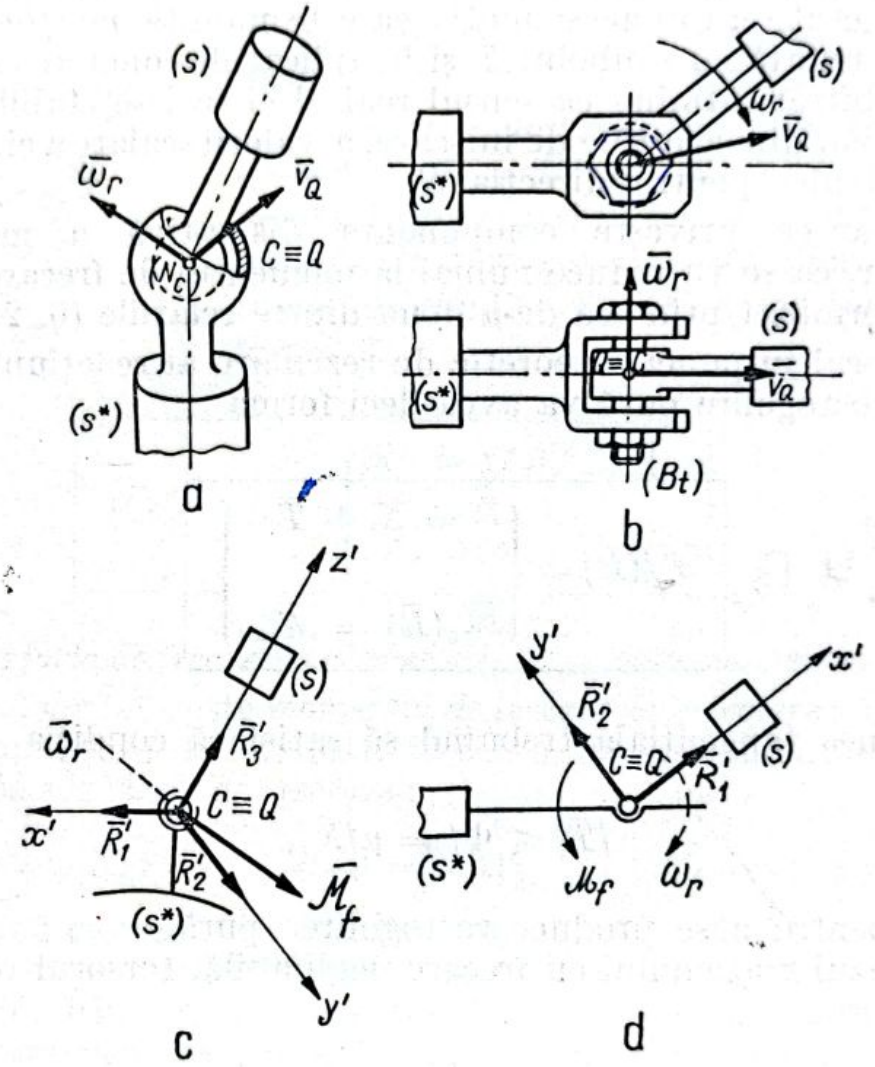


Fig. 6.41.

situaţie, rigidul (S) poate executa, în funcţie de procedeul folosit pentru imobilizarea punctului C în corpul (S^*), fie o rotaţie instantanee relativă în jurul polului C — ca în cazul legăturii realizate prin ansamblul *nucă — articulaţie sferică* din fig. 6.41 a — , fie o rotaţie relativă în jurul unei axe fixe în corpul (S^*) — ca în cazul legăturii realizate prin ansamblul *bolţ — articulaţie cilindrică* din fig. 6.41 b; în primul caz, *punctul teoretic de articulaţie* este centrul C al nucii

Scanned with CamScanner

(Nc), iar în al doilea caz punctul C de pe axa bolțului ($Bț$), situat la intersecția acestei axe cu planul normal la axă și conținînd centrul de masă al rigidului (S).

Dacă corpul (S^*) se deplasează în spațiu, sau zona, în care este aplicată articulația, din suprafața lui se deformează în timp, legătura este numită *articulație nestaționară*; în cazul cînd corpul (S^*) este fix în spațiu și nedeformabil în timp, legătura este numită *articulație staționară*.

În cazul acestui tip de legătură torsorul componentelor ideale ale reacțiunilor se reduce la o reacțiune rezultantă $\bar{R}$, numită *reacțiunea articulației*, de mărime și orientare necunoscută, descompusă obișnuit în componente ortogonale — trei în cazul articulației spațiale (fig. 6.41 c) și două în cazul articulației plane (fig. 6.41, a,) — , orientate după axele legate de rigid în problemele de dinamică și după axele reperului fix în problemele de statică; sensurile acestor componente se iau arbitrar, sensurile lor reale stabilindu-se după determinarea, din ecuațiile de mișcare, a valorilor scalare ale acestor componente raportate la versorii axelor după care au fost orientate.

Torsorul, în punctul teoretic de articulație, al reacțiunilor ideale ale articulației va avea deci forma

$$\bar{\mathcal{T}}_C(\bar{R}_{id}) = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{id} = \bar{R} \\ \bar{\mathfrak{M}}_C(\bar{R}_{id}) = 0 \end{Bmatrix}. \tag{6.261}$$

În ceea ce privește torsorul componentelor disipative ale reacțiunilor, el se reduce numai la un *moment de frecare în articulație*, notat cu simbolul $\bar{\mathcal{M}}_f$ și satisfăcînd următoarea lege de frecare.

$$|\bar{\mathcal{M}}_f| = \mu' r_b |\bar{R}|, \tag{6.262}$$

μ' fiind *coeficientul de frecare în articulație*, depinzînd de natura corpurilor în contact și de modul de ungere cu lubrefianți și determinat experimental, iar r_b fiind raza nucii în cazul articulației spațiale, respectiv raza bolțului în cazul articulației plane; sensul momentului de frecare în articulație este totdeauna contrar sensului vitezei unghiulare relative, (fig. 6.41):

$$\bar{\omega}_r = \bar{\omega} - \bar{\omega}^*, \tag{6.263}$$

Scanned with CamScanner

putîndu-se scrie deci următoarea expresie vectorială a acestui moment disipativ :

$$\boxed{\overline{\mathcal{M}}_f = -\mu' r_b |\bar{R}| \bar{i}_{\omega_r}} \tag{6.264}$$

şi deci următoarea formă a torsorului componentelor disipative ale reacţiunilor articulaţiei :

$$\overline{\mathcal{T}}_C(\bar{F}_{fr_{lim}}) = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{fr} = 0 \\ \overline{\mathcal{M}}_{fr} = \overline{\mathcal{M}}_f \end{Bmatrix}. \tag{6.265}$$

Torsorul, în punctul teoretic de articulaţie, al reacţiunilor articulaţiei va avea în consecinţă forma

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_C(\bar{R}) = \begin{Bmatrix} \bar{R} \\ \overline{\mathfrak{M}}_C(\bar{R}) = \overline{\mathcal{M}}_f \end{Bmatrix}}, \tag{6.266}$$

cu

$$\bar{R} = \bar{R}'_1 + \bar{R}'_2 + \bar{R}'_3 = R'_x \bar{i}' + R'_y \bar{j}' + R'_z \bar{k}' \tag{6.267}$$

în cazul articulaţiei spaţiale şi cu

$$\bar{R} = \bar{R}'_1 + \bar{R}'_2 = R'_x \bar{i}' + R'_y \bar{j}' \tag{6.268}$$

în cazul articulaţiei plane, acest torsor reducînduse la torsorul (6.261), dacă legătura este o *articulaţie cu frecare neglijabilă.*

Legătura prin fir, sau tijă rigidă.

Interacţiunea unui rigid (S) cu un corp (S^*) din mediul înconjurător este numită *legătură prin fir* atunci cînd extremităţile unui fir — sfoară, otgon, cablu, curea, lanţ etc. — sînt în contact cu cîte un punct al fiecăruia din cele două corpuri, contact care face ca firul să ia forma întinsă, fără a fi alungit.

Distanţa $\overline{CC^*}$ dintre punctele C şi C^* de contact cu cele două corpuri poate fi constantă — ca în cazul firului cu extremităţile fixate la cele două corpuri (fig. 6.42 a), sau al firului trecut peste rolele (S) şi (S^*) cu axe de rotaţie fixe, (fig. 6.42, b) — sau poate fi variabilă, ca în cazul firului înfăşurat pe discurile (S) şi (S^*) , (fig. 6.42, c) — , variaţia lungimii lui rezultînd din înfăşurarea, sau desfăşurarea firului.

Scanned with CamScanner

Dacă corpul (S^*) se află în mişcare, sau suprafaţa pe care se înfăşoară, respectiv se desfăşoară, firul este deformabilă în timp, legătura prin fir este numită *nestaţionară*; în cazul cînd corpul (S^*) este fix şi suprafaţa lui pe care se află firul este nedeformabilă, legătura prin fir este numită *staţionară*.

Datorită zonei de contact foarte mici în cazul acestui tip de legătură, torsorul reacţiunilor ideale ale legăturii se reduce la o rezultantă unică, numită *reacţiunea firului* şi uneori, impropriu, *tensiunea firului*, notată cu simbolul $\bar{T}$, orientată în lungul firului şi cu sensul de la punctul C spre exterior, (fig. 6.42), iar torsorul componentelor disipative, poate fi complet neglijat; se va putea scrie deci:

$$\boxed{\mathcal{T}_C(\bar{R}) = \begin{Bmatrix} \bar{R} = \bar{T} \\ \mathfrak{M}_C(\bar{R}) = 0 \end{Bmatrix}}, \tag{6.269}$$

cu

$$\bar{T} = |\bar{T}| i_{CC^*}, \tag{6.270}$$

unde i_{CC^*} este versorul vectorului $\overrightarrow{CC^*}$, iar modulul reacţiunii firului este o necunoscută a problemei de dinamica rigidului supus la o asemenea legătură.

În unele cazuri, locul firului cu extremităţile legate de corpurile (S) şi (S^*) îl poate lua o tijă subţire, cu extremităţile fixate de cele

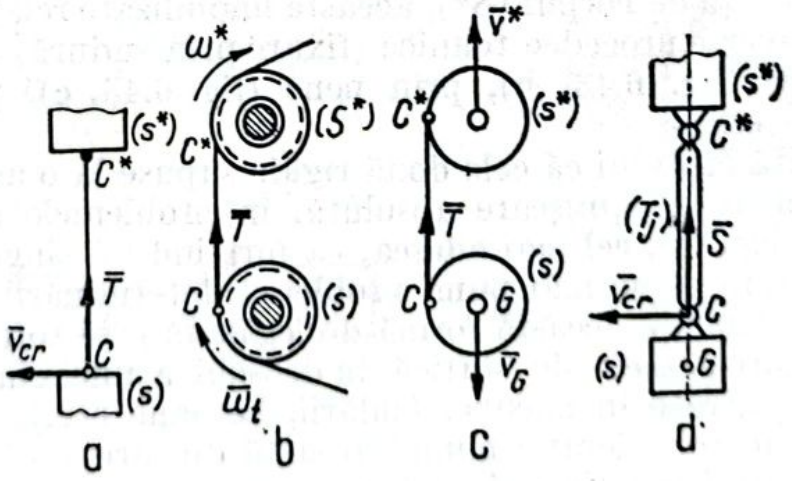


Fig. 6.42.

două corpuri prin articulaţii foarte mici şi cu frecare neglijabilă (fig. 42 d). În aceste condiţii, torsorul reacţiunilor în punctul de legătură C se va reduce tot la o rezultantă unică, numită *reacţiunea tijei* şi

Scanned with CamScanner

impropriu *efortul în tijă*, notată cu simbolul $\bar{S}$, avînd direcţia axei tijei şi cu modulul urmînd a fi determinat din ecuaţiile de mişcare; spre deosebire însă de situaţia de la legătura prin fir, unde sensul reacţiunii firului este precis determinat, prin faptul că legătura prin fir este în acţiune numai atunci cînd firul este tensionat, în cazul legăturii prin tijă rigidă sensul reacţiunii tijei nu poate fi stabilit dinainte decît în cazuri cu totul particulare, ca urmare a faptului că această legătură poate fi în acţiune şi atunci cînd tija este tensionată, dar şi cînd este comprimată.

În cazul legăturii prin tijă rigidă torsorul în punctul teoretic de legătură al reacţiunilor tijei va avea forma

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_C(\bar{R}) = \begin{Bmatrix} \bar{R} = \bar{S} \\ \overline{\mathcal{M}}_C(\bar{R}) = 0 \end{Bmatrix}}, \tag{6.271}$$

cu

$$\bar{S} = S\bar{i}_{CC^*}, \tag{6.272}$$

S fiind valoarea scalară a reacţiunii tijei, raportată la versorul vectorului $\overrightarrow{CC^*}$.

(4) *Încastrarea*

Se spune că un rigid (S) este *încastrat* într-un corp (S^*) atunci cînd este astfel fixat de acesta încît nu i se mai permite nici o deplasare relativă faţă de corpul (S^*), această imobilizare relativă realizîndu-se prin diverse procedee tehnice (fixare prin sudură) (fig. 6.43, a), prin şuruburi (fig. 6.43, b), prin pene (fig. 6.43, c), prin presare (fig. 6.43, d) etc.

Datorită faptului că cele două rigide supuse la o astfel de legătură execută aceeaşi mişcare absolută, în problemele de dinamică ele sînt considerate, cel mai adesea, ca formînd un singur bloc rigid în mişcare, fără să se mai pună problema determinării reacţiunilor legăturii; în schimb, această formă de legătură este totdeauna luată în seamă în problemele de statică, în deosebi atunci cînd este vorba de grinzi încastrate în masive, (zidării, betoane etc.), (fig. 6.44, a şi b). Luînd în consideraţie numai această din urmă situaţie şi precizînd că *punctul teoretic de încastrare* este reprezentat prin punctul de intersecţie a axei grinzii cu suprafaţa ce limitează masivul în zona de legătură, se va face observaţia că neputînd fi cunoscută distribuţia forţelor elementare de reacţiune din zonele de contact ale grinzii cu masivul, torsorul în punctul teoretic de încastrare al acestor reac-

Scanned with CamScanner

țiuni va avea ambele componente — *reacțiunea rezultantă a încastrării* $\bar{R}$ și *momentul rezultant al reacțiunilor încatrării* $\bar{\mathcal{M}}_i$, necunoscute, atît ca mărime, cît și ca orientare, rezultînd de aici necesitatea descompunerii lor în componente ortogonale și anume :

— Cîte trei componente triortogonale pentru fiecare din vectorii $\bar{R}$ și $\bar{\mathcal{M}}_i$ — obișnuit două orizontale și una verticală, (fig. 6.44 a) — adică

$$\begin{cases} \bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 = \bar{H} + \bar{T} + \bar{V} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k}; \\ \bar{\mathcal{M}}_i = \bar{\mathcal{M}}_{i_1} + \bar{\mathcal{M}}_{i_2} + \bar{\mathcal{M}}_{i_3} = \mathcal{M}_{i_x}\bar{i} + \mathcal{M}_{i_y}\bar{j} + \mathcal{M}_{i_z}\bar{k}, \end{cases} \quad (6.273)$$

în cazul *încastrărilor spațiale* (cazul încastrărilor în care grinzile sînt supuse la solicitări active cu orientări oarecari în spațiu), mărimile R_x, R_y, R_z, $\mathcal{M}_{i_x}$, $\mathcal{M}_{i_y}$, și $\mathcal{M}_{i_z}$ reprezentînd necunoscute ale problemei care vor fi determinate din ecuațiile de echilibru ;

— Cîte două componente ortogonale pentru reacțiunea rezultantă $\bar{R}$ — obișnuit, una orizontală și cealaltă verticală (fig. 6.44, b)

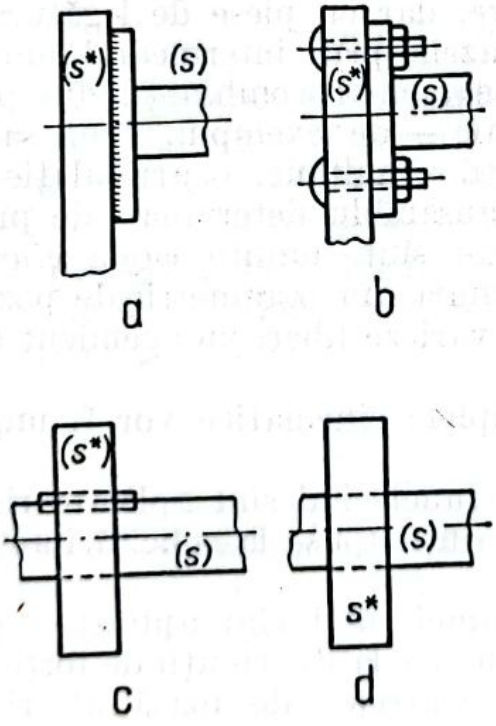


Fig. 6.43.

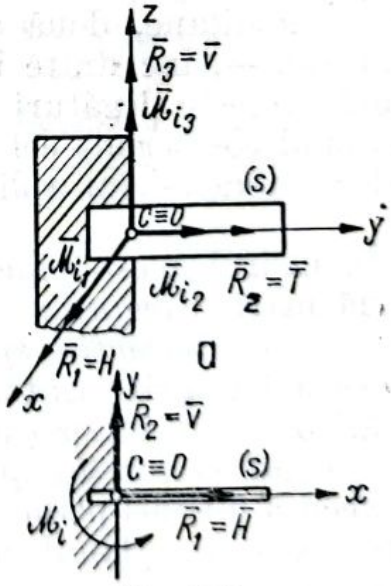


Fig. 6.44.

— în cazul *încastrărilor plane* (încastrările în care solicitările active aplicate grinzii corespund unor distribuții de forțe situate într-un plan ce conține axa grinzii și în care se vor afla, evident și distribu-

Scanned with CamScanner

țiile forțelor elementare de reacțiune din zonele de contact), momentul rezultant al reacțiunilor încastrării avînd în acest caz direcția normală la planul distribuțiilor de forțe, ales ca plan de coordonate Oxy, rezultînd deci:

$$\begin{cases} \bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 = \bar{H} + \bar{V} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j}; \\ \bar{\mathcal{M}}_t = \mathcal{M}_t \cdot \bar{k}, \end{cases} \tag{6.274}$$

R_x, R_y și $\mathcal{M}_t$ fiind și acum necunoscute ale problemei de statică, ce vor fi determinate din ecuațiile de echilibru.

Torsorul rezultant în punctul teoretic de încastrare va avea deci forma

$$\boxed{\mathcal{T}_C(\bar{R}) = \left\{\begin{matrix} \bar{R} \\ \bar{\mathcal{M}}_i \end{matrix}\right\}}, \tag{6.275}$$

cu componentele avînd, după caz, expresiile (6.273), sau (6.274).

2 *Cuple cinematice.* În practica inginerească sînt utilizate curent fie tipuri simple de legături pasive, dar cu piese de legătură de o formă specială — de exemplu, reazem prin intermediul unui disc circular etc. —, fie, cel mai adesea, chiar combinații din primele trei tipuri de legături fundamentale — de exemplu, două sau trei reazeme simultane, două articulații simultane, o articulație și un reazem etc. —, încadrate într-un ansamblu determinat de piese de legătură. Aceste legături complexe sînt numite *cuple cinematice* atunci cînd ele permit cel puțin unuia din parametrii de poziție ai rigidelor cărora le sînt aplicate să varieze liber, independent de ceilalți.

În cadrul acestei lucrări, cuplele cinematice vor fi împărțite în două mari categorii:

— *cuple cinematice spațiale*, atunci cînd sînt aplicate rigidelor care execută mișcări spațiale, sau sînt supuse la solicitări active cu orientări oarecare în spațiu;

— *cuple cinematice plane*, atunci cînd sînt aplicate rigidelor care execută mișcări plane și sînt supuse la distribuții de forțe active situate toate în planul mișcării centrelor de masă ale rigidelor respective.

Fiecare cuplă cinematică introduce un număr total de k ecuații de legătură între parametrii de poziție ai rigidului căruia îi este aplicată, acest număr, care determină *clasa cuplei*, depinzînd de următorii doi factori:

Scanned with CamScanner

— pe de o parte, de tipurile de legături fundamentale care intră în componența cuplei, fiecare din aceste tipuri impunînd un număr de 1 pînă la 3 restricții parametrilor de poziție;

— pe de altă parte, de funcționalitatea cuplei, o aceeași cuplă putînd introduce, în condiții diferite de funcționare, un număr diferit de ecuații de legătură (de exemplu, o cuplă de translație rectilinie introduce 5 ecuații de legătură dacă rigidul căruia îi este aplicată este solicitat spațial și numai două ecuații de legătură dacă solicitările aplicate lui corespund unor distribuții plane de forțe).

Avînd în vedere observația făcută cu prilejul definirii noțiunii de cuplă cinematică, privind existența cel puțin a unui parametru de poziție care să varieze liber, independent de ceilalți, rezultă că sînt posibile următoarele clase de cuple cinematice:

— un număr de 5 clase de cuple cinematice spațiale, o asemenea cuplă de clasa k, notată C_{S_k}, introducînd deci un număr de k ecuații de legătură reprezentînd particularizări ale ecuațiilor generale

$$f_\lambda(x_Q,\ y_Q,\ z_Q,\ \psi,\ \varphi,\ \theta;\ t) = 0, \qquad (6.276)$$
$$(\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ k; \quad k \leqslant 5)$$

particularizări depinzînd de modul de alegere a celor două repere, fix și invariabil legat de rigid;

— un număr de 2 clase de cuple cinematice plane, o astfel de cuplă de clasa k, notată C_{P_k}, introducînd k ecuații de legătură care, prin alegerea planului în care se deplasează polul Q legat de rigid ca plan de coordonate Oxy, vor reprezenta particularizări ale ecuațiilor generale

$$f_\lambda(x_Q,\ y_Q,\ \varphi;\ t) = 0, \qquad (6.277)$$
$$(\lambda = 1, \ldots, k; \quad k \leqslant 2)$$

aceste particularizări depinzînd și aici de modul de alegere a celor două repere plane, fix și invariabil legat de rigid.

Dacă la ecuațiile precedente se adaugă condițiile

$$f_{k+1}(z_Q) = z_Q \equiv 0; \quad f_{k+2}(\psi) = \psi \equiv 0; \quad f_{k+3}(\theta) = \theta \equiv 0, \qquad (6.278)$$

impuse prin modul de funcționare a cuplei plane, se înțelege că orice cuplă cinematică plană de clasa k va putea fi considerată ca o cuplă spațială de clasa $k + 3$, adică

$$C_{P_k} \equiv C_{S_{k+3}}, \quad (k = 1,\ 2) \qquad (6.279)$$

Scanned with CamScanner

şi deci s-ar putea vorbi de o singură categorie de cuple; dată fiind însă frecvenţa cu care sînt întîlnite în aplicaţiile tehnice cuplele plane şi, mai ales, simplificările apreciabile pe care le aduce în rezolvarea problemelor considerarea lor ca atare, în lucrarea de faţă va fi menţinută clasificarea precedentă, în cuple cinematice spaţiale şi cuple cinematice plane.

O cuplă cinematică are totdeauna un *punct teoretic de cuplare*, notat peste tot cu C şi care coincide, obişnuit, cu unul din punctele teoretice de legătură ale legăturilor fundamentale ce compun cupla; alegerea acestui punct ca pol Q invariabil legat de rigid, ($Q \equiv C$), permite simplificarea substanţială a formei ecuaţiilor de legătură.

Fiecare cuplă cinematică aplicată unui rigid va exercita asupra acestuia o distribuţie de reacţiuni elementare, rezultînd din însumarea distribuţiilor de reacţiuni corespunzătoare legăturilor fundamentale componente şi care se vor reduce, în punctul teoretic de cuplare, la un *torsor al reacţiunilor cuplei*, în general de forma

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_C(\bar{R}) = \left\{ \begin{matrix} \bar{R} \\ \overline{\mathfrak{M}}_C(\bar{R}) \end{matrix} \right\}}, \qquad (6.280)$$

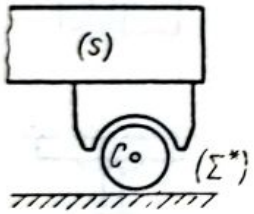
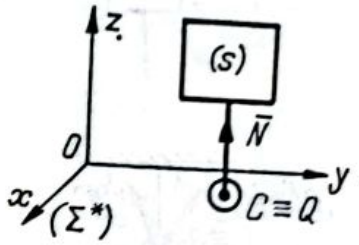
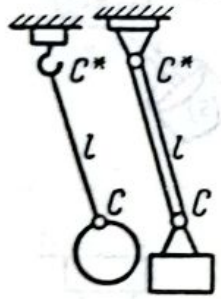
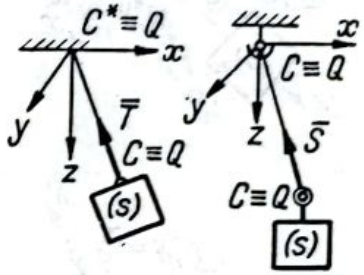
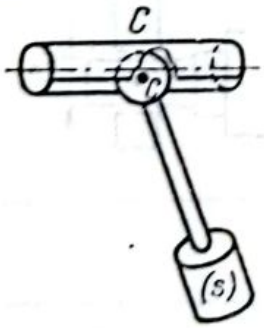
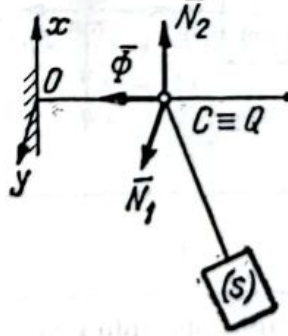
cu componente ideale şi componente disipative; torsorul componentelor ideale conţine un număr de r elemente scalare necunoscute — de regulă, moduli sau valori scalare ale componentelor unor reacţiuni rezultante sau momente rezultante ale reacţiunilor —, acest număr r fiind egal, pentru cele mai multe din cuplele cinematice, cu numărul k al ecuaţiilor de legătură pe care le introduce cupla respectivă, deci cu clasa cuplei.

În tabelele din paginile următoare sînt prezentate cîteva din cele mai frecvente tipuri de cuple cinematice spaţiale şi plane, întîlnite curent în aplicaţiile tehnice, majoritatea dintre ele fiind considerate staţionare, adică corespunzătoare cazului cînd corpul (S^*), cu care este cuplat rigidul, este fix în spaţiu şi indeformabil în timp; pentru fiecare din aceste cuple se precizează denumirea ei, reprezentarea reală şi schematică, clasa ei, forma particulară a ecuaţiilor de legătură, componentele torsorului reacţiunilor, elementele necunoscute ale torsorului reacţiunilor şi legile de frecare prin care se determină componentele disipative ale torsorului reacţiunilor.

Se înţelege că unui rigid îi vor putea fi aplicate simultan două cuple de clase diferite (de exemplu, o cuplă fus-lagăr pivot şi o cuplă fus-lagăr cilindric, sau o cuplă bolţ-articulaţie cilindrică şi o cuplă

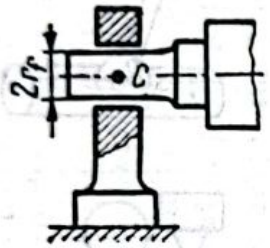
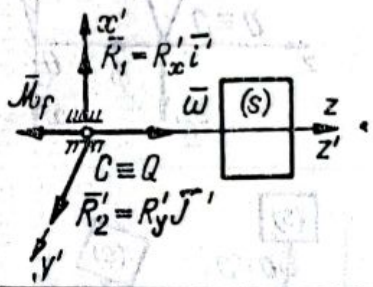
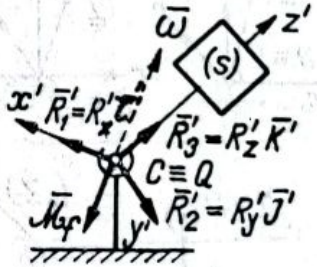
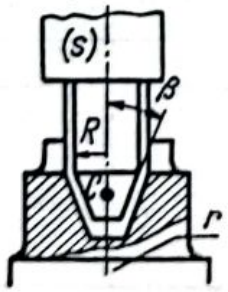
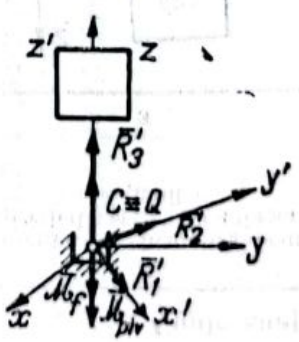
Scanned with CamScanner

I. Cuple spaţiale

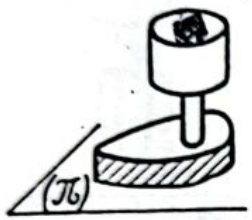
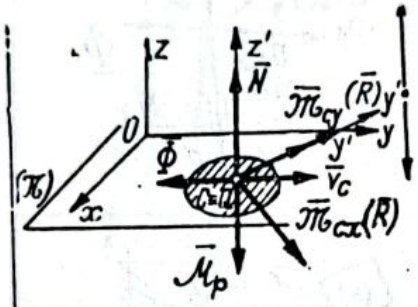
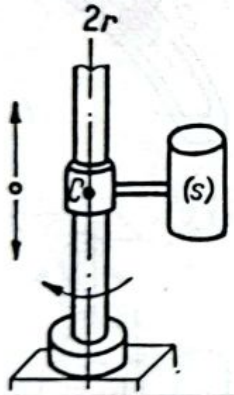
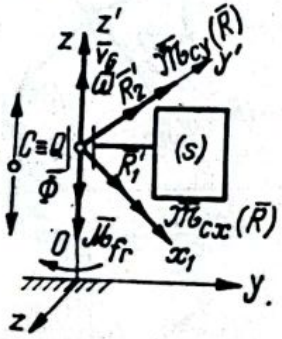
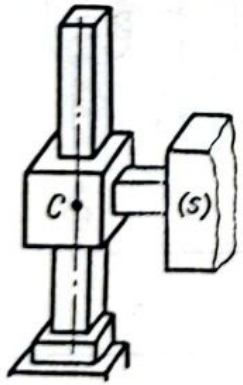
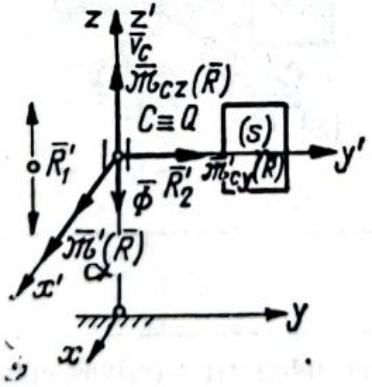
Nr. crt.	Denumirea cuplei	Schiţa cuplei	Reprezentarea schematică a cuplei, cu reperele(R) şi (R'') şi a torsorului reacţiunilor	Date privind legăturile introduse		Date privind torsorul reacţiunilor		
				Clasa cupl. k	Ecuaţiile de legătură	Nr. reac. nec. r	Reacţ. nec.	Legi de frecare (relaţii între componente)
0	1	2	3	4	5	6	7	8
1.	Cupla sferă (mică) — plan de sprijin			1	$f_1(z_Q) = z_Q \equiv 0$	1	$\lvert\bar{N}\rvert$	—
2.	Cupla prin fir sau tijă rigidă			1	$f_1(x_Q, y_Q, z_Q) = x_Q^2 + y_Q^2 + z_Q^2 - l^2 = 0$	1	$\lvert\bar{T}\rvert$ (S)	—
3.	Cupla sferă (mică) — uluc de sprijin			2	$f_1(x_Q) = x_Q \equiv 0$ $f_2(y_Q) = y_Q \equiv 0$	2	$N_1 = N_x$ $N_2 = N_y$	$\lvert\bar{\Phi}\rvert = \mu\sqrt{N_x^2 + N_y^2}$

Scanned with CamScanner

I. Cuple spațiale (continuare)

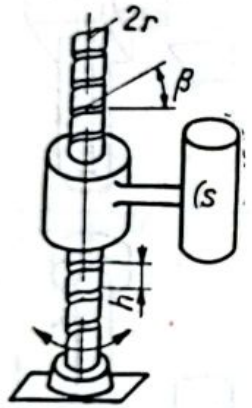
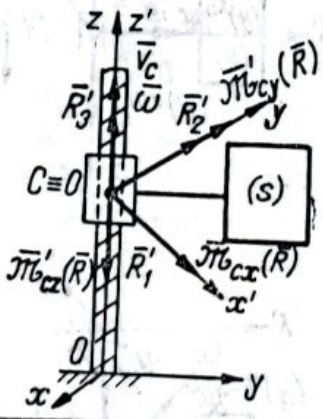
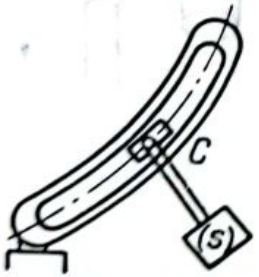
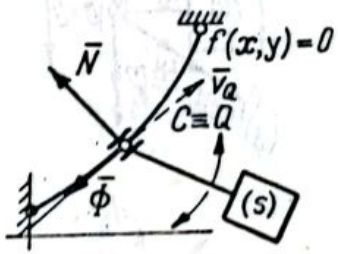
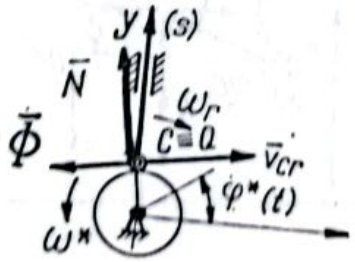
	1	2	3	4	5	6	7	8
4	Cupla fus-lagăr cilindric			2	$f_1(x_Q) = x_Q \equiv 0$ $f_2(y_Q) = y_Q \equiv 0$	2	$R'_1 = R'_x$ $R'_2 = R'_y$	$\lvert\bar{M}_f\rvert =$ $= \mu' r_f \sqrt{R'^2_x + R'^2_y}$
5	Cupla nucă-articulație sferică			3	$f_1(x_Q) = x_Q \equiv 0$ $f_2(y_Q) = y_Q \equiv 0$ $f_3(z_Q) = z_Q \equiv 0$	3	$R'_1 = R'_x$ $R'_2 = R'_y$ $R'_3 = R'_z$	$\lvert\bar{M}_f\rvert = \mu' r_n \times$ $\times \sqrt{R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z}$
6.	Cupla fus-lagăr pivot			3	$f_1(x_Q) = x_Q \equiv 0$ $f_2(y_Q) = y_Q \equiv 0$ $f_3(z_Q) = z_Q \equiv 0$	3	$R'_1 = R'_x$ $R'_2 = R'_y$ $R'_3 = R'_z$	$\lvert\bar{M}_f\rvert = \mu' R \times$ $\times \sqrt{R'^2_x + R'^2_y}$ $\lvert\bar{M}_{piv}\rvert = \nu \lvert R'_z \rvert$ $\nu = \frac{2}{3} \frac{\mu}{\sin\beta} \times$ $\times \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$

Scanned with CamScanner

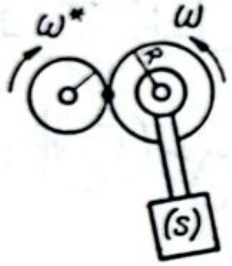
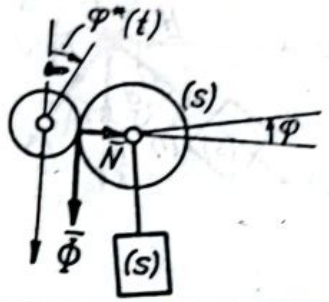
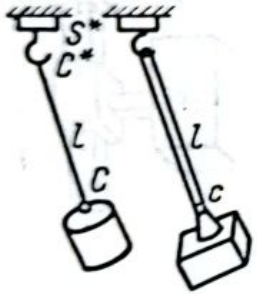
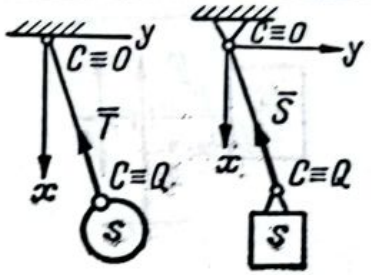
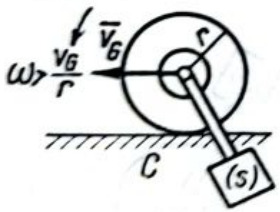
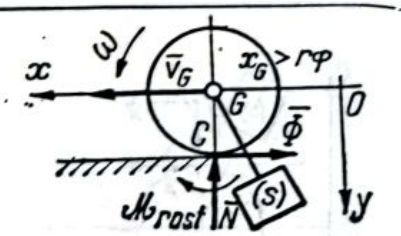
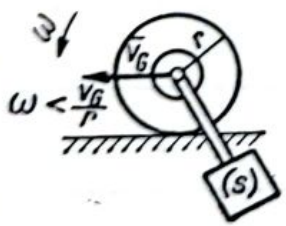
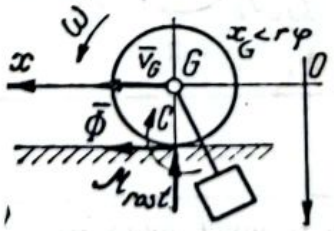
7.	Cupla placă — plan de sprijin			3	$f_1(z_Q) = z_Q \equiv 0$ $f_2(\psi) = \psi \equiv 0$ $f_3(\theta) = \theta \equiv 0$	3	$\lvert\bar{N}\rvert$ $\mathfrak{M}'_{C_x}(\bar{R})$ $\mathfrak{M}'_{C_y}(\bar{R})$	$\lvert\bar{\Phi}\rvert = \mu\lvert\bar{N}\rvert$ $\lvert\bar{\mathcal{M}}_{piv}\rvert = \nu\lvert\bar{N}\rvert$
8.	Cupla elicoidală (bucşă-tijă cilindrică de ghidare)			4	$f_1(x_Q) = x_Q \equiv 0$ $f_2(y_Q) = y_Q \equiv 0$ $f_3(\psi) = \psi \equiv 0$ $f_4(\theta) = \theta \equiv 0$	4	$R'_1 = R'_x$ $R'_2 = R'_y$ $\mathfrak{M}'_{C_x}(\bar{R})$ $\mathfrak{M}'_{C_y}(\bar{R})$	$\lvert\bar{\Phi}\rvert = \mu\sqrt{R'^2_x + R'^2_y}$ $\lvert\bar{\mathcal{M}}_{fr}\rvert =$ $= \mu' r\sqrt{R'^2_x + R'^2_y}$
9.	Cupla (spaţială) de translaţie rectilinie			5	$f_1(x_Q) = x_Q \equiv 0$ $f_2(y_Q) = y_Q \equiv 0$ $f_3(\psi) = \psi \equiv 0$ $f_4(\varphi) = \varphi \equiv 0$ $f_5(\theta) = \theta \equiv 0$	5	$R'_1 = R'_x$ $R'_2 = R'_y$ $\mathfrak{M}'_{C_x}(\bar{R})$ $\mathfrak{M}'_{C_y}(\bar{R})$ $\mathfrak{M}'_{C_z}(R)$	$\lvert\bar{\Phi}\rvert = \mu\sqrt{R'^2_x + R'^2_y}$

Scanned with CamScanner

I. Cuple spaţiale. II. Cuple plane. (continuare)

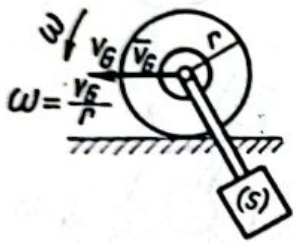
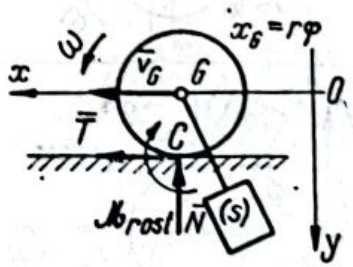
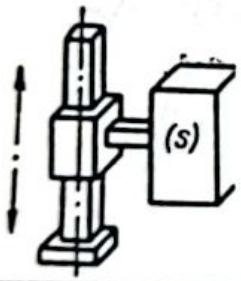
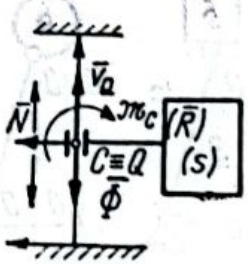
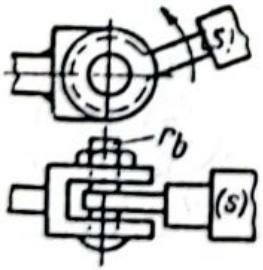
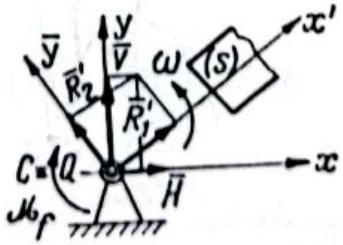
0	1	2	3	4	5	6	7	8
10.	Cupla şurub — bucşă filetată			5	$f_1(x_Q) = x_Q \equiv 0$ $f_2(y_Q) = y_Q \equiv 0$ $f_3(\psi) = \psi \equiv 0$ $f_4(0) = 0 \equiv 0$ $f_5(z_Q, \varphi) = z_Q \pm \frac{h}{2\pi}\varphi = 0$	5	$R'_1 = R'_x$ $R'_2 = R'_y$ $R'_3 = R'_z$ $\mathfrak{M}'_{Cx}(\bar{R})$ $\mathfrak{M}'_{Cy}(\bar{R})$	$\mathfrak{M}'_{Cz}(\bar{R})$ $= r\lvert R'_z\rvert \operatorname{tg}(\beta \pm \varphi_a)$
1.	Cupla culisă — piatră de culisă			1	$f_1(x_Q, y_Q) = 0$	1	N	$\lvert\bar{\Phi}\rvert = \mu\lvert\bar{N}\rvert$
2.	Cupla camă — tachet			1	$f_1(y_Q, \varphi^*(t)) = 0$	1	$\lvert\bar{N}\rvert$	$\lvert\bar{\Phi}\rvert = \mu\lvert\bar{N}\rvert$

Scanned with CamScanner

3.	Cupla roată de antrenare — roată condusă			1	$f_1(\varphi, \varphi^*(t)) = R\varphi + r\varphi^*(t) = 0$	1	$\lvert\bar{N}\rvert$	$\lvert\bar{\Phi}\rvert = \mu\lvert\bar{N}\rvert$
4.	Cupla (plană) prin fir, sau tijă rigidă			1	$f_1(x_Q, y_Q) = x_Q^2 + y_Q^2 - l^2 = 0$	1	$(\bar{T})$ (S)	—
5.	Cupla disc circular — plan de sprijin cu rostogol. + alunec.			1	$f_1(y_C) = y_C \equiv 0$	1	$\lvert\bar{N}\rvert$	$\lvert\bar{\Phi}\rvert = \mu\lvert\bar{N}\rvert$ $\lvert\bar{M}_{rost}\rvert = \sigma\lvert\bar{N}\rvert$
6.	Cupla disc circular. — plan de sprijin cu rostogolire și patinare			1	$f_1(y_C) = y_C \equiv 0$	1	$\lvert\bar{N}\rvert$	$\lvert\bar{\Phi}\rvert = \mu\lvert\bar{N}\rvert$ $\lvert\bar{M}_{rost}\rvert = \sigma\lvert\bar{N}\rvert$

Scanned with CamScanner

II. Cuple plane (continuare)

0	1	2	3	4	5	6	7	8
7.	Cupla disc circular — plan de sprijin, cu rostogolire pură			2	$f_1(y_G) = y_G \equiv 0$ $f_2(x_G, \varphi) = x_G - r\varphi = 0$	2	$\lvert\bar{N}\rvert$ T	$\lvert\bar{M}_{rost}\rvert = \sigma\lvert\bar{N}\rvert$
8.	Cupla (plană) de translaţie rectilinie			2	$f_1(y_Q) = y_Q \equiv 0$ $f_2(\varphi) = \varphi \equiv 0$	2	N $\mathcal{M}_C(R)$	$\lvert\bar{\Phi}\rvert = \mu\lvert\bar{N}\rvert$
9.	Cupla de rotaţie bolţ-articulaţie cilindrică			2	$f_1(x_Q) = x_Q \equiv 0$ $f_2(y_Q) = y_Q \equiv 0$	2	$R'_1 = R'_x$ $R'_2 = R'_y$ (H, V)	$\lvert\bar{M}_f\rvert = \mu' r_b \times$ $\times\sqrt{R'^2_x + R'^2_y}$

Scanned with CamScanner

prin tijă rigidă etc.); în acest caz numărul total de ecuaţii de legătură introduse de cuplele aplicate rigidului va fi dat de relaţia

$$L = \sum_k k n_k, \tag{6.281}$$

cu $L \leqslant 6$ în problemele spaţiale şi $L \leqslant 3$ în problemele plane, n_k fiind numărul de cuple de clasa k, iar egalităţile corespunzînd problemelor de statică.

Observaţii. Pentru majoritatea cuplelor cinematice prezentate în tabelele precedente componentele torsorilor, în punctele teoretice de cuplare, ale reacţiunilor cuplelor pot fi justificate pe baza concluziilor experimentale generale, menţionate la început; pentru unele tipuri de cuple sînt totuşi necesare explicaţii suplimentare, care vor fi date mai jos, privind prezenţa, sau orientarea unora din componentele torsorilor. Astfel:

1°. Reducerea torsorului reacţiunilor numai la reacţiunea normală $\bar{N}$ în cazul cuplei sferă — plan de sprijin este justificată de raza mică a sferei intermediare de cuplare, deci de contactul practic punctual, care permite neglijarea tuturor frecărilor şi a momentelor rezultante.

Acelaşi motiv justifică şi neglijarea momentelor rezultante în cazul cuplei sferă-uluc de sprijin.

2°. Încadrarea cuplei fus-lagăr cilindric în cuplele de clasa a doua se explică prin faptul că în absenţa unei alte legături aplicate rigidului, fusul poate aluneca în lungul axei sale şi să execute chiar, datorită jocului dintre fus şi lagăr, mici rotaţii instantanee în jurul centrului lagărului.

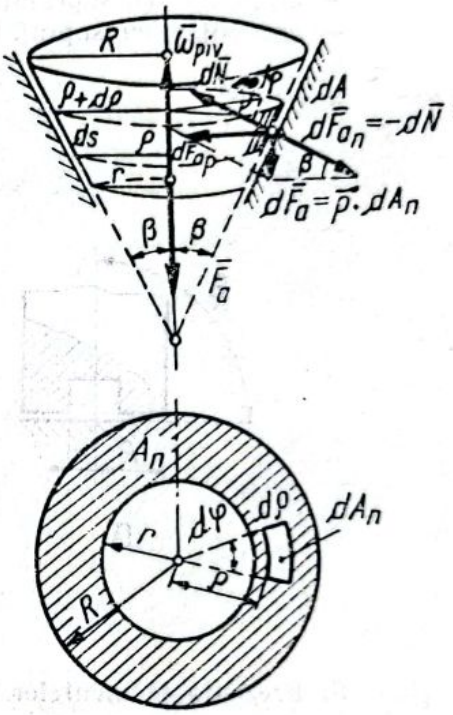


Fig. 6.45.

3°. Expresia coeficientului de frecare la pivotare, ν, în cazul cuplei fus-lagăr pivot este stabilită prin considerarea momentului de frecare la pivotare ca reprezentînd momentul rezultant faţă de axa fusului a tuturor forţelor elementare de frecare $d\bar{\Phi}$, ce se dezvoltă pe suprafaţa tronconică de contact (fig. 6.45), moment determinat prin relaţia.

$$|\bar{\mathcal{M}}_{piv}| = \iint_{(A)} \rho |d\bar{\Phi}| = \iint_{(A)} \rho\mu |d\bar{N}| = \int_0^{2\pi}\int_r^R p \frac{\mu}{\sin\beta} \rho d\rho\, d\varphi \tag{6.282}$$

şi calculat în ipoteza unei distribuţii uniforme a presiunilor

$$|\bar{p}| = p = \frac{|\bar{F}_a|}{A_n} = \frac{|R'_z|}{\pi(R^2 - r^2)} \tag{6.283}$$

Scanned with CamScanner

— unde $\bar{F}_a$ este componenta în lungul axei fusului a rezultantei forțelor exterioare active, echilibrată obișnuit de reacțiunea $\bar{R}'_z$, iar A_n este proiecția suprafeței tronconice de sprijin pe un plan normal la axa fusului—, precum și în ipoteza că μ are aceeași valoare în toate punctele de contact.

Expresia din tabel a coeficientului de frecare la pivotare poate fi particularizată la următoarele tipuri de cuple fus-lagăr pivot, purtînd numele de *crapodine* atunci cînd axa fusului este verticală:

— crapodina cu suprafața de sprijin în formă de coroană circulară (fig. 6.46, *a*), corespunzătoare condiției $\beta = \frac{\pi}{2}$;

— crapodina cu suprafața de sprijin conică (fig. 6.46, *b*), în cazul $r = 0$;

— crapodina cu suprafața de sprijin circulară (fig. 6.46, *c*), în condițiile $\beta = \frac{\pi}{2}$ și $r = 0$.

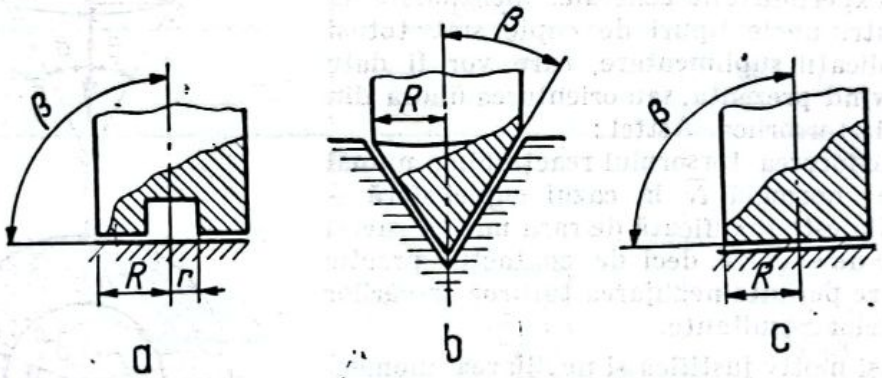


Fig. 6.46.

4°. Prezența momentelor necunoscute $\overline{\mathfrak{M}}'_{C_x}(\bar{R})$ și $\overline{\mathfrak{M}}'_{C_y}(\bar{R})$ în torsorul reacțiunilor la cupla placă—plan de sprijin este justificată de distribuția neuniformă și necunoscută a reacțiunilor elementare normale, toate însă cu moment zero în raport cu axa paralelă Qz'; momentul de frecare la pivotare este și aici momentul rezultant față de axa Qz' a tuturor forțelor elementare de frecare din planul de sprijin.

5°. Existența numai a componentelor $\overline{\mathfrak{M}}'_{C_x}(\bar{R})$ și $\overline{\mathfrak{M}}'_{C_y}(\bar{R})$ ale momentului rezultant al reacțiunilor în cazul cuplei elicoidale este justificată de faptul că suporturile tuturor reacțiunilor elementare normale intersectează axa tijei, avînd deci momente egale cu zero față de această axă; momentul axial de frecare apare, ca și la articulații, ca moment rezultant față de axa tijei al tuturor forțelor elementare de frecare normale la axa tijei.

6°. Prezența celor trei componente ortogonale ale momentului rezultant al torsorului reacțiunilor cuplei spațiale de translație rectilinie se justifică prin distribuția neuniformă și necunoscută a reacțiunilor elementare normale, ale căror suporturi nu mai trec, în general, prin axa tijei de ghidare, aleasă ca axă Oz.

7.° Expresia din tabel a momentului axial $\mathfrak{M}'_{C_z}(\bar{R})$ al reacțiunilor cuplei șurub (drept și cu profil dreptunghiular) — bucșă filetată se obține prin considerarea acestui moment ca reprezentînd momentul rezultant față de axa șurubului al tuturor componentelor din planele normale la această axă ale reacțiunilor elementare $\Delta\bar{N}$ și ale forțelor de frecare elementare $\Delta\bar{\Phi}$ de pe fețele în contact ale filetului (fig. 6.47, a pentru sensul de coborîre

Scanned with CamScanner

a şurubului şi fig. 6.47, b pentru sensul de ridicare); prin eliminarea termenului $(\Sigma/\Delta\bar{N}/)$ între relaţiile (fig. 6.47):

$$\bar{R}_{axial} = R'_z\bar{k} = \Sigma(\Delta\bar{N}_a + \Delta\bar{\Phi}_a) = (\Sigma/\Delta\bar{N}/)[\cos\beta \pm \mu\sin\beta]\bar{k} \qquad (6.284)$$

şi

$$\mathfrak{M}'_{O_z}(\bar{R}) = -r\Sigma[/\Delta\bar{N}_t/ \mp /\Delta\bar{\Phi}_t/] = -r(\Sigma/\Delta\bar{N}/)\sin(\beta \mp \varphi_{al})\cdot\frac{1}{\cos\varphi_{al}} \qquad (6.285)$$

— semnele superioare corespunzînd sensului de coborîre, iar semnele inferioare sensului de ridicare —, rezultă expresia dată.

8°. Existenţa momentului necunoscut $\bar{\mathfrak{M}}_C(\bar{R})$ în torsorul reacţiunilor la cupla plană de translaţie rectilinie se justifică prin distribuţia neuniformă şi necunoscută a reacţiunilor elementare normale.

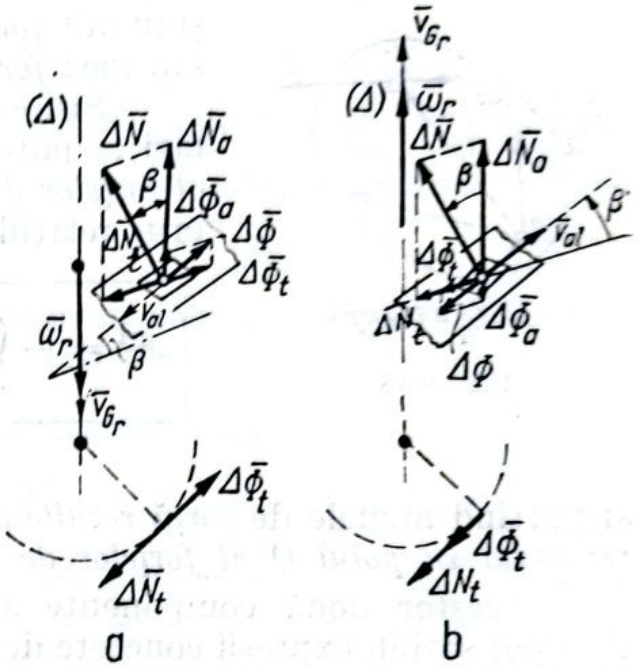


Fig. 6.47.

Solicitări interioare. Se numesc *forţe elementare interioare* forţele de interacţiune dintre masele elementare ale unui rigid, forţe care, indiferent de natura lor fizică, satisfac principiul acţiunii şi reacţiunii.

Considerînd o astfel de masă elementară dm în punctul $B(\bar{r}')$, este evident că acţiunile tuturor celorlalte mase elementare ale rigidului exercitate asupra ei vor da o rezultantă în general diferită de zero, $d\bar{\mathcal{F}}_{int} \neq 0$, cu momentul elementar în raport cu polul Q avînd expresia $d\bar{\mathfrak{M}}_{int_Q} = \bar{r}' \times d\bar{\mathcal{F}}_{int} \neq 0$.

La reducerea, în polul Q, a acestui sistem total de asemenea forţe interioare, corespunzătoare tuturor maselor elementare ale rigidului, se regrupează perechile de vectori direct opuşi — fiecare pereche cu rezultantă şi moment rezultant zero —, rezultînd astfel condiţiile

$$\left|\bar{\mathcal{F}}_{int} = \int_{(M)} d\bar{\mathcal{F}}_{int} = 0\,;\quad \bar{\mathfrak{M}}_{int_Q} = \int_{(M)} \bar{r}' \times d\bar{\mathcal{F}}_{int} = 0\right|, \qquad (6.286)$$

care scot în evidenţă faptul că la nivelul întregului rigid forţele interioare elementare formează un sistem echivalent cu zero.

Scanned with CamScanner

Solicitări de inerţie şi inerţiale

(α) *Solicitările de inerţie.* În mecanică, masei elementare dm a unui rigid, cu sediul în punctul $B(\bar{r}')$ şi care se deplasează cu acceleraţia $\bar{a}$, i se ataşează uneori un vector elementar $d\overline{\mathscr{F}}^i$, (fig. 6.48), definit prin relaţia

$$d\overline{\mathscr{F}}^i = -\,dm\bar{a} \tag{6.287}$$

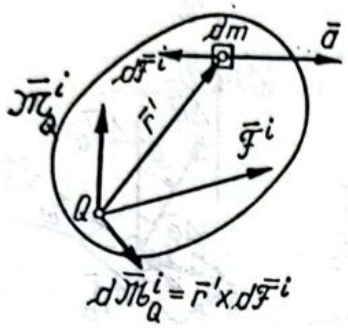


Fig. 6.48.

şi numit *forţă de inerţie a masei elementare* dm, sau încă *forţă elementară de inerţie.*

Sistemul tuturor acestor vectori elementari va putea fi redus în polul Q la un *torsor al forţelor de inerţie*, cu componentele definite prin relaţiile

$$\boxed{\overline{\mathscr{F}}^i = -\int_{(M)} dm\bar{a}\,;\quad \overline{\mathscr{M}}^i_Q = -\int_{(M)} \bar{r}' \times dm\bar{a}} \tag{6.288}$$

şi purtînd numele de *forţă rezultantă de inerţie*, respectiv de *moment rezultant în polul Q al forţelor de inerţie.*

Acestor două componente ale torsorului forţelor de inerţie li se pot stabili expresii concrete de calcul, efectuîndu-se în integralele (6.288) înlocuirea evidentă

$$\bar{a} = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') = \dot{\bar{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[\bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}']$$

şi ţinîndu-se seama de semnificaţiile integralelor respective, adică

$$\int_{(M)} dm\bar{a} = \int_{(M)} dm\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\bar{v}) = \int_{(M)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(dm\bar{v}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{(M)} dm\bar{v}\right) = \dot{\overline{\mathscr{K}}} \tag{6.289}$$

respectiv

$$\int_{(M)} \bar{r}' \times dm\,\frac{\mathrm{d}\bar{v}_Q}{\mathrm{d}t} = \left(\int_{(M)} \bar{r}'\,dm\right) \times \frac{\mathrm{d}\bar{v}_Q}{\mathrm{d}t} = M\bar{r}'_G \times \frac{\mathrm{d}\bar{v}_Q}{\mathrm{d}t} = M\bar{r}'_G \times \bar{a}_Q \tag{6.290}$$

Scanned with CamScanner

şi

$$\int_{(M)} \bar{r}' \times dm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{\omega} \times \bar{r}') = \int_{(M)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[[\bar{r}' \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')]dm] =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{(M)} [\bar{r}' \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')]dm\right] = \dot{\overline{\mathscr{K}}}_{Q_{rot}}, \tag{6.291}$$

la ultima integrală adăugîndu-se, în prealabil, termenul egal cu zero $\left[\int_{(M)} \frac{\mathrm{d}\bar{r}'}{\mathrm{d}t} \times dm(\bar{\omega} \times \bar{r}')\right]$, ca urmare a coliniarităţii factorilor $\frac{\mathrm{d}\bar{r}'}{\mathrm{d}t} = \bar{\omega} \times \bar{r}'$ şi $dm(\bar{\omega} \times \bar{r}')$.

Rezultă astfel următoarele expresii concrete de calcul al componentelor torsorului solicitărilor de inerţie

$$\boxed{\overline{\mathscr{T}}_Q(\overline{\mathscr{F}^i}) = \begin{Bmatrix} \overline{\mathscr{F}^i} = -\dot{\overline{\mathscr{H}}} \\ \overline{\mathfrak{M}}^i_Q = -M\bar{r}'_G \times \bar{a}_Q - \dot{\overline{\mathscr{K}}}_{Q_{rot}} \end{Bmatrix}}, \tag{6.292}$$

cu formele particulare

$$\boxed{\overline{\mathscr{T}}_G(\overline{\mathscr{F}^i}) = \begin{Bmatrix} \overline{\mathscr{F}^i} = -\dot{\overline{\mathscr{H}}} \\ \overline{\mathfrak{M}}^i_G = -\dot{\overline{\mathscr{K}}}_G \end{Bmatrix}}, \tag{6.293}$$

dacă polul Q coincide cu centrul de masă al rigidului şi

$$\boxed{\overline{\mathscr{T}}_G(\overline{\mathscr{F}^i}) = \begin{Bmatrix} \overline{\mathscr{F}^i} = -M\bar{a}_G \\ \overline{\mathfrak{M}}^i_G = -J\bar{\varepsilon} \end{Bmatrix}} \tag{6.294}$$

în cazul cînd polul Q coincide cu centrul de masă, iar axa de rotaţie are direcţie fixă în spaţiu şi este axă centrală de inerţie ($\overline{\mathscr{K}}_{G_{rot}} = \overline{\mathscr{K}}_G = J\bar{\omega}$).

Scanned with CamScanner

În legătură cu semnificația fizică a forțelor de inerție se desprind următoarele două concluzii, verificate și pe cale experimentală :

— Pentru un observator invariabil legat de reperul fix, la care este raportată mișcarea absolută a unui rigid, forțele de inerție ale acestuia acționează asupra agenților din mediul înconjurător, prin intermediul cărora se transmit maselor elementare ale rigidului accelerațiile $\bar{a}$; considerarea lor ca forțe „aplicate" maselor rigidului, întîlnită destul de des în mecanica tehnică, este, pentru observatorul fix, pur convențională și ea conduce, așa cum se va vedea ulterior în dinamica sistemelor mecanice, la o metodă comodă de rezolvare a unor probleme de mecanică.

Caracterul fictiv, pentru observatorul legat de reperul fix, al forțelor de inerție rezultă de altfel și din faptul că aceste forțe se introduc artificial în ecuația fundamentală a dinamicii, scrisă acum, prin considerarea celor trei categorii de solicitări reale — exterioare active, exterioare pasive și interioare —, sub forma

$$dm\,\bar{a} = d\overline{\mathcal{F}}_a + d\overline{\mathcal{F}}_p + d\overline{\mathcal{F}}_{int} \tag{6.295}$$

și transformată, prin introducerea forței de inerție, într-o *ecuație de echilibru dinamic* :

$$d\overline{\mathcal{F}}_a + d\overline{\mathcal{F}}^i + d\overline{\mathcal{F}}_p + d\overline{\mathcal{F}}_{int} = 0. \tag{6.296}$$

— Pentru observatorul invariabil legat de un reper mobil, în raport cu care un rigid (S) execută o mișcare relativă, anumite componente ale forței de inerție se comportă ca forțe reale, efectiv aplicate maselor elementare.

Într-adevăr, prin aplicarea teoremei lui Coriolis ($\bar{a} = \bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c$) și prin introducerea noțiunilor de *forță elementară de inerție de transport* și *forță elementară de inerție complementară*, definite prin relațiile

$$d\bar{F}^i_t = -\,dm\,\bar{a}_t\,; \quad d\bar{F}^i_c = -dm\,\bar{a}_c, \tag{6.297}$$

ecuația (6.295) va lua forma

$$\boxed{dm\,\bar{a}_r = d\overline{\mathcal{F}}_a + d\overline{\mathcal{F}}_p + d\bar{F}^i_t + d\bar{F}^i_c + d\overline{\mathcal{F}}_{int}} \tag{6.298}$$

Scanned with CamScanner

şi va reprezenta *ecuaţia fundamentală a dinamicii mişcării relative a rigidului*, forma ei justificînd afirmaţia de la început, cu privire la caracterul real, pentru observatorul fix în reperul mobil — pentru care este valabilă ecuaţia (6.298) —, a forţelor de inerţie de transport şi Coriolis.

Ecuaţia (6.298) se va aplica, evident, şi în cazul mişcărilor relative ale rigidelor la suprafaţa solului terestru, mişcări remarcate de observatorii imobili faţă de Pămînt şi în mişcare absolută odată cu acesta în raport cu un reper absolut ($\mathscr{R}$) $\equiv Oxyz$, presupus fix în spaţiu.

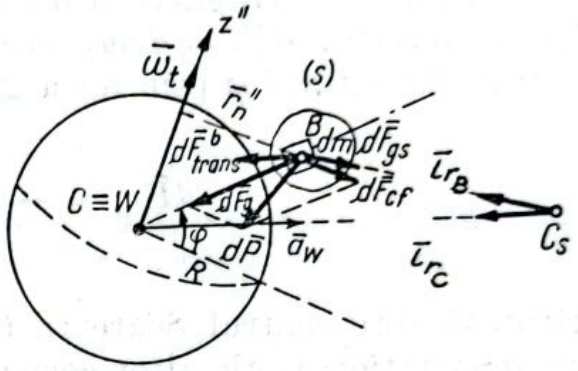


Fig. 6.49.

Considerînd un reper $Wx''y''z''$ legat de Pămînt, cu originea în centrul Pămîntului ($W \equiv C$) şi cu axa Wz'' orientată după axa de rotaţie instantanee a planetei, a cărei direcţie este practic fixă în spaţiu, mişcarea acestui reper — deci mişcarea de transport — va fi determinată prin parametrii cinematici $\bar{v}_w$, $\bar{\omega}_t$ şi $\bar{a}_w (\bar{\varepsilon}_t = \dot{\bar{\omega}}_t \equiv 0)$, ultimul fiind egal cu *acceleraţia gravitaţională solară*, cu o expresie analoagă expresiei (6.199), dar cu modificările corespunzătoare noii situaţii ($M_p \to M_S$; $R + h \to |\bar{r}_C| = \overline{C_a W}$; $\bar{\imath}_r \to \bar{\imath}_{r_C}$), (fig. 6.49), adică

$$\bar{a}_W = -k_a \frac{M_S}{\bar{r}_C^2} \bar{\imath}_{r_C} = \bar{g}_S. \tag{6.299}$$

În aceste condiţii, forţa elementară de inerţie de transport care, în general, are trei componente — *forţa elementară de inerţie de translaţie*, *forţa elementară de inerţie de rotaţie* şi *forţa elementară de inerţie axipetă*, numită, mai simplu, *forţă elementară centrifugă*, corespunzătoare celor trei componente ale acceleraţiei de transport —, se va reduce numai la prima şi ultima dintre componente ($\bar{a}_{rot} \equiv 0$), adică se va scrie

$$d\bar{F}_t^i = d\bar{F}^i_{trans} + d\bar{F}_{cf} = -dm\,\bar{a}_w - dm\,\bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}'') =$$

$$= -dm\,\bar{a}_w + dm\,\bar{\omega}_t^2 \bar{r}_n''. \tag{6.300}$$

În ceea ce priveşte forţa elementară de inerţie complementară, determinată prin relaţia

$$d\bar{F}_c^i = -dm\,\bar{a}_c = -2dm\,\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r, \tag{6.301}$$

Scanned with CamScanner

ea va putea fi neglijată în majoritatea covîrşitoare a mişcărilor relative obişnuite ale rigidelor la suprafaţa solului terestru, datorită, pe de o parte, valorii foarte mici a lui $|\bar{\omega}_t|$, $\left(|\bar{\omega}_t| = \frac{1}{86\,400}\,s^{-1}\right)$ şi, pe de altă parte, valorilor destul de mici ale vitezelor relative.

În ceea ce priveşte forţele exterioare active ce pot acţiona asupra masei elementare, ele pot fi împărţite în două grupe:

— forţe active gravitaţionale, reprezentate prin forţa gravitaţională terestră $d\bar{F}_g = dm\bar{g}_p$ orientată, după cum s-a văzut, spre centrul Pămîntului şi prin forţa gravitaţională solară, avînd expresia

$$d\bar{F}_{g_S} = -k_a \frac{dmM_S}{\bar{r}_B^2}\bar{i}_{r_B}, \tag{6.302}$$

orientată spre centrul Soarelui, (fig. 6.49) (Se pot total neglija forţele gravitaţionale ale altor corpuri cereşti, datorită distanţelor mari faţă de Pămînt şi maselor lor mici în comparaţie cu cea a Soarelui);

— forţe active suplimentare, cu rezultanta $d\bar{\mathcal{F}}_s$, reprezentate prin forţe active de interacţiune cu alte corpuri de la suprafaţa Pămîntului.

În aceste condiţii, ecuaţia (6.298) va putea fi scrisă, după o grupare convenabilă a termenilor, sub forma

$$dm\,\bar{a}_r = d\bar{\mathcal{F}}_s + (d\bar{F}_g + d\bar{F}_{cf}) + d\bar{\mathcal{F}}_p + d\bar{\mathcal{F}}_{int} + (d\bar{F}_{g_s} + d\bar{F}^i_{trans}). \tag{6.303}$$

Este uşor de observat că în cazul corpurilor aflate la înălţimi obişnuite deasupra solului terestru ($R + h = \overline{WB} = \overline{CB} \ll \overline{C_sC} = |\bar{r}_C|$, pot fi acceptate aproximările

$$|\bar{r}_B| \approx |\bar{r}_C|\,; \quad \bar{i}_{r_B} \approx \bar{i}_{r_C}, \tag{6.304}$$

cu consecinţa

$$d\bar{F}_{g_s} + d\bar{F}^i_{trans} = -k_a \frac{dmM_s}{\bar{r}_B^2}\bar{i}_{r_B} - dm\bar{a}_w =$$

$$= -k_a \frac{dmM_s}{\bar{r}_B^2}\bar{i}_{r_C} + k_a \frac{dmM_s}{\bar{r}_C^2}\bar{i}_{r_C} \approx 0, \tag{6.305}$$

Scanned with CamScanner

în baza căreia ecuaţia (6.303) va lua forma

$$dm\,\bar{a}_r = d\bar{\mathcal{F}}_s + (d\bar{F}_g + d\bar{F}_{cf}) + d\bar{\mathcal{F}}_p + d\bar{\mathcal{F}}_{int}. \qquad (6.306)$$

Forţa elementară rezultantă

$$d\bar{P} = d\bar{F}_g + d\bar{F}_{cf} = (\bar{g}_p + \bar{\omega}_t^2\bar{r}_n'')\,dm = \bar{g}dm, \qquad (6.307)$$

care acţionează în permanenţă asupra masei elementare dm, chiar şi atunci cînd rigidul este în repaus la suprafaţa solului terestru ($\bar{a}_r \equiv 0$) şi nu se află în interacţiune activă cu alte corpuri din jur, ($d\bar{\mathcal{F}}_s = 0$), reprezintă *greutatea elementară* a masei elementare dm, iar factorul

$$\bar{g} = \bar{g}_p + \bar{\omega}_t^2\bar{r}_n'' = \bar{g}_p + (R+h)\omega_t^2\cos\varphi\bar{i}_n, \qquad (6.308)$$

unde R este raza Pămîntului, h este înălţimea masei elementare deasupra solului terestru, φ este unghiul format de vectorul $\bar{r}''$ cu planul ecuatorial al Pămîntului, el fiind numit *latitudine geometrică* a punctului $B(\bar{r}'')$, iar $\bar{i}_n$ este versorul vectorului $\bar{r}_n''$, normal la vectorul $\bar{\omega}_t$; relaţia (6.308) explică faptul că suportul greutăţii elementare nu mai trece prin centrul Pămîntului, el formînd acum cu planul ecuatorial al acestuia un unghi φ_g numit *latitudine geografică* a punctului $B(\bar{r}'')$ şi justifică variaţia — constatată experimental — a acceleraţiei gravitaţiei cu altitudinea şi cu latitudinea.

În condiţiile corpurilor cu dimensiuni reduse, neglijabile în raport cu raza Pămîntului, întîlnite obişnuit în aplicaţiile tehnice, vectorul $\bar{g}$ poate fi considerat acelaşi pentru toate masele elementare, adică greutăţile elementare pot fi asimilate cu un sistem de vectori paraleli de acelaşi sens, reductibil deci la o rezultantă unică, această rezultantă, pusă în evidenţă prin balanţe şi dinamometre, purtînd numele de *greutatea rigidului;* ea va avea expresia

$$\bar{P} = \int_{(M)} dm\,\bar{g} = M\bar{g} \qquad (6.309)$$

şi va fi aplicată în centrul sistemului de vectori paraleli C, determinat în raport cu polul Q legat de rigid prin vectorul de poziţie

$$\bar{r}_C' = \frac{\int_{(M)}\bar{r}'dP}{\int_{(M)}dP} = \frac{\int_{(M)}\bar{r}'dm\,g}{\int_{(M)}dm\,g} = \frac{\int_{(M)}\bar{r}_1'dm}{\int_{(M)}dm} = \bar{r}_G', \qquad (6.310)$$

Scanned with CamScanner

acest centru coincizînd, după cum se vede, cu centrul de masă al rigidului, ceea ce justifică și denumirea de *centru de greutate* care i se mai dă curent centrului de masă.

Revenind la ecuația (6.306), ea va putea fi scrisă acum, prin introducerea greutății elementare, sub forma

$$dm\,\bar{a}_r = d\bar{\mathcal{F}}_s + d\bar{P} + d\bar{\mathcal{F}}_p + d\bar{\mathcal{F}}_{int}, \tag{6.311}$$

sau încă, introducînd din nou notația

$$d\bar{\mathcal{F}}_a = d\bar{\mathcal{F}}_s + d\bar{P}, \tag{6.312}$$

cu observația însă că de astă dată în forțele elementare active a fost înglobată și forța centrifugă, mai rezultă

$$dm\,\bar{a}_r = d\bar{\mathcal{F}}_a + d\bar{\mathcal{F}}_{int}, \tag{6.313}$$

adică o ecuație care descrie mișcarea relativă în raport cu reperul legat de Pămînt absolut analogă celei care descrie mișcarea efectuată în raport cu reperul fix ; această analogie permite să se renunțe chiar la indicele $(_r)$ la accelerația relativă, scriindu-se ecuația fundamentală a dinamicii mișcării relative față de Pămînt sub forma identică celei pentru mișcarea absolută, adică

$$dm\,\bar{a} = d\bar{\mathcal{F}}_a + d\bar{\mathcal{F}}_p + d\bar{\mathcal{F}}_{int}, \tag{6.314}$$

subînțelegîndu-se însă că este vorba de accelerația în raport cu un reper legat de Pămînt și că între forțele active figurează și greutatea, care include în ea forța centrifugă.

Mai rămîne să se arate că ecuația (6.313) nu se modifică dacă în locul reperului legat de Pămînt $(\mathcal{R}'') \equiv Wx''y''z''$, ales inițial, se folosește un alt reper, $(\mathcal{R}''^*) \equiv W^*x''^*y''^*z''^* \equiv (\mathcal{R}) \equiv Oxyz$, cu originea aleasă într-un punct arbitrar la suprafața solului terestru ; pentru aceasta, se va observa (fig. 6.50), că între vitezele relative ale unui punct $B(r'') \equiv B(r''^* = \bar{r})$ al rigidului în raport cu cele două repere, poate fi stabilită relația

$$\bar{v}_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[r'']_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{r}''_{W^*} + \bar{r}''^*]_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{r}''^*]_r = \bar{v}^*_r,$$

Scanned with CamScanner

cu consecința

$$\bar{a}_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{v}_r]_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{v}_r^*]_r = \bar{a}_r^*,$$

care permite să se tragă concluzia că ecuația (6.313), sau (6.314), poate fi scrisă, în condițiile precizate, în raport cu orice reper legat invariabil de Pământ.

β) *Solicitări inerțiale.* În aplicațiile tehnice se întîlnesc deseori situații cînd, pe un rigid (S) în mișcare, se află montat un al doilea rigid, (S^*), în rotație în jurul unei axe imobilizată în primul rigid.

În cazul cînd masele M și M^* ale celor două corpuri sînt de același ordin de mărime, cele două corpuri formează un „sistem mecanic" și metoda de studiere a mișcărilor lor va fi expusă în cel de-al doilea volum al lucrării.

În cazurile însă cînd masa M^* este neglijabilă în raport cu masa rigidului (S), iar viteza unghiulară relativă a corpului (S^*) este foarte mare și independentă de mișcarea rigidului (S) pe care este montat, atunci influența corpului (S^*) asupra rigidului (S) se va reduce numai la exercitarea asupra acestuia din urmă, prin intermediul lagărelor

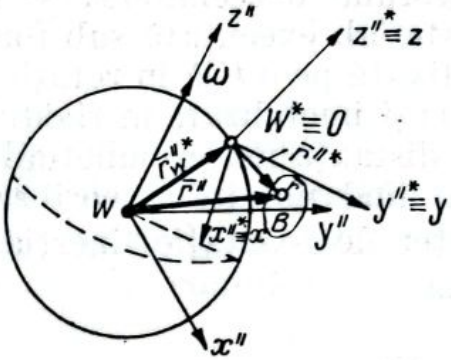


Fig. 6.50.

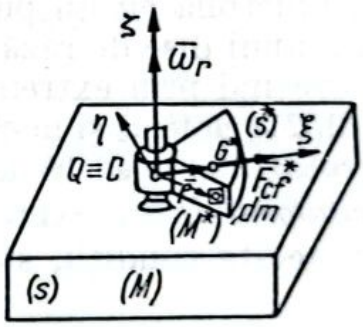


Fig. 6.51

între care este imobilizată axa de rotație relativă, a solicitărilor de inerție, cu rol de solicitări active aplicate rigidului (S); aceste solicitări aplicate rigidului (S) se numesc *solicitări inerțiale*, iar corpul (S^*) care le exercită se numește *excitator inerțial.*

Un asemenea excitator inerțial se realizează obișnuit sub forma unui rotor dezechilibrat, admițînd însă două plane de simetrie ortogonale, unul normal la axa de rotație (fig. 6.51), care va fi deci axă principală de inerție și al doilea conținînd axa de rotație. În aceste condițiuni, torsorul rezultant în punctul teoretic de cuplare C — punctul

Scanned with CamScanner

de intersecție a axei de rotație cu planul de simetrie normal la axă — al forțelor de inerție ale rotorului dezechilibrat va avea forma

$$\overline{\mathscr{T}}_C(\overline{\mathscr{F}}^i) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{F}^{i*} = -M^*\bar{a}^*_G \approx -M^*\bar{a}^*_{Gr} \\ \overline{\mathfrak{M}}^{i*}_C = -J^*\bar{\varepsilon}^* - M^*\bar{r}^*_{CG*} \times \bar{a}_C \approx -J^*\bar{\varepsilon}^*_r \end{array} \right\}, \quad (6.315)$$

ultimele aproximări fiind justificate de ipoteza de lucru adoptată, privind rotația foarte rapidă a rotorului dezechilibrat.

În mod obișnuit, excitatorii inerțiali funcționează în condiții de rotație relativă uniformă ($\bar{\varepsilon}^*_r = 0$; $\bar{a}^*_{G_r} = \bar{a}^{\prime\prime}_{G_{rax}}$), ceea ce face ca torsorul precedent să se reducă numai la forța de inerție

$$\overline{F}^{i*} = \overline{F}^*_{cf} = -M^*\bar{a}^*_{G_{rax}} = -M\bar{\omega}^*_r \times (\bar{\omega}^*_r \times \bar{r}^*_{CG*}) = M^*\bar{\omega}^{*2}_r\bar{r}^*_{CG*} =$$

$$= M^*\bar{\omega}^{*2}_r r\bar{i}_{CG} \quad (6.316)$$

care va acționa ca o forță activă rotativă asupra rigidului pe care este montat excitatorul inerțial, ea purtînd numele de *forță de excitație inerțială*, notată $\overline{F}_{ex} = \overline{F}^{i*}$.

În multe cazuri în locul rotorului dezechilibrat se folosește o masă asimilabilă cu un punct material, executată sub forma unei sfere sau a unui disc de rază mică, fixată pe o tijă în rotație în jurul unei axe trecînd prin extremitatea ei și imobilizată în rigidul excitat (S) (fig. 6.52); notînd și acum cu r distanța masei punctuale la centrul de rotație — această distanță fiind numită uneori *excentricitatea excitatorului* —, expresia forței de excitație inerțială va fi scrisă, în aceste condiții, sub forma

$$\overline{F}_{ex} = mr\omega_i^2\bar{i}_{CG*}. \quad (6.317)$$

În aplicațiile tehnice se folosesc curent ansambluri de doi excitatori inerțiali, sub forma *excitatorilor dubli simetrici sincroni sinfazici*, denumirea care implică satisfacerea următoarelor condiții:

— Cele două mase de excitație, egale între ele ($m_1 = m_2 = m$) și situate la aceeași distanță de centrele de rotație ($r_1 = r_2 = r$), se rotesc în plane paralele între ele, plasate simetric în raport cu centrul de masă G al rigidului excitat (S), cu centrele de rotație C_1 și C_2 dispuse de asemenea simetric în raport cu centrul de masă G, (fig. 6.53); prin alegerea axei Gz' a reperului $Gx'y'z'$ legat de rigidul

Scanned with CamScanner

(S) după normala la planele de rotaţie ale celor două mase de excitaţie, rezultă (fig. 6.53) următoarele coordonate ale punctelor C_1 şi C_2:

$$C_1(a\,;\ b\,;\ c):\quad C_2(-a\,;\ -b\,;\ -c)\,; \tag{6.318}$$

— cele două mase (rotori) se rotesc cu viteze unghiulare de acelaşi modul, dar în sensuri contrare, adică

$$\bar{\omega}_2 = -\,\bar{\omega}_1 = -\,\omega_0 \bar{k}'\,; \tag{6.319}$$

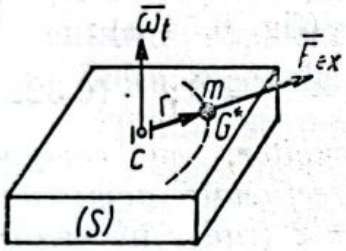


Fig.6.52.

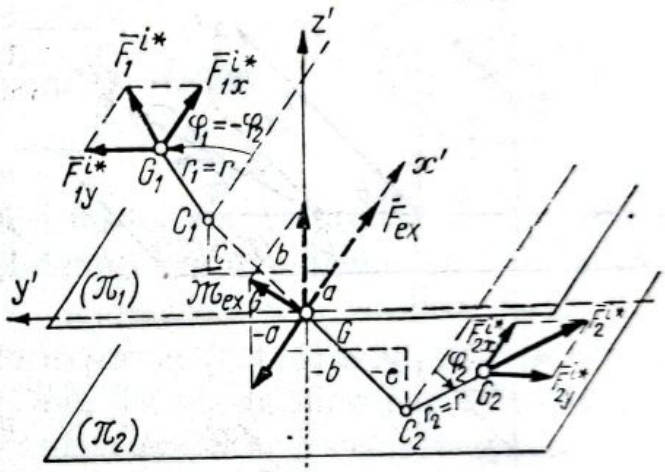


Fig. 6.53.

— unghiurile iniţiale φ_1^0 şi φ_2^0, formate de razele C_1G_1 şi C_2G_2 cu paralelele la axa Gx', luată ca axă de referinţă pentru unghiurile de rotaţie, sînt egale ca mărime şi de sensuri contrare ($\varphi_2^0 = -\varphi_1^0$), rezultînd de aici condiţia

$$\varphi_2 = \varphi_2^0 + \omega_2 t = -\,\varphi_1^0 - \omega_1 t = -\,(\varphi_1^0 + \omega_1 t) = -\,\varphi_1 \tag{6.320}$$

pentru orice moment de funcţionare t, ulterior momentului iniţial.

În condiţiile prezentate mai sus, torsorul rezultant în centrul de masă G al rigidului (S) al solicitărilor de excitaţie inerţială, exercitate de cele două mase în rotaţie, va avea forma

$$\bar{\mathcal{T}}_G(\bar{F}_{ex}) = \left\{\begin{array}{l} \bar{F}_{ex} = \bar{F}_1^{i*} + \bar{F}_2^{i*} = (F_{1x}^{i*\prime} + F_{2x}^{i*\prime})\,\bar{i}' + (F_{1y}^{i*\prime} + F_{2y}^{i*\prime})\,\bar{j}' \\ \bar{\mathcal{M}}_{ex} = \bar{r}'_{C_1} \times \bar{F}_1^{i*} + \bar{r}'_{C_2} \times \bar{F}_2^{i*} \end{array}\right\},$$

Scanned with CamScanner

sau încă, efectuînd calculele și ținînd seama și de condițiile (6.318), (6.319) și (6.320), mai rezultă

$$\overline{\mathcal{F}}_G(\overline{F}_{ex}) = \begin{cases} \overline{F}_{ex} = 2m\omega_0^2 r\cos(\omega_0 t)\,\bar{i}' = 2m\omega_0^2 r\sin\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{2}\right)\bar{i}' \\ \overline{\mathfrak{M}}_{ex_G} = -2cm\omega_0^2 r\sin(\omega_0 t)\bar{i}' + 2am\omega_0^2 r\sin(\omega_0 t)\bar{k}'. \end{cases} \tag{6.321}$$

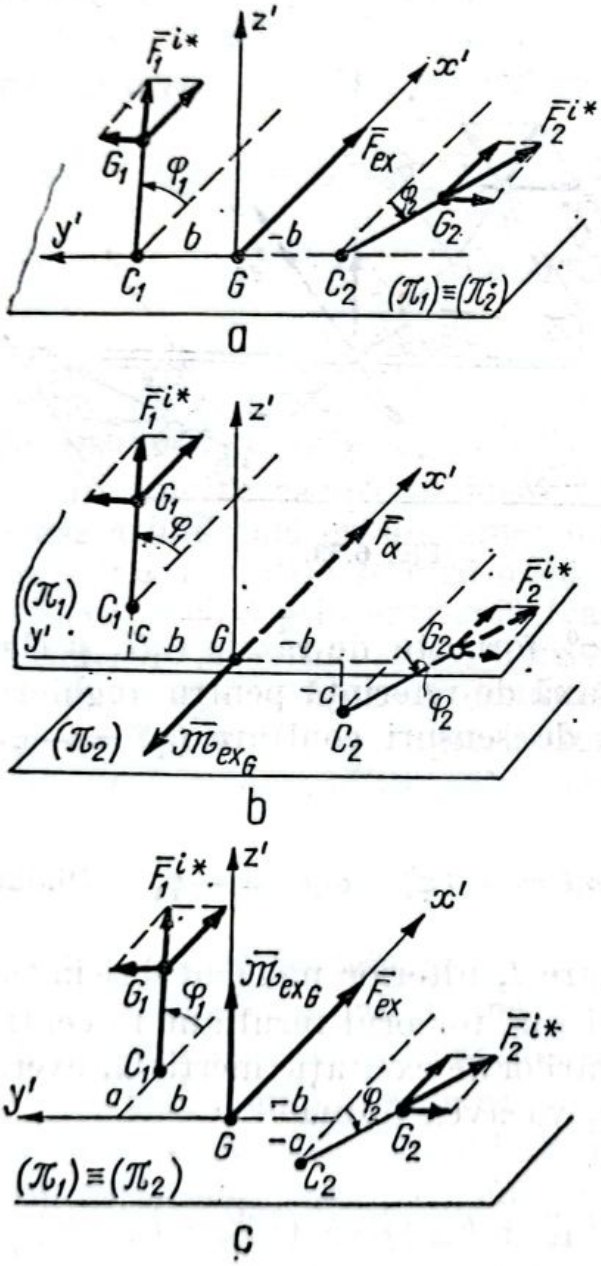


Fig. 6.54.

În funcție de datele constructive pot fi obținute următoarele forme particulare de excitație inerțială :

— *forță de excitație unică, unidirecțională, armonică, defazată de* $\pi/2$ *(rad)*, în condițiile constructive (fig. 6.54 a) :

$$a = c = 0; \tag{6.322}$$

— *răsucitor, cu componente unidirecționale armonice, defazate de* $\pi/2$ *(rad)*, în cazul, (fig. 6.54, b) :

$$a = 0 \tag{6.323}$$

— *forță de excitație și moment de excitație unidirecționale*, ortogonale, armonice, defazate de $\pi/2$ (rad), (fig. 6.54, c), în cazul

$$c = 0. \tag{6.324}$$

6.3.2. Lucrul mecanic și puterea mecanică a solicitărilor aplicate unui rigid

1°. Lucrul mecanic elementar al unui sistem de solicitări. Extinzîndu-se noțiunea de lucru mecanic, definită în cursu-

Scanned with CamScanner

rile elementare de fizică generală pentru cazul cu totul particular al unei forţe constante $\bar{F}$, al cărei punct de aplicaţie se deplasează rectiliniu pe o distanţă orientată finită $\bar{s}$, cu ajutorul relaţiei

$$\mathscr{L} = \| \bar{F} \| \bar{s} | \cos | \bar{F}, \bar{s} | = \bar{F}\bar{s}, \tag{6.325}$$

la cazul unei distribuţii oarecare de forţe elementare aplicate maselor elementare ale unui rigid (fig. 6.55), se va numi *lucru mecanic elementar* al unei asemenea distribuţii de forţe dF mărimea definită prin relaţia

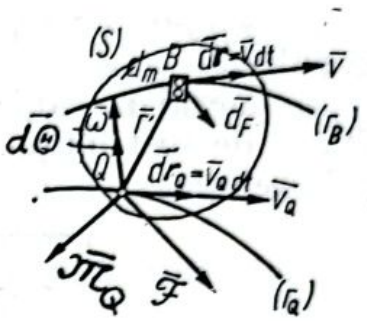


Fig. 6.55.

$$\boxed{d\mathscr{L} = \int_{(M)} d\bar{F}\,d\bar{r} = \int_{(M)} d\bar{F}\bar{v}\,dt}, \tag{6.326}$$

$d\bar{r}$ fiind deplasarea elementară a masei dm, efectuată în timpul elementar dt, fapt care justifică şi denumirea de „elementar" dată acestui lucru mecanic.

Ţinînd seama şi acum de expresia (6.144) a vitezei punctului $B(\bar{r}')$, sediul masei elementare dm, se va stabili o expresie concretă de calcul al acestui lucru mecanic elementar, scriindu-se :

$$d\mathscr{L} = \int_{(M)} d\bar{F}\,d\bar{r} = \int_{(M)} d\bar{F}\bar{v}_Q\,dt + \int_{(M)} d\bar{F}(\bar{\omega}\times\bar{r}')\,dt =$$

$$= \int_{(M)} (\bar{v}_Q dt)\,d\bar{F} + \int_{(M)} \bar{\omega}dt(\bar{r}'\times d\bar{F}),$$

sau încă, scoţînd în afara semnelor de integrare mărimile $\bar{v}_Q dt = d\bar{r}_Q$ şi $\bar{\omega}dt = d\bar{\Theta}$, aceleaşi pentru toate masele elementare ale rigidului şi luînd în consideraţie şi semnificaţiile integralelor rămase, rezultă expresia

$$\boxed{d\mathscr{L} = (\bar{\mathcal{F}}\bar{v}_Q + \bar{\mathcal{M}}_Q\bar{\omega})dt = \bar{\mathcal{F}}d\bar{r}_Q + \bar{\mathcal{M}}_Q d\bar{\Theta}}. \tag{6.327}$$

În funcţie de unghiurile pe care le fac componentele torsorului în polul Q al solicitărilor considerate cu deplasările elementare la

Scanned with CamScanner

translaţie şi rotaţie, $d\bar{r}_Q$ şi $d\overline{\Theta}$, respectiv cu parametrii cinematici de ordinul întîi $\bar{v}_Q$ şi $\bar{\omega}$, acest lucru mecanic va putea fi:

— *pozitiv*, sau *motor*, cînd vectorii $\overline{\mathcal{F}}$ şi $\bar{v}_Q$, respectiv $\overline{\mathfrak{M}}_Q$ şi $\bar{\omega}$ formează unghiuri ascuţite între ele;

— *negativ*, sau *rezistent*, cînd unghiurile formate de vectorii $\overline{\mathcal{F}}$ şi $\bar{v}_Q$, respectiv $\overline{\mathfrak{M}}_Q$ şi $\bar{\omega}$ sînt obtuze;

— *egal cu zero*, cînd vectorii $\overline{\mathcal{F}}$ şi $\bar{v}_Q$, respectiv $\overline{\mathfrak{M}}_Q$ şi $\bar{\omega}$ sînt ortogonali.

Lucrul mecanic total, efectuat într-un interval finit de timp $[t_0, t]$ de distribuţia considerată de forţe elementare va fi definit prin relaţia

$$\boxed{\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t} d\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t} [\overline{\mathcal{F}}\bar{v}_Q + \overline{\mathfrak{M}}_Q\bar{\omega}]dt} \cdot \qquad (6.328)$$

cu observaţia că, în general, cu unele excepţii care vor fi menţionate ulterior, expresia de sub semnul de integrare nu reprezintă diferenţiala totală a unei funcţii $\mathcal{L}$.

Se va demonstra, în continuare, că lucrul mecanic elementar corespunzător unei anumite distribuţii de forţe este independent de polul ales, cu condiţia ca atît componentele torsorului distribuţiei considerate, cît şi deplasările elementare să corespundă aceluiaşi pol.

Într-adevăr, admiţînd că distribuţia de forţe elementare considerată în fig. 6.55 este reductibilă într-un punct $C(\bar{r}'_C)$ la un torsor de componete $\overline{\mathcal{F}}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_C$, cu torsorul în polul Q avînd deci componentele $\overline{\mathcal{F}}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_Q = \overline{\mathfrak{M}}_C + \bar{r}'_C \times \overline{\mathcal{F}}$ şi ţinînd seama şi de condiţia

$$d\bar{r}_C = \bar{v}_C dt = (\bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}'_C)\, dt = \bar{v}_Q dt + \bar{\omega} dt \times \bar{r}'_C = d\bar{r}_Q + d\bar{\Theta} \times \bar{r}'_C$$

se va putea scrie

$$d\mathcal{L}_{(C)} = \overline{\mathcal{F}} d\bar{r}_C + \overline{\mathfrak{M}}_C d\overline{\Theta} = \overline{\mathcal{F}}(d\bar{r}_Q + d\bar{\Theta} \times \bar{r}'_C) + (\overline{\mathfrak{M}}_Q - \bar{r}'_C \times \overline{\mathcal{F}}) d\overline{\Theta} =$$

$$= (\overline{\mathcal{F}} d\bar{r}_Q + \overline{\mathfrak{M}}_Q d\overline{\Theta}) + \underbrace{[\overline{\mathcal{F}}(d\overline{\Theta} \times \bar{r}'_C) - (\bar{r}'_C \times \overline{\mathcal{F}}) d\overline{\Theta}]}_{0} = d\mathcal{L}_{(Q)},$$

justificîndu-se astfel afirmaţia făcută mai sus.

Această observaţie va permite ca în cazul unei distribuţii de forţe elementare reductibile la o rezultantă unică cu suportul trecînd printr-un punct determinat $D(\bar{r}'_D)$, al rigidului, (fig. 6.55), să se folosească în locul expresiei (6.327), (cu : $\overline{\mathfrak{M}}_Q = \bar{\mathcal{M}}_Q(\overline{\mathcal{F}}) = \bar{r}'_D \times \overline{\mathcal{F}}$),

Scanned with CamScanner

expresia simplificată, redusă — prin considerarea punctului D drept pol — la primul termen, adică se va putea scrie

$$\mathrm{d}\mathscr{L} = \overline{\mathscr{F}}\,\mathrm{d}\bar{r}_Q + \bar{\mathscr{M}}_Q(\overline{\mathscr{F}})\mathrm{d}\overline{\Theta} = \overline{\mathscr{F}}\,\mathrm{d}\bar{r}_D. \tag{6.329}$$

Relația de definiție a lucrului mecanic elementar permite să se stabilească și unitatea de măsură a sa în Sistemul internațional de unități, aceasta fiind joule (J), reprezentînd lucrul mecanic efectuat de o forță constantă de 1 newton la deplasarea cu 1 metru, în direcția forței, a punctului ei de aplicație.

În strînsă legătură cu noțiunea de lucru mecanic este noțiunea de *randament*, care va fi definită în continuare.

În timpul mișcărilor rigidelor întîlnite în aplicațiile tehnice unele din solicitările active efectuează lucru mecanic motor, $\mathscr{L}_m$ — fiind numite, din acest motiv, *solicitări motoare* —, iar altele efectuează lucru mecanic rezistent $\mathscr{L}_{rez}$ —, din care motiv sînt numite *solicitări rezistente*; faptul că operația utilă practicii umane constă, de regulă, tocmai în efectuarea lucrului mecanic rezistent, a determinat ca modulului lucrului mecanic rezistent să i se dea denumirea de *lucru mecanic util*, $\mathscr{L}_u = |\mathscr{L}_{rez}|$.

Existența fenomenelor de frecare, efectuînd de asemenea lucru mecanic rezistent, care se adaugă la cel al solicitărilor active rezistente, face ca lucrul mecanic motor să fie totdeauna mai mare decît lucrul mecanic util.

Pentru a se preciza măsura în care lucrul mecanic motor este folosit pentru compensarea lucrului mecanic util, s-a introdus noțiunea de *randament mecanic*, sau *grad de folosință*, definită prin raportul procentual dintre lucrul mecanic util și cel motor, fiind notat cu simbolul

$$\boxed{\eta = 100\frac{\mathscr{L}u}{\mathscr{L}m}\ \%} \tag{6.330}$$

2°. **Puterea mecanică a unui sistem de solicitări aplicate unui rigid în mișcare generală.** Pentru a se putea caracteriza capacitatea, în unitatea de timp, de a efectua lucru mecanic a unui sistem de solicitări reductibile în polul Q la un torsor de componente $\overline{\mathscr{F}}$ și $\overline{\mathscr{M}}_Q$, s-a introdus noțiunea de *putere mecanică* a sistemului respectiv de solicitări, definită prin relația

$$\boxed{\mathscr{P} = \frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}t} = \overline{\mathscr{F}}\,\bar{v}_Q + \overline{\mathscr{M}}_Q\bar{\omega}} \tag{6.331}$$

Scanned with CamScanner

în cazul cînd puterea mecanică este variabilă în timp și prin raportul

$$\mathscr{P} = \frac{\mathscr{L}}{t} \tag{6.332}$$

în cazul cînd puterea mecanică este constantă, ultima expresie scoţînd în evidenţă și unitatea de măsură (SI) a puterii mecanice și anume 1 joule/secundă (1 J/s), unitate purtînd încă și numele de watt (W).

§ 7. Dinamica mișcării absolute generale a rigidului

Acest nou paragraf al capitolului de dinamica mișcării absolute a rigidului cuprinde :

— demonstrarea teoremelor fundamentale ale dinamicii rigidului, pe baza cărora vor putea fi stabilite ecuaţiile de mișcare în cazul cel mai general posibil :

— prezentarea problemelor și a diverselor forme ale ecuaţiilor dinamicii rigidului ;

— prezentarea problemelor și a ecuaţiilor statisticii rigidului, considerată ca un caz particular al dinamicii.

7.1. *Teoremele fundamentale ale dinamicii rigidului*

Ecuaţia fundamentală a dinamicii rigidului, avînd forma

$$dm\,\bar{a} = d\overline{\mathscr{F}}_a + d\overline{\mathscr{F}}_p + d\overline{\mathscr{F}}_{int} \tag{7.1}$$

conduce, prin unele transformări ce vor fi precizate pe parcurs, la o serie de relaţii între caracteristicile cinetice și cele dinamice ale mișcării generale a rigidului, relaţii exprimînd așa numitele *teoreme fundamentale ale dinamicii rigidului* și care vor fi prezentate în continuare.

7.1.1. Teoremele torsorului impulsurilor

Această primă serie de teoreme stabilește legătura dintre caracteristicile cinetice vectoriale — impulsul și momentul cinetic — și caracteristicile vectoriale dinamice — forţa rezultantă și momentul rezultant al solicitărilor aplicate unui rigid.

Scanned with CamScanner

1°. Forme ale teoremei impulsurilor

Teorema impulsurilor sub forma generală. Prin integrarea, extinsă la întreaga masă a rigidului în mișcare, a ecuației fundamentale (7.1) și considerarea relațiilor (6.289) și (6.286) din paragraful precedent, se obține următoarea relație

$$\boxed{\dot{\bar{\mathscr{K}}} = \bar{\mathscr{F}}_a + \bar{\mathscr{F}}_p}, \tag{7.2}$$

exprimînd *teorema impulsului în dinamica rigidului*, cu formularea:

Derivata în raport cu timpul a impulsului unui rigid în mișcare este egală cu rezultanta tuturor forțelor exterioare, active și pasive, care acționează asupra rigidului respectiv.

Teorema mișcării centrului de masă. În baza ultimei dintre expresiile (6.147) ale impulsului, relația (7.2) va lua forma

$$\boxed{M\bar{a}_G = \bar{\mathscr{F}}_a + \bar{\mathscr{F}}_p}, \tag{7.3}$$

ea exprimînd *teorema mișcării centrului de masă în dinamica rigidului* sub următoarea formulare: masa unui rigid înmulțită cu accelerația centrului său de masă este egală cu rezultanta tuturor forțelor exterioare, active și pasive, care acționează asupra rigidului respectiv.

Legea de conservare a impulsului. În cazul cînd este satisfăcută condiția

$$\bar{\mathscr{F}}_a + \bar{\mathscr{F}}_p \equiv 0 \tag{7.4}$$

relațiile (7.2) și (7.3) conduc, prin integrare pe durata de timp în care este satisfăcută condiția precedentă, la concluzia

$$\boxed{\bar{\mathscr{K}} = M\bar{v}_G = \bar{\mathscr{K}}^0}, \tag{7.5}$$

$\bar{\mathscr{K}}^0 = M\bar{v}_G^0$ fiind un vector constant de integrare, cu semnificația fizică de impuls inițial al rigidului; relația precedentă exprimă *legea de conservare a impulsului*, iar atunci cînd este scrisă sub forma echivalentă

$$\boxed{\bar{v}_G = \frac{\bar{\mathscr{K}}^0}{M} = \bar{v}_G^0} \tag{7.6}$$

Scanned with CamScanner

ea exprimă *prima lege a inerției*, cu următoarea formulare: centrul de masă al unui rigid, solicitat de un sistem de forțe exterioare, active și pasive, cu rezultantă identic zero, își păstrează mișcarea rectilinie uniformă, sau starea de repaus, după cum viteza, în momentul aplicării sistemului de forțe, este diferită de zero, sau egală cu zero.

Proiecțiile pe axele reperului fix ale relației (7.5), adică relațiile

$$\boxed{\mathcal{H}_x = M\dot{x}_G = \mathcal{H}_x^0; \quad \mathcal{H}_y = M\dot{y}_G = \mathcal{H}_y^0; \quad \mathcal{H}_z = M\dot{z}_G = \mathcal{H}_z^0} \tag{7.7}$$

sînt numite *integralele impulsului*

2°. Forme ale teoremei momentului cinetic.

Teorema momentului cinetic în raport cu polul fix. Multiplicînd, vectorial la stînga, ecuația fundamentală (7.1) cu vectorul de poziție în raport cu polul fix, $\bar{r}$, al masei elementare a rigidului și integrînd apoi relația, astfel multiplicată, pe întreaga masă a rigidului, se obține egalitatea

$$\int_{(M)} \bar{r} \times dm\bar{a} = \int_{(M)} \bar{r} \times d\overline{\mathcal{F}}_a + \int_{(M)} \bar{r} \times d\overline{\mathcal{F}}_p + \int_{(M)} \bar{r} \times d\overline{\mathcal{F}}_{int}, \tag{7.8}$$

cu următoarea semnificație pentru termenul din membrul stîng:

$$\int_{(M)} \bar{r} \times dm\bar{a} = \int_{(M)} \bar{r} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(dm\bar{v}) = \int_{(M)} \frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t} \times dm\bar{v} + \int_{(M)} \bar{r} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(dm\bar{v}) =$$

$$= \int_{(M)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{r} \times dm\bar{v}) = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\int_{(M)} \bar{r} \times dm\bar{v}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\overline{\mathcal{K}}] = \dot{\overline{\mathcal{K}}}. \tag{7.9}$$

Avînd în vedere și semnificațiile termenilor din membrul stîng al relației (7.8) — prima integrală reprezintă momentul rezultant în polul fix al tuturor solicitărilor active exterioare, $\overline{\mathfrak{M}}_a$, a doua momentul rezultant $\overline{\mathfrak{M}}_p$ al tuturor solicitărilor exterioare pasive aplicate rigidului, iar ultima este egală cu zero, ca urmare ca faptului că sistemul forțelor interioare este echivalent cu zero în orice pol —, se obține relația

$$\boxed{\dot{\overline{\mathcal{K}}} = \overline{\mathfrak{M}}_a + \overline{\mathfrak{M}}_p}, \tag{7.10}$$

Scanned with CamScanner

exprimînd *teorema momentului cinetic în raport cu polul fix în dinamica rigidului* cu formularea:

Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic faţă de un pol fix al unei rigid în mişcare este egală cu momentul rezultant, în raport cu acelaşi pol fix, al tuturor solicitărilor exterioare, active şi pasive, aplicate rigidului respectiv.

Teorema momentului cinetic în raport cu polul invariabil legat de rigid. Avînd în vedere relaţia (6.163), care permite să se scrie

$$\dot{\overline{\mathcal{K}}} = \frac{d}{dt}[\bar{r}_Q \times \overline{\mathcal{H}} + M\bar{r}'_G \times \bar{v}_Q + \overline{\mathcal{K}}_{Qrot}] = \dot{\bar{r}}_Q \times \overline{\mathcal{H}} + M\dot{\bar{r}}'_Q \times \bar{v}_Q +$$

$$+ [\bar{r}_Q \times \dot{\overline{\mathcal{H}}} + M\bar{r}'_G \times \dot{\bar{v}}_Q + \dot{\overline{\mathcal{K}}}_{Qrot}],$$

cu

$$\dot{\bar{r}}_Q \times \overline{\mathcal{H}} + M\dot{\bar{r}}'_G \times \bar{v}_Q = \bar{v}_Q \times M(\bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}'_G) + M(\bar{\omega} \times \bar{r}'_G) \times \bar{v}_Q = 0$$

şi deci

$$\dot{\overline{\mathcal{K}}} = \bar{r}_Q \times \dot{\overline{\mathcal{H}}} + M\bar{r}'_G \times \bar{a}_Q + \dot{\overline{\mathcal{K}}}_{Qrot}, \qquad (7.11)$$

precum şi relaţiile de trecere de la polul 0 la polul Q pentru momentele rezultante ale solicitărilor exterioare active şi pasive, ($\overline{\mathfrak{M}}_a = \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} + \bar{r}_Q \times \overline{\mathcal{F}}_a$; $\overline{\mathfrak{M}}_p = \overline{\mathfrak{M}}_{p_Q} + \bar{r}_Q \times \overline{\mathcal{F}}_p$), se va obţine, după efectuarea înlocuirilor respective în relaţia (7.10), egalitatea

$$r_Q \times (\dot{\overline{\mathcal{H}}} - \overline{\mathcal{F}}_a - \overline{\mathcal{F}}_p) + M\bar{r}'_G \times \bar{a}_Q + \dot{\overline{\mathcal{K}}}_{Q_{rot}} = \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} + \overline{\mathfrak{M}}_{p_Q}$$

sau încă, ţinînd seama şi de relaţia (7.2), egalitatea

$$\boxed{M\bar{r}'_G \times \bar{a}_Q + \dot{\overline{\mathcal{K}}}_{Q_{rot}} = \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} + \overline{\mathfrak{M}}_{p_Q}} \qquad (7.12)$$

exprimînd *teorema momentului cinetic în raport cu polul invariabil legat de rigid.*

În cazul coincidenţei polului Q cu centrul de masă G al rigidului, ($\bar{r}'_G = 0$; $\overline{\mathcal{K}}_{Q_{rot}} = \overline{\mathcal{K}}_{G_{rot}} = \overline{\mathcal{K}}_G$), relaţia (7.12) ia forma

$$\boxed{\dot{\overline{\mathcal{K}}}_G = \overline{\mathfrak{M}}_{a_G} + \overline{\mathfrak{M}}_{p_G}} \qquad (7.13)$$

Scanned with CamScanner

și exprimă *teorema momentului cinetic corespunzătoare rotației instantanee a rigidului în jurul centrului său de masă*, cu formularea : derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui rigid corespunzător rotației sale instantanee în jurul centrului său de masă este egală cu momentul rezultant în raport cu centrul de masă al tuturor solicitărilor exterioare, active și pasive, aplicate rigidului.

Legile de conservare ale momentelor cinetice. În cazul cînd este satisfăcută condiția

$$\overline{\mathfrak{M}}_a + \overline{\mathfrak{M}}_p \equiv 0 \tag{7.14}$$

ecuația (7.10) conduce, prin integrare pe durata valabilității condiției precedente, la concluzia

$$\boxed{\overline{\mathcal{K}} = \overline{\mathcal{K}}^0} \tag{7.15}$$

cu semnificația fizică de moment cinetic inițial în raport cu polul fix pentru vectorul constant de integrare $\overline{\mathcal{K}}^0$, la *legea de conservare a momentului cinetic în raport cu polul fix*, al rigidului ; proiecțiile pe axele reperului fix ale acestei relații, adică egalitățile

$$\boxed{\mathcal{K}_x = \mathcal{K}_x^0 ; \quad \mathcal{K}_y = \mathcal{K}_y^0 ; \quad \mathcal{K}_z = \mathcal{K}_z^0} \tag{7.16}$$

sînt numite *integralele momentului cinetic în raport cu polul fix*.

În mod analog, dacă este satisfăcută condiția

$$\boxed{\overline{\mathfrak{M}}_{a_G} + \overline{\mathfrak{M}}_{p_G} \equiv 0}, \tag{7.17}$$

care implică reductibilitatea sistemului tuturor solicitărilor exterioare, active și pasive, aplicate rigidului la un sistem echivalent cu zero, sau la o rezultantă unică cu suportul trecînd prin centrul de masă al rigidului respectiv, relația (7.13) conduce, prin integrare pe durata valabilității condiției precedente, la concluzia

$$\boxed{\overline{\mathcal{K}}_G = \overline{\mathcal{K}}_G^0}, \tag{7.18}$$

exprimînd *legea de conservare a momentului cinetic corespunzător rotației instantanee a rigidului în jurul centrului său de masă.*

Scanned with CamScanner

În condițiile unui rigid cu simetrie sferică în repartiția masei, ($J'_x = J'_y = J'_z = J$ și deci $\overline{\mathscr{K}}_G = J\overline{\omega}$), relația (7.18) va putea fi scrisă sub forma

$$\boxed{\overline{\omega} = \frac{\overline{\mathscr{K}}^0_G}{J} = \overline{\omega}^0} \tag{7.19}$$

care va exprima cea de-a *doua lege a inerției*, cu formularea:

Un rigid prezentînd simetrie sferică în repartiția masei și supus unui sistem de solicitări exterioare, active și pasive, cu momentul rezultant în raport cu centrul său de masă identic zero, își păstrează fie rotația uniformă în jurul unei axe trecînd prin centrul de masă și de direcție fixă în spațiu, fie starea de repaus relativ la reperul $(\mathscr{R}^*) \equiv \equiv Qx^*y^*z^*$ după cum viteza sa unghiulară în momentul aplicării solicitărilor exterioare, $\overline{\omega}^0$, este diferită de zero, sau egală cu zero.

Se va vedea ulterior că o rotație instantanee inerțială, sub forma precesiei regulate, poate avea loc și în condițiile unei simetrii de revoluție în repartiția masei, asociate la condiția (7.17).

Considerînd cazul, mai general, al absenței oricărei simetrii în repartiția masei și proiectînd relația (7.18) pe axele reperului invariabil legat de rigid, orientate după axele centrale de inerție ($\overline{\mathscr{K}}_G = J'_x\omega'_x\bar{i}' + J'_y\omega'_yJ' + J'_z\omega'_z\bar{k}$), se obțin egalitățile

$$\boxed{J'_x\omega'_x = \mathscr{K}^{0'}_{Gx};\ J'_y\omega'_y = \mathscr{K}^{0'}_{Gy};\ J'_z\omega'_z = \mathscr{K}^{0'}_{Gz}}, \tag{7.20}$$

purtînd numele de *integralele momentului cinetic corespunzător rotației instantanee a rigidului în jurul centrului său de masă*; după cum se va vedea mai tîrziu, aceste relații joacă rolul de integrale prime ale sistemului de ecuații diferențiale ale mișcării rigidului, efectuată în condițiile (7.17).

3°. Forme ale teoremelor torsorului impulsurilor.

Teorema torsorului impulsurilor în raport cu polul fix. În baza relației de definiție (1.203) a derivatei unui torsor în raport cu timpul, relațiile (7.2) și (7.10) vor putea fi înglobate în relația unică

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\overline{\mathscr{T}}(\overline{\mathscr{H}})] = \overline{\mathscr{T}}(\overline{\mathscr{F}}_a) + \overline{\mathscr{T}}(\overline{\mathscr{F}}_p)}, \tag{7.21}$$

Scanned with CamScanner

exprimînd *teorema torsorului impulsurilor în raport cu polul fix* în dinamica rigidului, cu următoarea formulare : derivata în raport cu timpul a torsorului, în polul fix, al impusurilor unui rigid în mişcare este egală cu torsorul rezultant, în acelaşi pol fix, al tuturor solicitărilor exterioare, active şi pasive, la care este supus rigidul respectiv.

Teorema torsorului impulsurilor în raport cu centrul de masă al unui rigid. În mod analog, relaţiile (7.2) şi (7.13) pot fi înglobate în relaţia unică

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\overline{\mathcal{T}}_G(\overline{\mathcal{H}})] = \overline{\mathcal{T}}_G(\overline{\mathcal{F}}_a) + \overline{\mathcal{T}}_G(\overline{\mathcal{F}}_p)}, \tag{7.22}$$

exprimînd *teorema torsorului impulsurilor în raport cu centrul de masă al unui rigid*, cu formularea : derivata în raport cu timpul a torsorului, în centrul de masă, al impulsurilor unui rigid în mişcare este egală cu torsorul rezultant în centrul de masă al tuturor solicitărilor exterioare, active şi pasive, la care este supus rigidul respectiv.

Legile de conservare a torsorilor impulsurilor. În condiţiile

$$\overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{F}}_a) + \overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{F}}_p) \equiv 0 \tag{7.23}$$

relaţia (7.21) conduce la concluzia

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{H}}) = \overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{H}}^0)}, \tag{7.24}$$

această relaţie, care înglobează în ea relaţiile (7.5) şi (7.15), exprimînd *legea de conservare a torsorului impulsurilor în raport cu polul fix* al unui rigid în mişcare.

Întrucît în condiţiile (7.23) sînt valabile şi condiţiile

$$\overline{\mathcal{T}}_G(\overline{\mathcal{F}}_a) + \overline{\mathcal{T}}_G(\overline{\mathcal{F}}_p) \equiv 0, \tag{7.25}$$

se poate scrie şi relaţia exprimînd *legea de conservare a torsorului impulsurilor în raport cu centrul de masă* al unui rigid în mişcare

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_G(\overline{\mathcal{H}}) = \overline{\mathcal{T}}_G(\overline{\mathcal{H}}^0)}, \tag{7.26}$$

ultima relaţie înglobînd în ea relaţiile (7.2) şi (7.13).

Scanned with CamScanner

În cazul rigidului cu simetrie sferică în repartiția masei valabilitatea ultimei legi de conservare implică satisfacerea egalităților

$$\boxed{\bar{v}_G = \frac{\overline{\mathscr{H}}^0}{M} = \bar{v}_G^0\,;\quad \bar{\omega} = \frac{\overline{\mathscr{K}}_G^0}{J} = \bar{\omega}^0}\,, \tag{7.27}$$

care exprimă *legea generală a inerției mecanice*, cu următoarea formulare : rigidul cu simetrie sferică în repartiția masei și supus unui sistem de solicitări exterioare, active și pasive, reductibil la un sistem identic echivalent cu zero, are, în funcție de valorile inițiale, $\bar{v}_G^0$ și $\bar{\omega}^0$, ale parametrilor lui cinematici de ordinul întîi, una din următoarele patru *stări inerțiale* :

— *rototranslație inerțială* rezultînd dintr-o translație rectilinie uniformă și o rotație uniformă în jurul uni axe trecînd prin centrul de masă și de direcție fixă în spațiu (în condițiile $\bar{v}_G^0 \neq 0$; $\bar{\omega}^0 \neq 0$)

— *translație rectilinie uniformă fără rotație* (în condițiile : $\bar{v}_G^0 \neq 0$; $\bar{\omega}^0 = 0$) ;

— *rotație inerțială fără translație* (în condițiile : $\bar{v}_G^0 = 0$; $\bar{\omega}^0 \neq 0$) ;

— *starea de repaus* (în condițiile : $\bar{v}_G^0 = 0$; $\bar{\omega}^0 = 0$).

Se va vedea ulterior că prima stare inerțială poate îngloba și o roto-translație cu un caracter mai general, rezultînd dintr-o translație rectilinie uniformă și dintr-o mișcare de precesie regulată, efectuată în jurul centrului de masă al rigidului.

7.1.2. Teoremele energiei

1°. Forme ale teoremei energiei.

Teorema energiei sub forma generală. Prin înmulțirea, scalar, a ecuației fundamentale (7.1) cu viteza masei elementare și apoi prin integrarea relației astfel obținute pe întreaga masă a rigidului, se capătă egalitatea

$$\int_{(M)} dm\bar{a}\,\bar{v} = \int_{(M)} d\overline{\mathscr{F}}_a\bar{v} + \int_{(M)} d\overline{\mathscr{F}}_p\bar{v} + \int_{(M)} d\mathscr{F}_{int}\bar{v}, \tag{7.28}$$

Scanned with CamScanner

cu următoarele semnificații ale termenilor :

$$\int_{(M)} dm\bar{a}\,\bar{v} = \int_{(M)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(dm\,\frac{v^2}{2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{(M)} dm\,\frac{\bar{v}^2}{2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{E}) = \dot{\mathcal{E}}\,; \tag{7.29}$$

$$\int_{(M)} d\overline{\mathcal{F}}_a\bar{v} = \int_{(M)} d\overline{\mathcal{F}}_a(\bar{v}_Q + \bar{\omega}\times\bar{r}') = \overline{\mathcal{F}}_a\bar{v}_Q + \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q}\bar{\omega} = \mathcal{P}_a\,; \tag{7.30}$$

$$\int_{(M)} d\overline{\mathcal{F}}_p\bar{v} = \overline{\mathcal{F}}_p\bar{v}_Q + \overline{\mathfrak{M}}_{p_Q}\bar{\omega} = \mathcal{P}_p \tag{7.31}$$

$$\int_{(M)} d\overline{\mathcal{F}}_{int}\bar{v} = \overline{\mathcal{F}}_{int}\bar{v}_Q + \overline{\mathfrak{M}}_{int_Q}\bar{\omega} = 0, \tag{7.32}$$

$\mathcal{P}_a$ și $\mathcal{P}_p$ fiind puterile mecanice ale solicitărilor exterioare, active și pasive, la care este supus rigidul.

În baza relațiilor precedente, egalitatea (7.28) ia forma

$$\boxed{\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_p} \tag{7.33}$$

ea exprimînd *teorema energiei sub forma generală* în dinamica rigidului, cu următoarea formulare :

Derivata în raport cu timpul a energiei cinetice a unui rigid în mișcare este egală cu suma puterilor mecanice ale tuturor solicitărilor exterioare, active și pasive, la care este supus rigidul respectiv.

Teorema energiei sub forma diferențială. Prin înmulțirea relației (7.33) cu timpul elementar dt se obține relația

$$\boxed{\mathrm{d}\mathcal{E} = \mathrm{d}\mathcal{L}_a + \mathrm{d}\mathcal{L}_p}, \tag{7.34}$$

exprimînd *teorema energiei sub forma diferențială* în dinamica rigidului cu formularea :

Diferențiala energiei cinetice a unui rigid în mișcare este egală cu suma lucrurilor mecanice elementare ale tuturor solicitărilor exterioare, active și pasive, la care este supus rigidul respectiv.

Scanned with CamScanner

Teorema variației finite a energiei cinetice. Prin integrarea relației (7.34) în intervalul finit $[t_0, t]$ pentru termenii din membrul drept și între limitele $\mathscr{E}^0$ — energia cinetică în momentul inițial t_0 — și $\mathscr{E}$ — energia cinetică a rigidului în momentul final t — pentru termenul din membrul stîng se obține relația

$$\boxed{\mathscr{E} - \mathscr{E}^0 = \mathscr{L}_a + \mathscr{L}_p}, \tag{7.35}$$

exprimînd *teorema variației finite a energiei cinetice*, căreia i se dă formularea:

Variația, într-un interval oarecare de timp, a energiei cinetice a unui rigid în mișcare este egală cu suma lucrurilor mecanice efectuate în acel interval de toate solicitările exterioare, active și pasive, la care este supus rigidul respectiv.

2°. Legea de conservare a energiei mecanice

Energia potențială a unui rigid. În aplicațiile mecanicii se întîlnesc deseori situații cînd expresia ce definește lucrul mecanic elementar al unui anumit tip de distribuții de forțe active exterioare, reductibilă în polul Q la un torsor de componente $\overline{\mathscr{F}}_{ac}$ și $\overline{\mathscr{M}}_{ac_Q}$, se prezintă sub forma unei diferențiale totale a unei funcții U de parametrii de poziție ai rigidului și uneori și de timp, adică se poate scrie

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{ac} = \overline{\mathscr{F}}_{ac}\mathrm{d}\bar{r}_Q + \overline{\mathscr{M}}_{ac_Q}\mathrm{d}\bar{\Theta} = (\overline{\mathscr{F}}_{ac}\bar{v}_Q + \overline{\mathscr{M}}_{ac_Q}\bar{\omega})\mathrm{d}t = \mathrm{d}U. \tag{7.36}$$

În aceste cazuri forțele elementare sînt numite, din motive ce vor fi justificate mai tîrziu, forțe *elementare active conservative*, componentele $\overline{\mathscr{F}}_{ac}$ și $\overline{\mathscr{M}}_{ac_Q}$ ale torsorului lor în polul Q sînt numite *solicitări active conservative*, iar funcția U este numită *funcție de forță*.

De cele mai multe ori, distribuțiile de forțe elementare active conservative sînt echivalente unor rezultante unice, $\overline{\mathscr{F}}_{ac}$, aplicate în centrul de masă al rigidului, iar funcția de forță are forma

$$U = U(x_G(t),\ y_G(t),\ z_G(t)), \tag{7.37}$$

U fiind o funcție de t prin intermediul coordonatelor centrului de masă $G(x_G, y_G, z_G)$, U_i fiind valoarea acestei funcții la un moment t_i.

Scanned with CamScanner

Relația (7.37) poate fi interpretată însă ca exprimînd obligativitatea centrului de masă G al rigidului de a se situa pe o suprafață (Σ), determinată la momentul $t_i \in [t_0, t]$ prin ecuația

$$U(x, y, z) = U_i = U(x_G(t_i), y_G(t_i), z_G(t_i)), \tag{7.38}$$

o asemenea suprafață purtînd numele de *suprafață de nivel*; cu această interpretare se va putea scrie

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{ac} = \mathrm{d}U_G, \tag{7.39}$$

indicele $(_G)$ avînd rolul de a preciza că în ecuația suprafeței de nivel vor trebui înlocuite coordonatele curente x, y și z cu cele ale centrului de masă G.

Calculînd lucrul mecanic elementar total efectuat de un asemenea sistem de solicitări conservative într-un interval de timp cuprins între momentul inițial t_0 — căruia îi corespunde valoarea U_G^0 a funcției de forță și deci o suprafață de nivel (Σ_0), de ecuație

$$U(x, y, z) = U_G^0, \tag{7.40}$$

cu $U_G^0 = U(x_G(0), y_G(0)\, z_G(0)]$ — și între un moment final t — pentru care funcția de forță ia valoarea U_G, ei corespunzîndu-i suprafața de nivel (Σ), de ecuație

$$U(x,y,z) = U_G, \tag{7.41}$$

cu $U_G = U(x_G(t), y_G(t), z_G(t)$ —, se găsește următoarea valoare a acestui lucru mecanic

$$\mathscr{L}_{ac} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\mathscr{L}_{ac} = \int_{U_G^0}^{U_G} \mathrm{d}U = U_G - U_G^0, \tag{7.42}$$

care scoate în evidență depedența lui numai de valorile extreme, corespunzătoare celor două momente extreme t_0 și t, ale funcției de forță — deci de pozițiile celor două suprafețe de nivel extreme (Σ_0) și (Σ) pe care se va găsi centrul de masă al rigidului —, nu și de valorile intermediare ale funcției de forță, deci de modul de deplasare a centrului de masă de pe suprafața de nivel (Σ_0), pe suprafața (Σ).

Comparînd cele două expresii care pot fi scrise în această situație pentru lucrul mecanic elementar al forței conservative $\overline{\mathscr{F}_{ac}}$,

Scanned with CamScanner

adică

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{ac} = \overline{\mathscr{F}}_{ac}\,\mathrm{d}\bar{r}_G = \mathscr{F}_{acx}\,\mathrm{d}x_G + \mathscr{F}_{acy}\,\mathrm{d}y_G + \mathscr{F}_{acz}\,\mathrm{d}z_G \qquad (7.43)$$

şi

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{a_c} = \mathrm{d}U_G = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_G \mathrm{d}x_G + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_G \mathrm{d}y_G + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\mathrm{d}z_G, \qquad (7.44)$$

rezultă următoarea expresie a acestei forţe

$$\boxed{\overline{\mathscr{F}}_{ac} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_G \bar{i} + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_G \bar{j} + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_G \bar{k} = \mathrm{gra}\partial_G U} \qquad (7.45)$$

care evidenţiază proprietăţile ei, similare celora ale vectorului gradient :

— forţa conservativă este normală la suprafaţa de nivel în punctul în care se găseşte centrul de masă al rigidului ;

—forţa conservativă are totdeauna sensul înspre partea în care funcţia de forţă creşte.

Ţinînd seama de precizările precedente, rezultă că la deplasarea, sub acţiunea unei forţe conservative, a centrului de masă al unui rigid de pe o suprafaţă de nivel iniţială U_G^0, pe o suprafaţă de nivel $U_{G_{(1)}} < U_G^0$, (fig. 7.1), forţa conservativă respectivă va efectua un lucru mecanic rezistent

$$\mathscr{L}_{ac} = \int_{t_0}^{t} d\mathscr{L}_{ac} = \int_{U_G^0}^{U_{G_{(1)}}} \mathrm{d}U = U_{G_{(1)}} - U_G^0 < 0, \qquad (7.46)$$

ceea ce înseamnă că această deplasare nu va putea fi efectuată decît fie sub acţiunea unei alte forţe active, efectuînd un lucru mecanic motor care va compensa pe cel rezistent, fie, aşa cum se va arăta ulterior, ca urmare a unei energii cinetice iniţiale imprimate rigidului ; în schimb, trecerea, în continuare, de pe suprafaţa de nivel $U_{G_{(1)}}$, pe o suprafaţă de nivel $U_{G_{(2)}} > U_{G_{(1)}}$, (fig. 7.1), va putea

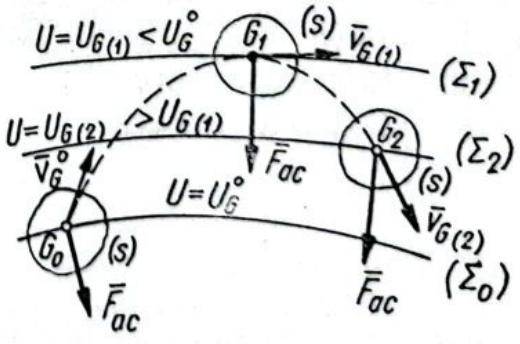


Fig. 7.1.

Scanned with CamScanner

avea loc, atunci cînd rigidului nu îi sînt impuse restricții, chiar sub acțiunea forței conservative, care va efectua acum un lucru mecanic motor

$$\mathcal{L}_{ac} = \int_{U_{G_{(1)}}}^{U_{G_{(2)}}} \mathrm{d}U = U_{G_{(2)}} - U_{G_{(1)}} > 0. \tag{7.47}$$

Se poate trage deci concluzia că lucrul mecanic motor consumat pentru compensarea lucrului mecanic rezistent al forței conservative la aducerea centrului de masă G al rigidului de pe suprafața de nivel U_G^0 pe suprafața de nivel $U_{G_{(1)}} < U_G^0$, nu se pierde, ci poate fi restituit sub formă de lucru mecanic motor, lăsînd rigidul să se deplaseze liber sub acțiunea forței conservative, care îl va putea readuce cu centrul de masă pe suprafața de nivel inițială.

Se spune, în aceste cazuri, că prin aducerea centrului de masă G de pe o suprafață de nivel inițială U_G^0, pe o suprafață de nivel $U_G < U_G^0$ rigidul a căpătat *energie de poziție*, sau *energie potențială*, ceastă de-a doua formă de energie mecanică, notată cu simbolul $\mathcal{E}_p$, fiind măsurată chiar prin lucrul mecanic pe care-l poate restitui forța conservativă prin revenirea centrului de masă pe suprafața de nivel inițială, adică se poate scrie

$$\mathcal{E}_p = \int_{U_G}^{U_G^0} \mathrm{d}U = U_G^0 - U_G = V_G - V_G^0 > 0, \tag{7.48}$$

funcția $V_G = -U_G$, introdusă frecvent în locul funcției de forță, purtînd numele de *funcție potențială*.

Întrucît funcția de forță — și deci și cea potențială — este determinată pînă la o constantă aditivă ($\mathrm{d}U = \mathrm{d}(U + C)$; $C = \text{const}$), se va putea alege totdeauna valoarea acestei constante astfel încît funcția de forță corespunzătoare poziției inițiale a centrului de greutate să fie zero ($U_G^0 = -V_G^0 = 0$); în acest caz energia potențială va avea expresia

$$\boxed{\mathcal{E}_p = -U_G = V_G,} \tag{7.49}$$

funcția V_G numindu-se acum *potențial* al forței conservative.

Scanned with CamScanner

Pentru practica inginerească mecanică prezintă interes următoarele două tipuri de solicitări conservative exterioare :

Solicitările gravifice (greutatea și momentul greutății). Considerînd mai întîi cazul mișcării spațiale a rigidului și orientînd axa Oz a reperului fix pe verticală și în sus (fig. 7.2), ($\bar{P} = -Mg\bar{k}$), va rezulta, prin alegerea polului legat de rigid în centrul de masă, ($\bar{\mathfrak{M}}_g(\bar{P}) = \bar{\mathcal{M}}_G(\bar{P}) = 0$), următoarea expresie pentru lucrul mecanic elementar al greutății :

$$\mathrm{d}\mathcal{L}_g = \bar{P}d\bar{r}_G = -Mg\mathrm{d}z_G = \mathrm{d}[-Mgz_G + C] = \mathrm{d}U_g \qquad (7.50)$$

și deci următoarea expresie pentru *funcția de forță gravifică* :

$$\boxed{U_G = -V_G = -Mgz_G + C}, \qquad (7.51)$$

C fiind constanta aditivă.

Ultima relație arată că în cazul acestei solicitări conservative suprafețele de nivel sînt plane orizontale (π_i) determinate prin ecuațiile

$$-Mgz = C_i = \text{const}, \qquad (7.52)$$

funcția de forță descrescînd pe măsură ce crește cota z (fig. 7.2).

În cazul unui rigid executînd o mișcare plan-paralelă orizontală ($z_G = z_G^0 = \text{const}$), lucrul mecanic elementar al greutății va fi, evident, egal cu zero ($\mathrm{d}(-Mgz_G^0 + C) = 0$).

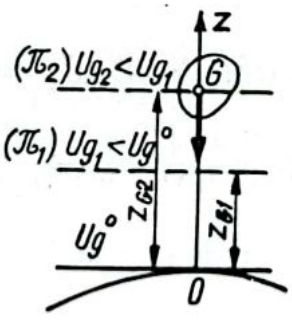


Fig. 7.2.

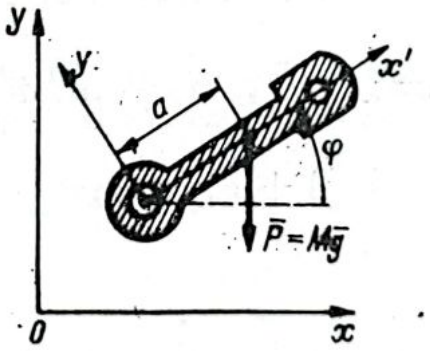


Fig. 7.3.

Considerînd, în continuare, cazul mișcării plan-paralele efectuate în plan vertical, ales ca plan de coordonate Oxy cu axa Oy orientată pe verticală și în sus (fig. 7.3), ($\bar{P} = -Mg\bar{j}$) și admițînd că polul

Scanned with CamScanner

Q nu mai coincide cu centrul de masă G, acesta din urmă aflîndu-se pe axa Qx', la distanţa a de polul Q, ($\overline{\mathcal{M}}_Q(\bar{P}) = \overline{\mathcal{M}}_Q(\bar{P}) = -Mg\,a\cos\varphi\bar{k}'$), lucrul mecanic al solicitărilor gravifice va fi dat de relaţia

$$\mathrm{d}\mathcal{L}_g = \bar{P}\mathrm{d}\bar{r}_Q + \overline{\mathcal{M}}_Q(\bar{P})\mathrm{d}\overline{\Theta} = -Mg\mathrm{d}y_Q - Mga\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \tag{7.53}$$

$$= \mathrm{d}[-Mg(y_Q + a\sin\varphi) + C] = \mathrm{d}U_g,$$

rezultînd de aici următoarea expresie a funcţiei de forţă gravifice

$$\boxed{U_g = -V_g = -Mg(y_Q + a\sin\varphi) + C}, \tag{7.54}$$

respectiv

$$\boxed{U_g = -V_g = -Mgy_G + C} \tag{7.55}$$

dacă polul Q coincide cu centrul de masă C, fiind, ca de obicei, constanta aditivă.

— *Solicitările elastice* (Componentele conservative ale forţei elastice şi momentului elastic). Considerînd modelul mai general de legătură elastică, permiţînd rigidului căruia îi este aplicată să execute o mişcare elicoidală, cu centrul de masă situat pe axa mişcării luată acum ca axă Ox ($\mathrm{d}\overline{\Theta} = \mathrm{d}\varphi\bar{i}$), lucrul mecanic elementar al componentelor conservative ale solicitărilor elastice, avînd expresiile (6.208), va fi determinat prin relaţia

$$\mathrm{d}\mathcal{L}_{ec} = \overline{\mathcal{F}}_{ec}\,\mathrm{d}\bar{r}_G + \overline{\mathcal{M}}_{ec}\mathrm{d}\overline{\Theta} = \overline{\mathcal{F}}_{ec}\,\mathrm{d}\bar{r}_G + \mathcal{M}_{ec}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= [-k_e(\bar{r}_G - \bar{r}_{G_{st}}) + \bar{F}_{e_{st}}]\mathrm{d}(\bar{r}_G - \bar{r}_{G_{st}}) + [-k_t(\varphi - \varphi_t) + \mathcal{M}_{e_{st}}]\mathrm{d}(\varphi - \varphi_{st}),$$

adică

$$\mathrm{d}\mathcal{L}_{ec} = \mathrm{d}\Big[-\frac{1}{2}k_e(\bar{r}_G - \bar{r}_{G_{st}})^2 + \bar{\mathcal{F}}_{e_{st}}(\bar{r}_G - \bar{r}_{G_{st}}) - \tag{7.56}$$

$$-\frac{1}{2}k_t(\varphi - \varphi_{st})^2 + \mathcal{M}_{e_{st}}(\varphi - \varphi_{st}) + C] = \mathrm{d}U_e,$$

Scanned with CamScanner

rezultînd de aici următoarea expresie pentru *funcţia de forţă elastică* :

$$\boxed{U_e = -V_e = -\frac{1}{2}\left[k_e(\bar{r}_G - \bar{r}_{G_{st}})^2 + k_t(\varphi - \varphi_{st})^2\right] + \\ + [\bar{\mathcal{F}}_{e_{st}}(\bar{r}_G - \bar{r}_{G_{st}}) + \mathcal{M}_{e_{st}}(\varphi - \varphi_{st})] + C} \quad , \quad (7.57)$$

sau încă

$$\boxed{U_e = -V_e = -\frac{1}{2}[k_e(x_G - x_{G_{st}})^2 + k_t(\varphi - \varphi_{st})^2] + \\ + [F_{e_{st}}(x_G - x_{G_{st}}) + \mathcal{M}_{e_{st}}(\varphi - \varphi_{st})] + C} \quad , \quad (7.58)$$

evident, cu particularizările corespunzătoare cazurilor cînd mişcarea rigidului se reduce la una singură dintre cele două mişcări componente, fie numai translaţia, fie numai rotaţia.

Integrala energiei. În continuare, se va considera o mişcare a rigidului efectuată în următoarele condiţii :

Mediul în care se deplasează rigidul opune o rezistenţă neglijabilă.

Considerînd rezistenţele mediului date de legea generală a lui Bernoulli (6.216), rezultă concluzia evidentă

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{R_z} = \int_{(A_a)} d\bar{R}_z \, \mathrm{d}\bar{r} = \int_{(A_a)} d\bar{R}_z \bar{v} \, \mathrm{d}t = -\int_{(A)} c|v|^{\lambda+1} dA \cos(\bar{v}, \bar{n}) < 0, \quad (7.59)$$

($\cos(\bar{v}, \bar{n}) > 0$), concluzie care rămîne valabilă şi în cazul legilor particulare ale lui Newton şi devine şi mai evidentă în cazul modelului din fig. 6.36, cu componentele torsorului, în centrul de masă, al rezistenţelor mediului avînd expresiile (6.223) ;

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{R_z} = \bar{R}_z d\bar{r}_G + \overline{\mathfrak{M}_G}(\bar{R}_z) \, \mathrm{d}\bar{\omega} = -(C_R \bar{v}_G^2 + k_R \bar{\omega}^2)\mathrm{d}t < 0. \quad (7.60)$$

În condiţiile posibilităţii de neglijare a rezistenţelor mediului ($c \approx 0$; $\bar{R}_z \approx 0$; $\overline{\mathfrak{M}_Q}(\bar{R}_z) \approx 0$), se va putea considera

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{R_z} = 0. \quad (7.61)$$

Scanned with CamScanner

Legăturile active aplicate rigidului sînt toate cu amortizare neglijabilă.

Componentele disipative ale torsorului rezistențelor de amortizare, corespunzătoare modelului mai general de legătură elastică considerat și în cazul solicitărilor conservative, avînd expresiile (6.225), vor da totdeauna un lucru mecanic rezistent

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{Rad} = \bar{R}_{ad}\mathrm{d}\bar{r}_C + \bar{\mathscr{M}}_{ad}\,\mathrm{d}\bar{\Theta} = -(C\bar{v}_a^2 + D\bar{\omega}^2)\,\mathrm{d}t < 0. \qquad (7.62)$$

În cazurile cînd aceste componente vor putea fi neglijate ($C \approx 0$; $D \approx 0$), se va putea considera

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{Ra} = 0 \qquad (7.63)$$

Legăturile pasive la care este supus rigidul sînt staționare și cu recare neglijabilă.

Avînd în vedere forma (6.237) a torsorului în polul C al reacțiunilor unei legături pasive — C fiind punctul teoretic de legătură —, se va putea scrie următoarea expresie pentru lucrul mecanic elementar al reacțiunilor unei astfel de legături:

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_R = \bar{R}\mathrm{d}\bar{r}_C + \overline{\mathfrak{M}}_C(\bar{R})\mathrm{d}\bar{\Theta} = [\bar{R}_{id}\,\mathrm{d}\bar{r}_C + \overline{\mathfrak{M}}_C(\bar{R}_{id})\mathrm{d}\bar{\Theta}] + \qquad (7.64)$$

$$+ [\bar{F}_{fr}\,\mathrm{d}\bar{r}_C + \bar{\mathscr{M}}_{fr}\,\mathrm{d}\bar{\Theta}] = \mathrm{d}\mathscr{L}_{Rid} + \mathrm{d}\mathscr{L}_{fr},$$

$\mathrm{d}\mathscr{L}_{Rid}$ fiind lucrul mecanic elementar al componentelor ideale ale reacțiunilor, iar $\mathrm{d}\mathscr{L}_{fr}$ fiind lucrul mecanic al componentelor disipative, numit încă și *lucru mecanic de frecare.*

Aplicînd această relație la calculul lucrului mecanic elementar al reacțiunilor diverselor tipuri de legături și cuple cinematice examinate în paragraful precedent, se pot trage următoarele concluzii, ușor de verificat:

— în cazul legăturilor pasive nestaționare lucrul mecanic elementar al reacțiunilor este totdeauna diferit de zero, el datorîndu-se atît componentelor ideale — ca urmare a orientărilor oarecare a parametrilor cinematici de ordinul întîi din punctul C ai mișcării absolute în raport cu solicitările ideale de legătură —, cît și componentelor disipative, rezultînd deci condiția

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_R = \mathrm{d}\mathscr{L}_{Rid} + \mathrm{d}\mathscr{L}_{fr} \neq 0; \qquad (7.65)$$

Scanned with CamScanner

—în cazul legăturilor pasive staţionare lucrul mecanic elementar al componentelor ideale ale torsorului reacţiunilor este totdeauna egal cu zero

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{Rid} \equiv 0, \tag{7.66}$$

ca urmare a ortogonalităţii vectorilor $\bar{v}_C$ şi $\bar{R}_{id}$, respectiv $\bar{\omega}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_C(\bar{R}_{id})$, în timp ce lucrul mecanic elementar al componentelor disipative este diferit de zero şi rezistent, putîndu-se scrie deci

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_R = \mathrm{d}\mathscr{L}_{fr} < 0; \tag{7.67}$$

— în cazul legăturilor staţionare şi cu frecare neglijabilă, ($\bar{F}_{fr} \approx 0$; $\overline{\mathscr{M}}_{fr} \approx 0$) va rezulta totdeauna condiţia

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_R \equiv 0. \tag{7.68}$$

Solicitările active aplicate rigidului admit o funcţie de forţă, adică se poate scrie

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_a = \mathrm{d}U = -\,\mathrm{d}V \tag{7.69}$$

Primele trei dintre condiţiile menţionate mai sus, exprimate prin relaţiile (7.61), (7.63) şi (7.68), conduc la concluzia

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_p = \mathrm{d}\mathscr{L}_{R_z} + \mathrm{d}\mathscr{L}_{R_a} + \mathrm{d}\mathscr{L}_R \equiv 0, \tag{7.70}$$

în baza căreia relaţia (7.34), exprimînd teorema energiei sub forma diferenţială, va lua, ţinînd seama şi de condiţia (7.69), forma

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = \mathrm{d}U = -\mathrm{d}V, \tag{7.71}$$

conducînd, prin integrare, la una din relaţiile

$$\boxed{\mathscr{E} = U + h} \quad \text{sau} \quad \boxed{\mathscr{E} + V = h}, \tag{7.72}$$

purtînd numele de *integrala energiei*; în relaţiile precedente, h este o constantă de integrare, numită *constanta energiei*, care poate fi determinată cu ajutorul valorilor iniţiale ale energiei cinetice şi funcţiei potenţiale ($h = \mathscr{E}^0 + V^0$).

Scanned with CamScanner

Formularea legii de conservare a energiei mecanice. În condițiile de valabilitate a integralei (7.72) a energiei și prin alegerea convenabilă a constantei aditive, astfel încît valoarea inițială a funcției potențiale să devină zero și deci funcția potențială să reprezinte chiar energia potențială a rigidului, relația (7.72) va putea fi scrisă sub forma

$$\boxed{\mathcal{E}_m = h,} \tag{7.73}$$

unde $\mathcal{E}_m = \mathcal{E} + \mathcal{E}_p$ va reprezenta *energia mecanică* a rigidului, această din urmă relație exprimînd *legea de conservare a energiei mecanice* în dinamica rigidului, cu următoarea formulare:

Energia mecanică a unui rigid supus la legături active cu amortizare neglijabilă și la legături pasive staționare și cu frecare neglijabilă, care se deplasează într-un mediu cu rezistență neglijabilă sub acțiunea unui sistem de solicitări active derivînd din o funcție de forță se conservă.

Trebuie de făcut precizarea însă că datorită transformărilor de energie mecanică în alte forme de energie — în deosebi calorică —, care au loc în toate procesele mecanice ca urmare a faptului că solicitările disipative nu sînt chiar zero, relația (7.73) nu poate fi verificată în mod riguros.

7.2. *Problemele și ecuațiile dinamicii rigidului*

7.2.1. Problemele dinamicii rigidului

Orice problemă de dinamica rigidului conține un număr de elemente date, sau posibile de stabilit pe baza datelor conținute în enunțul ei — caracteristici inerțiale, elemente scalare caracterizînd torsorii solicitărilor exterioare active și pasive etc, — precum și un număr total s de elemente scalare necunoscute, a căror determinare va constitui obiectivul ansamblului de operații care conduc la rezolvarea problemei de dinamică, între aceste necunoscute figurînd:

— un număr de p parametri de poziție rămași independenți în urma aplicărilor legăturilor pasive;

— un număr de r elemente scalare caracterizînd torsorul rezultant al reacțiunilor legăturilor pasive aplicate rigidului, reprezentate obișnuit prin moduli, sau valori scalare, ale unor componente ale reacțiunilor rezultante ideale, sau ale momentelor rezultante ale reacțiunilor ideale;

Scanned with CamScanner

— un număr de f elemente scalare caracterizînd torsorul rezultant al solicitărilor active aplicate rigidului, reprezentate, de cele mai multe ori, prin moduli sau prin braţe ale forţelor exterioare aplicate.

Rezultă deci relaţia:

$$s = p + r + f. \tag{7.74}$$

În mod obişnuit, problemele de dinamica rigidului întîlnite curent în aplicaţiile tehnice aparţin uneia din următoarele două categorii:

Probleme directe, în care se prestabilesc, pe baza unor consideraţii de ordin tehnologic, ecuaţiile finite ale mişcării rigidului:

$$\begin{cases} x_Q = x_Q(t); & y_Q = y_Q(t); & z_Q = z_Q(t); \\ \psi = \psi(t); & \varphi = \varphi(t); & \theta = \theta(t), \end{cases} \tag{7.75}$$

se precizează legăturile pasive aplicate rigidului şi se cere să se determine anumite elemente necunoscute caracterizînd torsorul solicitărilor exterioare active, precum şi elementele scalare necunoscute ale torsorului rezultant al reacţiunilor legăturilor pasive; aceste probleme, în care toţi parametrii de poziţie sînt cunoscuţi ca funcţii de timp, vor fi caracterizate prin condiţiile

$$p = 0; \quad s = r + f. \tag{7.76}$$

Probleme inverse sau *fundamentale*, în care, dîndu-se elementele ce caracterizează torsorul rezultant al solicitărilor exterioare active şi precizîndu-se legăturile aplicate rigidului, se cere să se determine parametrii de poziţie ai rigidului exprimaţi ca funcţii cunoscute de timp — deci ecuaţiile finite ale mişcării — , precum şi elementele scalare necunoscute din torsorii reacţiunilor legăturilor pasive.

Aceasta de a doua categorie de probleme de dinamica rigidului se va caracteriza prin condiţiile

$$f = 0; \quad s = p + r. \tag{7.77}$$

7.2.2. Forme ale ecuaţiilor dinamicii mişcării absolute generale a rigidului

Rezolvarea completă, atunci cînd este posibilă, a problemelor de dinamica mişcării absolute a rigidului se bazează, de regulă, pe utilizarea sistemului de ecuaţii de proiecţii pe axele unuia din cele

Scanned with CamScanner

două repere — fix și invariabil legat de rigid — ale relațiilor vectoriale exprimînd teoremele torsorului impulsurilor.

Din acest motiv, cele două relații amintite — relația exprimînd teorema impulsului și relația exprimînd teorema momentului cinetic — au fost numite *ecuațiile vectoriale ale dinamicii mișcării absolute a rigidului*, iar sistemul echivalent de ecuații scalare de proiecții pe axele unuia din cele două repere au fost numite *ecuațiile scalare ale dinamicii mișcării absolute a rigidului.*

În funcție de reperul pe care urmează să se facă proiectarea ecuațiilor vectoriale ale mișcării pot fi deosebite următoarele trei forme principale ale ecuațiilor scalare ale dinamicii mișcării absolute a rigidului:

1°. Forma întîi a ecuațiilor dinamicii rigidului. În cadrul acestei prime forme, ecuațiile vectoriale ale dinamicii rigidului sînt reprezentate prin relațiile exprimînd teoremele torsorului impulsurilor în raport cu polul fix, adică prin relațiile

$$\boxed{\dot{\bar{\mathscr{H}}} = \bar{F}_a + \bar{F}_p;\ \dot{\bar{\mathscr{K}}} = \bar{\mathfrak{M}}_a + \bar{\mathfrak{M}}_p}, \tag{7.78}$$

iar ecuațiile scalare ale dinamicii rigidului prin ecuațiile de proiecții pe axele reperului fix ale ecuațiilor vectoriale de mai sus, adică

$$\boxed{\begin{array}{l}(1)\ \dot{\mathscr{H}}_x = \mathscr{F}_{a_x} + \mathscr{F}_{p_x};\ (2)\ \dot{\mathscr{H}}_y = \mathscr{F}_{a_y} + \mathscr{F}_{p_y};\ (3)\ \dot{\mathscr{H}}_z = \mathscr{F}_{a_z} + \mathscr{F}_{p_z};\\ (4)\ \dot{\mathscr{K}}_x = \mathfrak{M}_{a_x} + \mathfrak{M}_{p_x};\ (5)\ \dot{\mathscr{K}}_y = \mathfrak{M}_{a_y} + \mathfrak{M}_{p_y};\ (6)\ \dot{\mathscr{K}}_z = \mathfrak{M}_{a_z} + \mathfrak{M}_{p_z}.\end{array}} \tag{7.79}$$

Aceste ecuații sînt utilizate, de regulă, în următoarele două situații:

— la rezolvarea problemelor directe, îndeosebi în cazurile cînd polul legat de rigid nu coincide cu centrul de masă al acestuia;

— la rezolvarea problemelor de tip fundamental, în cazurile cînd parametrii de poziție independenți, care trebuie determinați ca funcții de timp, sînt reprezentați numai prin coordonatele carteziene ale polului legat de rigid, nu și prin unghiuri ale lui Euler, considerate prestabilite, cunoscute ca funcții de timp.

Scanned with CamScanner

2°. Forma a doua a ecuațiilor dinamicii rigidului. În cadrul acestei de-a doua forme, ecuațiile vectoriale ale dinamicii vor fi reprezentate prin relația exprimînd teorema impulsului sub forma generală și prin relația exprimînd teorema momentului cinetic în raport cu polul invariabil legat de rigid, scrise însă, prin descompunerea derivatei absolute — conform relației (5.26) — în cele două componente ale ei — derivata relativă și derivata de transport — sub forma

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,[\overline{\mathscr{H}}]_r + \bar{\omega}\times\overline{\mathscr{H}} = \overline{\mathscr{F}}_a + \overline{\mathscr{F}}_p \\ &M\bar{r}'_G\times\bar{a}_Q + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[\overline{\mathscr{K}}_{Q_{rot}}]_r + \bar{\omega}\times\overline{\mathscr{K}}_{Q_{rot}} = \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} + \overline{\mathfrak{M}}_{p_Q} \end{aligned}\right\}, \tag{7.80}$$

iar ecuațiile scalare ale dinamicii vor fi obinute prin proiectarea relațiilor precedente pe axele reperului legat de rigid, aceste ecuații avînd deci formele

$$\begin{aligned}
&(1)\ \dot{\mathscr{H}}'_x + \omega'_y\mathscr{H}'_z - \omega'_z\mathscr{H}'_y = \mathscr{F}'_{a_x} + \mathscr{F}'_{p_x};\\
&(2)\ \dot{\mathscr{H}}'_y + \omega'_z\mathscr{H}'_x - \omega'_x\mathscr{H}'_z = \mathscr{F}'_{a_y} + \mathscr{F}'_{p_y};\\
&(3)\ \dot{\mathscr{H}}'_z + \omega'_x\mathscr{H}'_y - \omega'_y\mathscr{H}'_x = \mathscr{F}'_{a_z} + \mathscr{F}'_{p_z};\\
&(4)\ M(y'_Ga'_{Q_z} - z'_Ga'_{Q_y}) + \dot{\mathscr{K}}'_{Qrot_x} + \omega'_y\mathscr{K}'_{Qrot_z} - \omega'_z\mathscr{K}'_{Qrot_y} = \mathfrak{M}'_{a_{Q_x}} + \mathfrak{M}'_{p_{Q_x}};\\
&(5)\ M(z'_Ga'_{Q_x} - x'_Ga'_{Q_z}) + \dot{\mathscr{K}}'_{Qrot_y} + \omega'_z\mathscr{K}'_{Qrot_x} - \omega'_x\mathscr{K}'_{Qrot_z} = \mathfrak{M}'_{a_{Qy}} + \mathfrak{M}'_{p_{Qy}};\\
&(6)\ M(x'_Ga'_{Q_y} - y'_Ga'_{Q_x} + \dot{\mathscr{K}}'_{Qrot_z} + \omega'_x\mathscr{K}'_{Qrot_y} - \omega'_y\mathscr{K}'_{Qrot_x} = \mathfrak{M}'_{a_{Q_z}} + \mathfrak{M}'_{p_{Q_z}}
\end{aligned} \tag{7.81}$$

(Se reamintește faptul că la derivarea relativă versorii axelor reperului legat de rigid trebuie considerați constanți).

Scanned with CamScanner

Ecuaţiile precedente sînt utilizate în problemele de tip fundamental în toate cazurile cînd parametrii de poziţie independenţi, care trebuie determinaţi ca funcţii de timp, sînt reprezentaţi numai prin unghiuri ale lui Euler.

3°. Forma a treia a ecuaţiilor dinamicii rigidului. Ecuaţiile vectoriale ale dinamicii rigidului corespunzătoare celei de-a treia forme sînt reprezentate prin relaţiile exprimînd teorema mişcării centrului de masă şi teorema momentului cinetic în raport cu centrul de masă, cu derivata absolută a momentului cinetic descompusă şi acum în cele două componente ale ei, relativă şi de transport; aceste ecuaţii vor avea deci formele

$$\boxed{\begin{aligned} M\bar{a}_G &= \overline{\mathscr{F}}_a + \overline{\mathscr{F}}_p \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\overline{\mathscr{K}}_G]_r + \bar{\omega} \times \overline{\mathscr{K}}_G &= \overline{\mathfrak{M}}_{a_G} + \overline{\mathfrak{M}}_{p_G} \end{aligned}} \qquad (7.82)$$

Ecuaţiile scalare ale dinamicii rigidului sub forma a treia vor fi reprezentate prin ecuaţiile de proiecţii pe axele reperului fix a primei dintre ecuaţiile (7.82) şi prin ecuaţiile de proiecţii pe axele reperului legat de rigid, orientate după axele centrale de inerţie, ale relaţiei exprimînd teorema momentului cinetic în raport cu centrul de masă, aceste ecuaţii avînd deci formele

$$\boxed{\begin{aligned} &(1)\ M\ddot{x}_G = \mathscr{F}_{a_x} + \mathscr{F}_{p_x};\ (2)\ M\ddot{y}_G = \mathscr{F}_{a_y} + \mathscr{F}_{p_y};\ (3)\ M\ddot{z}_G = \mathscr{F}_{a_z} + \mathscr{F}_{p_z}; \\ &(4)\ J'_x\dot{\omega}'_x + (J'_z - J'_y)\omega'_y\omega'_z = \mathfrak{M}'_{a_{Qx}} + \mathfrak{M}'_{p_{Qx}}; \\ &(5)\ J'_y\dot{\omega}'_y + (J'_x - J'_z)\omega'_x\omega'_z = \mathfrak{M}'_{a_{Qy}} + \mathfrak{M}'_{p_{Qy}}; \\ &(6)\ J'_z\dot{\omega}'_z + (J'_y - J'_x)\omega'_x\omega'_y = \mathfrak{M}'_{a_{Qz}} + \mathfrak{M}'_{p_{Qz}} \end{aligned}} \qquad (7.83)$$

Ultimele trei ecuaţii din sistemul (7.83) sînt cunoscute în literatura de specialitate sub denumirea de *ecuaţiile lui Euler cores-*

punzătoare rotației instantanee a rigidului în jurul centrului său de masă.

Se verifică cu ușurință că sistemul (7.83) de ecuații scalare ale dinamicii poate căpăta următoarea transcriere matriceală:

$$\boxed{\begin{array}{c} M\ddot{\mathbf{r}}_G = \boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{F}_p \\ \boldsymbol{J}'_G\boldsymbol{\varepsilon}' + (\tilde{\boldsymbol{\omega}}'\boldsymbol{J}'_G)\boldsymbol{\omega}' = \mathfrak{M}'_{a_G} + \mathfrak{M}'_{p_G} \end{array}} \tag{7.84}$$

cu

$$\boldsymbol{F}_a = \left\| \begin{matrix} \mathcal{F}_{a_x} \\ \mathcal{F}_{a_y} \\ \mathcal{F}_{a_z} \end{matrix} \right\|; \quad \boldsymbol{F}_p = \left\| \begin{matrix} \mathcal{F}_{p_x} \\ \mathcal{F}_{p_y} \\ \mathcal{F}_{p_z} \end{matrix} \right\|; \quad \mathfrak{M}'_{a_G} = \left\| \begin{matrix} \mathfrak{M}'_{a_{Gx}} \\ \mathfrak{M}'_{a_{Gy}} \\ \mathfrak{M}'_{a_{Gz}} \end{matrix} \right\|; \quad \mathfrak{M}'_{p_G} = \left\| \begin{matrix} \mathfrak{M}'_{p_{Gx}} \\ \mathfrak{M}'_{p_{Gy}} \\ \mathfrak{M}'_{p_{Gz}} \end{matrix} \right\|, \tag{7.85}$$

cu matricea tensorului de inerție având forma (6.75).

Ecuațiile scalare ale dinamicii rigidului sub forma a treia sînt utilizate, în deosebi, la rezolvarea problemelor de tip fundamental în toate cazurile cînd parametrii de poziție independenți, care trebuie determinați ca funcții de timp, sînt reprezentați atît prin coordonate ale centrului de masă, cît și prin unghiuri ale lui Euler (cel puțin unul din ele).

7.2.3. Rezolvarea problemelor de dinamica mișcării absolute a rigidului

Prezentarea precedentă a diverselor forme ale ecuațiilor scalare ale dinamicii mișcării absolute a rigidului permite să se tragă concluzia că pentru o problemă de dinamica mișcării generale a unui rigid se dispune de un număr total de

$$\mathrm{e} = 6 \tag{7.86}$$

ecuații scalare de mișcare, scrise sub una din cele trei forme menționate mai sus, acest număr putînd deveni și mai mic de 6 în cazul unor mișcări particulare, așa cum se va arăta ulterior.

Se înțelege de aici că o *condiție necesară* pentru *rezolvarea completă* a unei probleme de dinamica mișcării absolute generale a rigidului va fi satisfacerea relației

$$\mathrm{e} = \mathrm{s} = \mathrm{p} + \mathrm{r} + \mathrm{f} = 6 \tag{7.87}$$

Scanned with CamScanner

cu

$$e = s = r + f = 6 \tag{7.88}$$

în cazul problemelor de tip direct şi cu

$$e = s = p + r = 6 \tag{7.89}$$

în cazul problemelor de tip fundamental.

În ipoteza că este satisfăcută condiţia (7.88), rezolvarea problemelor de tip direct nu întîmpină nici un fel de dificultăţi matematice, deoarece operaţiile ce trebuie efectuate se reduc la nişte derivări succesive în raport cu timpul ale parametrilor de poziţie în vederea completării termenilor din membrul stîng al ecuaţiilor (7.79) şi la rezolvarea, în continuare, a unui sistem de ecuaţii algebrice în reacţiunile legăturilor şi solicitărilor active necunoscute ale problemei; importanţa pentru aplicaţiile tehnice a acestei categorii de probleme este însă cu totul neînsemnată, deoarece practic nu vor putea fi realizate legile de variaţie în timp pentru solicitările active, ce vor fi deduse din ecuaţiile de mişcare.

Rezolvarea, în schimb, a problemelor de tip fundamental întîmpină, chiar în cazul satisfacerii condiţiei necesare (7.89), serioase dificultăţi de ordin matematic, datorită complexităţii, în această situaţie, a sistemului de ecuaţii scalare ale mişcării.

Într-adevăr, pe de o parte, în termenii din membrul stîng al ecuaţiilor scalare de mişcare vor figura, prin intermediul proiecţiilor impulsului şi momentului cinetic, parametrii de poziţie ai rigidului, precum şi derivatele lor de ordinul întîi şi doi în raport cu timpul.

Pe de altă parte, în membrul drept al ecuaţiilor scalare de mişcare vor figura, în afara celor r mărimi algebrice necunoscute, reprezentate prin reacţiunile ideale ale legăturilor pasive, şi termeni care vor fi funcţii, mai mult sau mai puţin complicate, de parametrii de poziţie ai rigidului, de derivatele lor în raport cu timpul şi eventual şi de timp explicit, provenind de la solicitările active şi pasive cunoscute (de ex., solicitări elastice, solicitări disipative de amortizare, solicitări de excitaţie etc).

De asemenea, va trebui să se ţină seama şi de faptul că numai un număr de p dintre funcţiile necunoscute de timp reprezentate prin parametrii de poziţie ai rigidului sînt independente între ele, restul de 6-p depinzînd de primele în baza ecuaţiilor de legătură impuse de cuplele cinematice aplicate rigidului.

Scanned with CamScanner

Observaţiile precedente justifică următoarea schemă principială de rezolvare a problemelor de tip fundamental de dinamica rigidului :

Etapa I : separarea sistemului de ecuaţii diferenţiale ale mişcării rigidului, realizabilă prin următoarele operaţii :

— eliminarea, cu ajutorul unui număr de r dintre cele e = 6 ecuaţii scalare ale mişcării, a celor r reacţiuni necunoscute, care, înlocuite în restul de p = e—r ecuaţii, vor permite să se obţină un sistem de p ecuaţii diferenţiale de ordinul doi în general în 6 funcţii necunoscute de timp, reprezentate prin cei 6 parametri de poziţie ai rigidului ;

— exprimarea, cu ajutorul celor l = r = e — p ecuaţii de legătură introduse de cuplele cinematice aplicate rigidului, a celor (e—p) parametrii de poziţie dependenţi în funcţie de cei p independenţi şi introducerea lor în sistemul precedent de p ecuaţii diferenţiale, care va deveni astfel un sistem de p ecuaţii diferenţiale de ordinul doi în p funcţii necunoscute de timp, independente între ele ; acest ultim sistem poartă numele de *sistemul de ecuaţii diferenţiale ale mişcării rigidului* şi prin notarea parametrilor de poziţie independenţi cu simbolurile $w_1, w_2, \ldots, w_p$, el va avea forma generală

$$F_i(w_1,\ w_2,\ldots,w_p\ ;\ \dot{w}_1,\ \dot{w}_2\ldots,\dot{w}_p\ ;\ \ddot{w}_1,\ \ddot{w}_2,\ldots,\ddot{w}_p\ ;t) = 0 \quad (7.90)$$
$$(i = 1,2,\ldots,p).$$

Etapa a II-a : determinarea ecuaţiilor finite ale mişcării rigidului, prin efectuarea următoarelor operaţii :

— integrarea sistemului de ecuaţii diferenţiale (7.90), obţinându-se astfel soluţia generală de forma

$$w_i = w_i(t\ ;\ C_1,C_2,\ldots,C_2p), \quad (7.91)$$
$$(i = 1,2\ldots,p)$$

$C_1, C_2,\ldots C_{2p}$ fiind constate de integrare.

Trebuie făcută precizarea că această operaţie prezintă cel mai înalt grad de dificultate matematică, ea nefiind chiar totdeauna posibilă, cel puţin prin metode exacte, datorită caracterului, în general neliniar, al ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării ; de asemenea, mai trebuie menţionat faptul că uneori integrarea sistemului de ecuaţii diferenţiale ale mişcării poate fi sensibil uşurată prin utilizarea unor integrale prime — cum sînt integralele impulsului, integralele momentului cinetic, sau integrala energiei—, aceasta însă, evident, numai în condiţiile de valabilitate a integralelor respective ;

Scanned with CamScanner

— determinarea constantelor de integrare prin introducerea *condițiilor inițiale de poziție și viteză*

$$t = 0 \{w_i(0) = w_i^0 ; \quad \dot{w}_i(0) = \dot{w}_i^0\} \qquad (i = 1,2,..,p) \tag{7.92}$$

în sistemele de ecuații

$$w_i = w_i(t ; C_1,...,C_{2p}) ; \quad \dot{w}_i = \dot{w}_i(t ; C_1,...,C_{2p}), \qquad (i=1,2,...,p) \tag{7.93}$$

rezultînd astfel sistemul de ecuații algebrice

$$w_i^0 = w_i(0 ; C_1, \ldots, C_{2p}) ; \quad \dot{w}_i^0 = \dot{w}_i(0 ; \quad C_1, \ldots, C_{2p}), \qquad (i = 1,2,..\text{p}) \tag{7.94}$$

în cele 2 p constante de integrare, cu rădăcinile

$$C_j = C_j(w_i^0 ; \quad \dot{w}_i^0), \quad (j = 1,2,\ldots 2^0) ; \tag{7.95}$$

— determinarea soluției particulare, corespunzătoare condițiilor inițiale (7.92), a sistemului de ecuații diferențiale ale mișcării rigidului, prin înlocuirea constantelor de integrare din soluția generală (7.91) cu valorile (7.96), rezultînd astfel

$$w_i = w_i(t ; \ w_i^0, \ldots, w_p^0 ; \ \dot{w}_i^0, \ldots, \dot{w}_p^0) \qquad (i = 1,2,\ldots,p] ; \tag{7.96}$$

— exprimarea, cu ajutorul celor $l = \text{e} - \text{p}$ ecuații de legătură, a parametrilor de poziție dependenți în funcție de cei independenți și deci, prin intermediul lor, ca funcțiuni cunoscute de timp.

Etapa a III-a; *calculul reacțiunilor necunoscute ale legăturilor pasive aplicate rigidului*, realizabil prin :

— revenirea la sistemul inițial de r ecuații care au permis eliminarea reacțiunilor necunoscute, înlocuindu-se în aceste ecuații parametrii de poziție ai rigidului și derivatele lor de ordinul întîi și doi în raport cu timpul prin funcțiile de timp găsite în etapa precedentă, respectiv prin derivatele lor de ordinul întîi și doi în raport cu timpul.

Scanned with CamScanner

7.3. *Problemele şi ecuaţiile staticii rigidului*

7.3.1. Problemele staticii rigidului

Statica rigidului reprezintă un caz particular al dinamicii, corespunzător condiţiilor cinematice

$$\bar{v}_Q \equiv 0\,; \quad \bar{\omega} \equiv 0, \tag{7.97}$$

care evidenţiază existenţa stării inerţiale de repaus, sau de *echilibru static* cum mai este numită această stare, a rigidului.

În consecinţă, problemele staticii rigidului vor conţine, în general, aceleaşi elemente scalare necunoscute care figurează şi în problemele de dinamică, în număr total de

$$s = p + r + f, \tag{7.98}$$

cu singura deosebire că parametrii de poziţie independenţi care vor trebui determinaţi nu vor mai fi funcţii de timp, ci vor avea valori constante, corespunzătoare poziţiei de echilibru a rigidului.

Problemele de statică pentru care este satisfăcută condiţia

$$e = s = p + r + f \tag{7.99}$$

se numesc *static determinate* şi numai ele vor fi luate în consideraţie în cadrul disciplinei de mecanică; problemele corespunzătoare condiţiei

$$e < s = p + r + f \tag{7.100}$$

se numesc *static nedeterminate* şi rezolvarea lor este uneori posibilă în cadrul altor discipline (de exemplu în rezistenţa materialelor, introducîndu-se ipoteze suplimentare de lucru).

Ca şi în dinamică şi în statică problemele static determinate pot fi împărţite în două mari categorii;

— *probleme directe*, în care poziţia de echilibru static a rigidului este cunoscută şi se cere să se determine reacţiunile şi solicitările active necunoscute, aceste probleme caracterizîndu-se prin condiţiile

$$p = 0\,; \quad e = s = r + f\,; \tag{7.101}$$

— *probleme inverse*, în care cel puțin unul dintre parametrii de poziție corespunzător poziției de echilibru a rigidului trebuie determinat, împreună cu reacțiunile necunoscute ale legăturilor aplicate lui.

7.3.2. Ecuațiile staticii rigidului

Ecuațiile corespunzătoare stării de echilibru a unui rigid vor rezulta și ele prin particularizarea ecuațiilor vectoriale ale dinamicii rigidului pe baza condițiilor cinematice (7.97), cu consecințele

$$\overline{\mathscr{R}} = \overline{\mathscr{R}}(\bar{v}_Q, \bar{\omega}) \equiv 0\,; \quad \overline{\mathscr{K}} = \overline{\mathscr{K}}(\bar{v}_Q, \bar{\omega}) \equiv 0, \tag{7.102}$$

și deci

$$\dot{\overline{\mathscr{R}}} \equiv 0\,; \quad \dot{\overline{\mathscr{K}}} \equiv 0. \tag{7.103}$$

Rezultă astfel următoarele *condiții necesare* de echilibru :

$$\overline{\mathscr{F}}_a + \overline{\mathscr{F}}_p = \overline{\mathscr{F}}_{ext} \equiv 0\,; \quad \overline{\mathfrak{M}}_a + \overline{\mathfrak{M}}_p = \overline{\mathfrak{M}}_{ext} \equiv 0, \tag{7.104}$$

remarcîndu-se însă că ele nu sînt și suficiente, deoarece în aceste condiții rigidul poate executa și mișcări inerțiale, în baza legilor de conservare a impulsului și momentului cinetic, dacă parametrii cinematicii de ordinul întîi inițiali $\bar{v}_Q^0$ și $\bar{\omega}^0$, sînt diferiți de zero.

Rezultă de aici următoarea formulare completă a condițiilor de echilibru :

Condițiile necesare și suficiente pentru ca un rigid, supus la anumite legături pasive și la anumite solicitări active, să rămînă în echilibru sînt :

— rigidul să se găsească în stare de repaos în momentul aplicării solicitărilor exterioare active și pasive :

— sistemul solicitărilor exterioare, active și pasive, la care este supus rigidul, să formeze un sistem echivalent cu zero.

Admițind că torsorul rezultant al solicitărilor active la care este supus rigidul este format dintr-un număr de n torsori componenți, $(\bar{F}_i, \overline{\mathfrak{M}}_i)$, $(i = 1,2,..,n)$, cu

$$\overline{\mathfrak{M}}_i = \overline{\mathscr{M}}_i = \overline{\mathscr{M}}(\bar{F}_i) \tag{7.105}$$

dacă torsorii sînt reductibili, în punctele teoretice de aplicație, la rezultante unice (cazul forțelor așa zise „concentrate") și că torsorul

Scanned with CamScanner

rezultant al solicitărilor pasive — reprezentate, în cazul echilibrului, numai prin reacţiunile rezultante şi momentele rezultante ale reacţiunilor legăturilor pasive aplicate rigidului — este format dintr-un număr de m torsori componenţi $(\bar{R}_j ; \overline{\mathfrak{M}}\ (\bar{R}_j))\, j = 1,2..., m)$, va rezulta următoarea formă pentru condiţiile de echilibru (7.104)

$$\boxed{\sum_i \bar{F}_i + \sum_j \bar{R}_j^0 = 0 ; \quad \sum_i \overline{\mathfrak{M}}_i + \sum_j \overline{\mathfrak{M}}(\bar{R}_j) = 0} \qquad (7.106)$$

ele purtînd acum numele de *ecuaţii vectoriale de echilibru al rigidului.*

Prin proiectarea pe axele de coordonate ale unui reper cartezian triortogonal — aceasta putînd fi, în problemele de statică, fie un reper fix *Oxyz*, la care se raportează poziţia de echilibru a rigidului, fie un reper *Qx'y'z'* ales convenabil în rigid şi care poate coincide cu reperul fix în cazul cînd poziţia de echilibru este cunoscută — a ecuaţiilor vectoriale (7.107), se obţine *sistemul de ecuaţii scalare de echilibru al rigidului*; cel mai adesea proiectarea se face pe axele reperului fix *Oxyz*, rezultînd în această situaţie ecuaţiile;

$$\boxed{\begin{gathered}(1)\ \sum_i F_{ix} + \sum_j R_{jx} = 0 ;\ (2)\ \sum_i F_{iy} + \sum_j R_{jy} = 0 ;\ (3)\ \sum_i F_{iz} + \sum_j R_{jz} = 0 ; \\ (4)\ \sum_i \mathfrak{M}_{ix} + \sum_j \mathfrak{M}_x(\bar{R}_j) = 0 ;\ (5)\ \sum_i \mathfrak{M}_{iy} + \sum_j \mathfrak{M}_y(\bar{R}_j) = 0 ; \\ (6)\ \sum_i \mathfrak{M}_{iz} + \sum_j \mathfrak{M}_z(\bar{R}_j) = 0\end{gathered}} \qquad (7.107)$$

adică un număr total de

$$e = e_f + e_m = 6 \qquad (7.108)$$

ecuaţii scalare de echilibru, $e_f = 3$ fiind numărul de *ecuaţii de proiecţii ale forţelor*, iar $e_m = 3$ fiind numărul de *ecuaţii de momente axiale.*

Numărul de ecuaţii scalare de echilibru devine mai mic de 6 în următoarele situaţii particulare de solicitare a rigidului:

Rigidul supus la solicitări plane (forţe şi cupluri situate în acelaşi plan). Alegînd planul forţelor ca plan de coordonate *Oxy*, numărul de ecuaţii de echilibru se reduce la

$$e_f = 2 ; \quad e_m = 1 ; \quad e = e_f + e_m = 3, \qquad (7.109)$$

Scanned with CamScanner

acestea fiind reprezentate prin ecuaţiile (1), (2) şi (6) din sistemul (7.107) — în ultima înlocuindu-se însă momentele faţă de axa Oz cu valorile scalare ale momentelor raportate la versorul $\bar{k}$, adică prin ecuaţiile

$$\boxed{\sum_i F_{iz} + \sum_j R_{jz} = 0\,; \quad \sum_i F_{iy} + \sum_j R_{jy} = 0\,; \quad \sum_i \mathfrak{M}_i + \sum_j \mathfrak{M}(\bar{R}_j) = 0} \tag{7.110}$$

Se va demonstra, în continuare, că în locul sistemului precedent de ecuaţii de echilibru poate fi folosit un sistem echivalent de 3 ecuaţii de valori scalare pentru momente, scrise în raport cu 3 poli, O_k, (k = 1,2,3), situate în planul solicitărilor, dar necoliniare, adică un sistem de forma

$$\boxed{\sum_i \mathfrak{M}_{iO_k} + \sum_j \mathfrak{M}_{O_k}(\bar{R}_j) = 0, \quad (k=1,2,3)} \tag{7.111}$$

Într-adevăr, în condiţiile precedente, care mai pot fi scrise concentrat sub următoarea formă vectorială

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ext\,O_k} = 0, \ (k = 1,2,3), \tag{7.112}$$

este inclusă de fapt şi condiţia

$$\overline{\mathscr{F}}_{ext} = \overline{\mathscr{F}}_a + \overline{\mathscr{F}}_p = \sum_i \overline{\mathscr{F}}_i + \sum_j \bar{R}_j = 0, \tag{7.113}$$

deoarece în cazul plan fiind valabilă teorema lui Varignon, sînt satisfăcute condiţiile

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ext\,O_k} = \overline{\mathfrak{M}}_{O_k}(\overline{\mathscr{F}}_{ext}) = 0, \quad (k=1,2,3) \tag{7.114}$$

cu singura soluţie posibilă reprezentată, datorită necoliniarităţii polilor O_k, prin condiţia (7.113).

Rigidul solicitat de forţe paralele în spaţiu. Prin orientarea axei *Oz* după direcţia comună a forţelor paralele ($\bar{F}_i = F_{iz}\bar{k} = F_i\bar{k}_i$; $\mathfrak{M}_{iz} = 0$), rezultă un număr de

$$e_l = 1\,; \ e_m = 2\,; \ e = e_l + e_m = 3 \tag{7.115}$$

Scanned with CamScanner

ecuaţii scalare de echilibru, reprezentate prin ecuaţiile (3), (4) şi (5) din sistemul (7.107), în prima dintre ele înlocuindu-se însă proiecţiile forţelor cu valorile lor scalare raportate la versorul $\bar{k}$.

Rigidul solicitat de forţe paralele în plan. Prin alegerea planului forţelor ca plan de coordonate *Oxy* şi prin orientarea axei *Oy* după direcţia comună a forţelor paralele, ($\bar{F}_i = F_{iy}\bar{j} = F_i\bar{j}$; $\overline{\mathfrak{M}}_i = \mathfrak{M}_i\bar{k}$), rezultă un număr de

$$e_f = 1;\ e_m = 1;\ e = e_f + e_m = 2 \tag{7.116}$$

ecuaţii scalare de echilibru, reprezentate prin ecuaţiile (2) şi (6) din sistemul (7.107), în ambele înlocuindu-se însă proiecţiile prin valori scalare ale forţelor, respectiv momentelor.

Folosind un raţionament identic celui de la cazul forţelor situate în plan, se poate demonstra şi aici că în locul ecuaţiilor de echilibru menţionate mai sus se pot folosi două ecuaţii de valori scalare ale momentelor scrise în raport cu doi poli situaţi în planul forţelor paralele, dar nu pe aceeaşi paralelă la direcţia comună a forţelor.

Rigidul solicitat de forţe concurente. Ca urmare a valabilităţii, în aceste condiţiuni, a teoremei lui Varignon, care permite să se scrie

$$\sum_i \overline{\mathfrak{M}}_i + \sum_j \overline{\mathfrak{M}}(\bar{R}_j) = \overline{\mathfrak{M}}_{ext} = \overline{\mathfrak{M}}(\bar{F}_{ext}) = \bar{r} \times (\sum_i \bar{F}_i + \sum_j \bar{R}_j),$$

$\bar{r}$ fiind vectorul de poziţie al punctului comun de aplicaţie al forţelor în raport cu polul faţă de care se consideră momentele, ecuaţia vectorială de echilibru pentru momente apare ca o consecinţă a ecuaţiei de echilibru pentru forţe; în consecinţă, în aceste cazuri se va scrie numai prima dintre ecuaţiile vectoriale (7.106), ei corespunzîndu-i un număr de

$$e = e_f = 3 \tag{7.117}$$

ecuaţii scalare de echilibru dacă forţele au orientări oarecare în spaţiu şi un număr de

$$e = e_f = 2 \tag{7.118}$$

ecuaţii scalare de echilibru în cazul plan (forţele situate în planul *Oxy*), aceste ecuaţii fiind reprezentate prin primele trei, respectiv două în cazul plan, dintre ecuaţiile (7.107).

Scanned with CamScanner

7.3.3. Rezolvarea problemelor de statica rigidului

Precizările făcute în cadrul subpunctului precedent permit să se tragă concluzia că soluționarea unei probleme de echilibru static determinate va consta în rezolvarea unui sistem de e = s ecuații algebrice — sau, uneori, trigonometrice — în tot atîtea necunoscute. În consecință eventualele dificultăți de ordin matematic în soluționarea unei astfel de probleme vor proveni, de cele mai multe ori, din numărul mare de necunoscute conținute în ecuațiile de echilibru.

Alegerea convenabilă a reperului în raport cu care vor fi scrise ecuațiile de echilibru, bazată pe observația că echivalența cu zero a sistemului de solicitări exterioare aplicate rigidului în echilibru este independentă de pol și de reperul ales pentru proiectarea ecuațiilor vectoriale de echilibru, poate permite reducerea numărului de necunoscute în unele dintre ecuațiile de echilibru, ușurîndu-se astfel rezolvarea problemei.

Avînd în vedere faptul că între necunoscute figurează totdeauna și reacțiuni ale legăturilor, cu pozițiile suporturilor de cele mai multe ori bine precizate, sînt ușor de înțeles următoarele recomandări privind modul de alegere a reperului, recomandări care permit reducerea la minimum posibil a numărului de necunoscute în fiecare ecuație de echilibru și, în deosebi, în cele de moment :

— Originea reperului în raport cu care vor fi scrise ecuațiile de echilibru, sau, cel puțin, ecuațiile de moment, va coincide cu punctul de concurență a suporturilor unui număr cît mai mare de forțe cu mărimile necunoscute, aceste necunoscute dispărînd astfel din ecuațiile de momente.

Rezultă de aici că dacă un rigid are, printre alte legături, și o articulație, atunci este recomandabil ca punctul teoretic de articulație să fie ales drept pol pentru scrierea ecuațiilor de echilibru de momente.

— Orientările axelor de coordonate — evident, ortogonale între ele — vor fi astfel alese încît cît mai multe dintre forțele necunoscute să se proiecteze numai pe cîte una din axe.

§ 8. Dinamica unor cazuri particulare de mișcări absolute ale rigidului

În acest paragraf vor fi studiate, sub aspectul dinamic, cele cinci mișcări particulare ale rigidului, al căror studiu cinematic a

făcut obiectul paragrafului 4, luîndu-se în consideraţie numai problemele de tip fundamental, corespunzătoare condiţiilor.

$$f = 0; \quad e = s = p + r. \tag{8.1}$$

8.1. *Dinamica mişcării de translaţie a rigidului*

8.1.1. Parametrii de poziţie independenţi ai rigidului în mişcare de translaţie

Întrucît în mişcarea de translaţie a rigidului unghiurile lui Euler îşi păstrează valorile constante — în particular chiar egale cu zero dacă axele reperului legat de rigid se aleg astfel încît în momentul iniţial să fie paralele la axele reperului fix — , parametrii de poziţie variabili în timp se vor reduce numai la coordonatele, în raport cu reperul fix, ale polului invariabil legat de rigid, acesta fiind, de regulă, centrul de masă G.

În cazul rigidului în translaţie liberă toate cele 3 coordonate ale centrului de masă vor varia independent una de alta ; existenţa unor legături pasive poate reduce numărul acestor parametrii de poziţie independenţi, el trebuind totuşi să fie cel puţin egal cu 1 pentru ca problema să fie de tip fundametal.

Rezultă deci condiţia

$$\boxed{p \leqslant 3}, \tag{8.2}$$

egalitatea corespunzînd cazului rigidului liber, parametrii de poziţie independenţi fiind reprezentaţi prin p dintre coordonatele x_G, y_G şi z_G.

Din punct de vedere cinematic mişcarea de translaţie este caracterizată prin condiţiile

$$\bar{v}_G = \dot{x}_G\bar{i} + \dot{y}_G\bar{j} + \dot{z}_G\bar{k} \neq 0; \quad \bar{\omega} \equiv 0, \tag{8.3}$$

cu consecinţele

$$d\bar{r}_G = \bar{v}_G dt \neq 0; \quad d\bar{\Theta} = \bar{\omega} dt \equiv 0 \tag{8.4}$$

şi

$$\bar{a}_G = \ddot{x}_G\bar{i} + \ddot{y}_G\bar{j} + \ddot{z}_G\bar{k} \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}; \quad \bar{\varepsilon} \equiv 0 \tag{8.5}$$

Scanned with CamScanner

8.1.2. Caracteristicile cinetice ale rigidului în translaţie

În baza condiţiilor cinematice (8.3), cu implicaţiile

$$\overline{\mathcal{K}}_G = \overline{\mathcal{K}}_{G_{rot}} \equiv 0\,; \quad \mathcal{E}_{G_{rot}} \equiv 0, \tag{8.6}$$

torsorul în centrul de masă al impulsurilor va avea forma

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_G(\overline{\mathcal{H}}) = \left\{ \begin{matrix} \overline{\mathcal{H}} = M\bar{v}_G \\ \overline{\mathcal{K}}_G = 0 \end{matrix} \right\}}, \tag{8.7}$$

torsorul în polul fix al impulsurilor va avea componentele

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{H}}) = \left\{ \begin{matrix} \overline{\mathcal{H}} = M\bar{v}_G \\ \overline{\mathcal{K}} = \bar{r}_G \times M\bar{v}_G = \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{H}}) \end{matrix} \right\}} \tag{8.8}$$

— cu momentul cinetic satisfăcînd de astă dată teorema lui Varignon —, iar energia cinetică va avea expresia

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} M\bar{v}_G^2}. \tag{8.9}$$

hijklmropqrs

8.1.3. Caracteristicile dinamice în mişcarea de translaţie a rigidului

Prima dintre egalităţile (8.6) are drept urmare condiţia

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ext_G} = \overline{\mathfrak{M}}_{a_G} + \overline{\mathfrak{M}}_{p_G} = 0, \tag{8.10}$$

cu consecinţa valabilităţii teoremei lui Varignon pentru torsorul rezultant în polul fix al solicitărilor active, adică

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{F}}_{ext}) = \left\{ \begin{matrix} \overline{\mathcal{F}}_{ext} = \overline{\mathcal{F}}_a + \overline{\mathcal{F}}_p \\ \overline{\mathfrak{M}}_{ext} = \mathcal{M}(\overline{\mathcal{F}}_{ext}) = \bar{r}_G \times (\overline{\mathcal{F}}_a + \overline{\mathcal{F}}_p) \end{matrix} \right\}} \tag{8.11}$$

Scanned with CamScanner

condiția (8.10) permițînd să se tragă concluzia că, exceptînd cazul translației inerțiale, ($\overline{\mathscr{F}}_{ext}=\overline{\mathscr{F}}_a+\overline{\mathscr{F}}_p\equiv 0$), mișcarea de translație a rigidului se produce numai atunci cînd *sistemul tuturor solicitărilor exterioare aplicate lui este reductibil la o rezultantă unică, cu suportul trecînd prin centrul de masă al rigidului.*

De asemenea, condițiile (8.3) cu consecințele (8.4) conduc la următoarele expresii simplificate pentru lucrul mecanic elementar al unui sistem de solicitări ($\overline{\mathscr{F}}$, $\overline{\mathfrak{M}}_G$) aplicate rigidului în translație

$$\boxed{\mathrm{d}\mathscr{L}=\overline{\mathscr{F}}\,\mathrm{d}\bar{r}_G=\mathscr{F}_x\mathrm{d}x_G+\mathscr{F}_y\mathrm{d}y_G+\mathscr{F}_z\mathrm{d}z_G} \tag{8.12}$$

și pentru puterea mecanică a acestor solicitări

$$\boxed{\mathscr{P}=\overline{\mathscr{F}}\,\bar{v}_G=\mathscr{F}_x\dot{x}_G+\mathscr{F}_y\dot{y}_G+\mathscr{F}_z\dot{z}_G}\,. \tag{8.13}$$

8.1.4. Stabilirea ecuațiilor scalare ale dinamicii mișcării de translație

Utilizînd forma a treia a ecuațiilor vectoriale ale dinamicii rigidului, se va scrie, ($\overline{\mathscr{K}}_G\equiv 0$):

$$\begin{cases} M\bar{a}_G=\overline{\mathscr{F}}_a+\overline{\mathscr{F}}_p\,; \\ 0\ =\overline{\mathfrak{M}}_{a_G}+\overline{\mathfrak{M}}_{p_G}. \end{cases} \tag{8.14}$$

observîndu-se că cea de-a doua dintre ecuațiile precedente exprimă doar condițiile pe care trebuie să le satisfacă sistemul solicitărilor exterioare aplicate rigidului pentru ca mișcarea lui să fie o translație, ea nefurnizînd însă nici un fel de date asupra mișcării înseși; din acest motiv, prima dintre ecuațiile (8.14) — singura care poate furniza informații asupra mișcării — este numită *ecuația vectorială fundamentală a dinamicii mișcării de translație a rigidului.*

Prin proiectarea acestei din urmă ecuații pe axele reperului fix și a celei de-a doua dintre ecuațiile (8.15) pe axele reperului invariabil atașat rigidului se obține următorul *sistem de ecuații scalare ale dinamicii mișcării de translație a rigidului*:

$$\begin{cases} (1)\ M\ddot{x}_G=\mathscr{F}_{a_x}+\mathscr{F}_{p_x}\,;\ (2)\ M\ddot{y}_G=\mathscr{F}_{a_y}+\mathscr{F}_{p_y}\,;\ (3)\ M\ddot{z}_G=\mathscr{F}_{a_z}+\mathscr{F}_{p_z} \\ (4)\ 0=\mathfrak{M}'_{a_{G_x}}+\mathfrak{M}'_{p_{G_x}}\,;\ (5)\ 0=\mathfrak{M}'_{a_{G_y}}+\mathfrak{M}'_{p_{G_y}}\,;\ (6)\ 0=\mathfrak{M}'_{a_{G_z}}+\mathfrak{M}'_{p_{G_z}} \end{cases} \tag{8.15}$$

acest sistem reducîndu-se numai la ecuațiile (1), (2) și (6) în cazul translației plane ($z_G \equiv 0$; $\mathscr{F}_{a_z} = \mathscr{F}_{p_z} \equiv 0$; $\mathscr{M}'_{a_{Q_x}} = \mathscr{M}'_{p_{G_x}} = \mathscr{M}'_{a_{G_y}} = \mathscr{M}'_{p_{G_y}} \equiv 0$). Rezultă deci un număr total de

$$\boxed{e = 6} \tag{8.16}$$

ecuații scalare de mișcare în cazul translației spațiale și un număr de

$$\boxed{e = 3} \tag{8.17}$$

ecuații scalare în cazul translației plane.

8.1.5. Problema separării și integrării sistemului de ecuații diferențiale ale mișcării de translație

Considerînd satisfăcute condițiile de momente axiale, care asigură, sub aspectul dinamic, efectuarea mișcării de translație și din care se determină, de regulă, anumite elemente ce caracterizează torsorul rezultant în centrul de masă al solicitărilor active, drept ecuații scalare efective ale dinamicii mișcării de translație a rigidului vor putea fi considerate numai cele

$$\boxed{e_{tr} = 3} \tag{8.18}$$

ecuații de proiecții pe axele reperului fix ale ecuației vectoriale fundamentale

$$\boxed{M\ddot{\bar{r}}_G = \bar{\mathscr{F}}_a + \bar{\mathscr{F}}_p} \tag{8.19}$$

adică primele trei dintre ecuațiile (8.15); în mod corespunzător se va modifica acum și condiția de rezolvare a unei probleme de tip fundamental, care va deveni în acest caz

$$e_{tr} = s = p + r \tag{8.20}$$

fiind posibile, în consecință, următoarele trei situații:

Scanned with CamScanner

Cazul rigidului în translaţie liberă, caracterizat prin condiţia

$$r = 0; \quad p = 3. \tag{8.21}$$

Avînd în vedere că în această situaţie solicitările pasive vor fi reprezentate numai prin rezistenţele mediului şi rezistenţelor de amortizare — evident, în cazurile cînd acestea nu sînt neglijabile —, se va putea defini o *rezistenţă totală*

$$\bar{R}_t = \bar{R}_z + \bar{R}_a, \tag{8.22}$$

astfel că ecuaţia fundamentală a dinamicii mişcării de translaţie va lua forma

$$\boxed{M\ddot{\bar{r}}_G = \bar{\mathcal{F}}_a + \bar{R}_t}, \tag{8.23}$$

ei corespunzîndu-i următorul *sistem de ecuaţii scalare ale dinamicii mişcării de translaţie liberă a rigidului*:

$$\boxed{M\ddot{x}_G = \mathcal{F}_{ax} + R_{tx}; \quad M\ddot{y}_G = \mathcal{F}_{ay} + R_{ty}; \quad M\ddot{z}_G = \mathcal{F}_{az} + R_{tz}}. \tag{8.24}$$

În ceea ce priveşte integrarea acestui sistem de ecuaţii, trebuie de menţionat faptul că, în general, ea nu este deloc simplă, dat fiind faptul că expresiile din membrul drept pot fi funcţii foarte complicate de coordonatele centrului de masă, de derivatele lor de ordinul întîi în raport cu timpul şi eventual şi de timp explicit; integrarea se simplifică în oarecare măsură dacă ecuaţiile (8.24) sînt independente între ele, adică au formele

$$M\ddot{x}_G = \mathcal{F}_{extx}(x_G; \dot{x}_G; t); \quad M\ddot{y}_G = \mathcal{F}_{exty}(y_G; \dot{y}_G; t); \quad M\ddot{z}_G = \mathcal{F}_{extz}(z_G; \dot{z}_G; t) \tag{8.25}$$

Cazul rigidului în translaţie supus la legături pasive exprimate printr-o singură ecuaţie de legătură, caracterizat prin condiţiile

$$r = 1; \quad p = 2. \tag{8.26}$$

În această situaţie ecuaţia fundamentală a dinamicii mişcării de translaţie va putea fi scrisă sub forma

$$\boxed{M\ddot{\bar{r}}_G = \bar{\mathcal{F}}_a + \bar{R}_t + \bar{R}}, \tag{8.27}$$

ei corespunzîndu-i ecuațiile de proiecții

$$M\ddot{x}_G = \mathcal{F}_{a_x} + R_{t_x} + R_x\,;\quad M\ddot{y}_G = \mathcal{F}_{a_y} + R_{t_y} + R_y\,;\quad M\ddot{z}_G = \mathcal{F}_{a_z} + R_{t_z} + R_z \tag{8.28}$$

Din una dintre aceste ecuații se va scoate reacțiunea necunoscută, înlocuindu-se apoi expresia ei în celelalte două ecuații, care vor forma astfel un sistem de două ecuații diferențiale de ordinul doi în trei funcții necunoscute de timp, x_G, y_G și z_G; exprimîd, cu ajutorul ecuației de legătură, una din cele trei coordonate în funcție de celelalte două și înlocuind-o în ecuațiile diferențiale precedente, se va obține un sistem de două ecuații diferențiale de ordinul doi în două funcții necunoscute de timp, care prin integrare va permite să se obțină aceste necunoscute ale problemei. Din ecuația de legătură se va determina apoi și cea de-a treia coordonată ca funcție de timp, iar revenirea la ecuația care a permis eliminarea reacțiunii legăturii va da posibilitatea determinării și acestei ultime necunoscute a problemei.

Cazul rigidului în translație supus la legături pasive exprimate prin două ecuații de legătură, caracterizat prin condițiile:

$$p = 1\,;\quad r = 2. \tag{8.29}$$

Ecuația vectorială fundamentală va avea și acum forma (8.27), iar ecuațiile scalare formele (8.28).

Pentru soluționarea problemei se vor rezolva în raport cu cele două reacțiuni necunoscute două dintre ecuațiile (8.28), introducîndu-se apoi expresiile lor în cea de-a treia ecuație, care va deveni o ecuație diferențială de ordinul doi în 3 funcții necunoscute de timp, coordonatele x_G y_G și z_G; eliminînd două dintre aceste coordonate cu ajutorul celor două ecuații de legătură, se va obține o singură ecuație diferențială de ordinul doi în una din cele trei coordonate ale centrului de masă, care va furniza prin integrare, unul din cei trei parametrii de poziție ai rigidului. Ecuațiile de legătură vor permite să se determine și ceilalți doi parametri de poziție ca funcții de timp, iar revenirea la ecuațiile cu care s-au eliminat reacțiunile necunoscute va da posibilitatea să se determine și ultimele două necunoscute ale problemei.

O mișcare de translație care intervine des în aplicațiile tehnice este translația rectilinie.

Scanned with CamScanner

Alegînd direcția translației ca direcție a axei fixe Ox, se va putea scrie

$$\bar{\mathcal{F}}_{ext} = M\bar{a}_G = (Ma_G)\bar{i} = (\mathcal{F}_{ext})\bar{i}\,; \tag{8.30}$$

rezultînd de aici o condiție dinamică pentru efectuarea unei asemenea translații și anume aceea ca rezultanta tuturor forțelor exterioare care acționează asupra rigidului să fie orientată, în permanență, în lungul axei după care se efectuează translația; la această condiție dinamică se va asocia una cinematică și anume aceea ca viteza inițială de translație să fie coliniară cu forța rezultantă exterioară.

Admițînd că aceste condiții sînt satisfăcute, va rezulta următoarea formă generală pentru ecuația diferențială a translației rectilinii a rigidului:

$$\boxed{M\ddot{x}_G = \mathcal{F}_{ext}(x_G\,;\ \dot{x}_G\,;\ t)} \tag{8.31}$$

cu următoarele cazuri simple de integrare, prin separare de variabile:

— cazul forței rezultante exterioare depinzînd numai de parametrul de poziție, $\left(\mathcal{F}_{ext} = \mathcal{F}(x_G)\,;\ \ddot{x}_G = \dfrac{dv_G}{dt} = \dfrac{dv_G}{dx_G}\,v_G\right)$;

— cazul forței rezultante exterioare depinzînd numai de viteza de translație, $\left(\mathcal{F}_{ext} = \mathcal{F}(\dot{x}_G) = \mathcal{F}(v_G)\,;\ \ddot{x}_G = \dfrac{dv_G}{dt}\right)$;

— cazul forței rezultante exterioare depinzînd numai de timp,

$$\left(\mathcal{F}_{ext} = \mathcal{F}(t)\,;\ \ddot{x}_G = \frac{dv_G}{dt}\right).$$

8.1.6. Aplicație: Translația rectilinie uniform variată

Avînd în vedere faptul că această mișcare se caracterizează cinematic prin accelerație de translație constantă, $(\bar{a}_G = \bar{a}_G^0 = a_G^0\bar{i})$, rezultă următoarea condiție pentru forța rezultantă exterioară sub acțiunea căreia poate avea loc o asemenea mișcare

$$\bar{\mathcal{F}}_{ext} = M\bar{a}_G = M\bar{a}_G^0 = \bar{\mathcal{F}}_{ext}^0 = \bar{\mathcal{F}}^0, \tag{8.32}$$

adică această forță trebuie să aibă și mărimea constantă.

Ecuația vectorială fundamentală corespunzătoare acestei mișcări va putea fi scrisă deci sub forma

$$\ddot{\bar{r}}_G = \frac{d\bar{v}_G}{dt} = \frac{\bar{\mathcal{F}}^0}{M}, \tag{8.33}$$

rezultînd astfel, prin integrări succesive, integrala primă

$$\dot{\bar{r}}_G = \bar{v}_G = \frac{\bar{\mathscr{F}}^0}{M} t + \bar{C}_1 \tag{8.34}$$

și soluția generală

$$\bar{r}_G = \frac{1}{2} \frac{\bar{\mathscr{F}}^0}{M} t^2 + \bar{C}_1 t + \bar{C}_2 \tag{8.35}$$

Introducînd în relațiile (8.34) și (8.35) condițiile inițiale

$$t = 0 \{ \bar{r}_G(0) = \bar{r}_G^0 ; \ \dot{\bar{r}}_G(0) = \bar{v}_G^0 \}, \tag{8.36}$$

rezultă următoarele valori pentru vectorii constanți de integrare $\bar{C}_1$ și $\bar{C}_2$:

$$\bar{C}_1 = \bar{v}_G^0 ; \ \bar{C}_2 = \bar{r}_G^0 \tag{8.37}$$

și deci următoarea formă pentru ecuația finită vectorială a mișcării

$$\boxed{\bar{r}_G = \bar{r}_G^0 + \bar{v}_G^0 t + \frac{1}{2} \frac{\bar{\mathscr{F}}^0}{M} t^2} , \tag{8.38}$$

respectiv forma

$$\boxed{x_G = x_G^0 + v_G^0 t + \frac{1}{2} \frac{\mathscr{F}^0}{M} t^2} \tag{8.39}$$

pentru ecuația scalară de proiecție pe axa Ox a mișcării de translație, x_G^0 v_G^0 și $\mathscr{F}^0$ fiind valorile scalare, raportate la versorul $\bar{i}$ al acestei axe, ale vectorilor $\bar{r}_G^0$, $\bar{v}_G^0$ și $\bar{\mathscr{F}}^0$.

Este ușor de verificat, repetîndu-se raționamentul folosit în cinematica mișcării rectilinii uniform variate a punctului, că mișcarea rigidului va fi:

— *o translație rectilinie uniform accelerată*, în cazul

$$v_G^0 \mathscr{F}^0 > 0, \tag{8.40}$$

adică atunci cînd viteza inițială de translație și forța rezultantă exterioară au același sens;

— *o translație rectilinie uniform încetinită*, în situația

$$v_G^0 \mathscr{F}^0 < 0, \tag{8.41}$$

adică atunci cînd viteza inițială de translație are sensul contrar sensului forței rezultante exterioare;

— *o translație rectilinie uniformă*, în cazul

$$\mathscr{F}^0 = 0, \tag{8.42}$$

în această ultimă situație translația avînd caracter inerțial.

8.2. *Dinamica mișcării de rotație în iurul unei axe fixe a rigidului.*

8.2.1. Parametrii de poziție independenți ai rigidului cu axă fixă

Realizată prin aplicarea unui lagăr pivot și a unui lagăr cilindric coaxiale în cazul cînd sensul componentei în lungul axei de rotație a forței active rezultante nu se schimbă în timpul mișcării și cu ajutorul numai al lagărelor pivot — dar cu unul din ele comportîndu-se, pe rînd, ca lagăr cilindric—în cazul cînd componenta axială a forțelor active își schimbă sensul, mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe a rigidului va fi determinată, atunci cînd cele două repere — fix și invariabil legat de rigid — se aleg ca în figura 8.1, printr-un singur parametru de poziție, unghiul de rotație φ, funcție necunoscută de timp în problemele de tip fundamental.

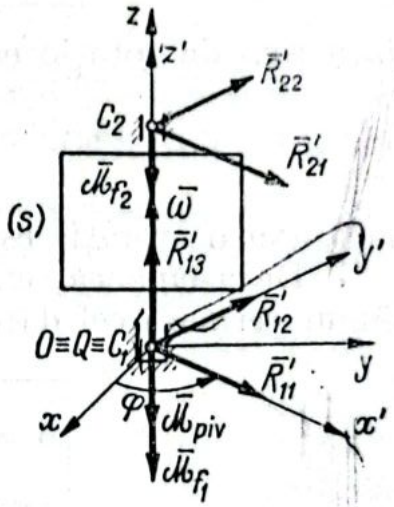


Fig. 8.1.

Pentru această mișcare particulară a rigidului rezultă deci

$$\boxed{p = 1}, \tag{8.43}$$

precum și următoarele condiții cinematice

$$\bar{v}_G \equiv 0\,; \quad \bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{k}' \neq 0, \tag{8.44}$$

cu consecințele

$$d\bar{r}_Q \equiv 0\,; \quad d\bar{\Theta} = d\varphi\bar{k}' \neq 0 \tag{8.45}$$

și

$$\bar{a}_Q \equiv 0\,; \quad \bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\bar{k}' \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases} \tag{8.46}$$

8.2.2. Caracteristicile cinetice ale rigidului în mișcare de rotație în jurul unei axe fixe

În baza modului de alegere a celor două repere ($\bar{r}_Q \equiv \bar{0}$), precum și a condițiilor cinematice (8.44), rezultă următoarea formă a

torsorului în polii $Q \equiv O$ ai impulsurilor rigidului :

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{H}}) = \overline{\mathcal{T}}_Q \overline{\mathcal{H}} = \begin{Bmatrix} \overline{\mathcal{H}} = M\bar{v}_Q = M\bar{\omega} \times \bar{r}'_G \\ \overline{\mathcal{K}} = \overline{\mathcal{K}}_Q = \overline{\mathcal{K}}_{Q_{rot}} \end{Bmatrix},} \tag{8.47}$$

cu

$$\boxed{\overline{\mathcal{K}}_Q = -J'_{xz}\omega\bar{i}' - J'_{yz}\omega\bar{j}' + J'_{zz}\omega\bar{k}'} \tag{8.48}$$

dacă axa de rotaţie este oarecare şi cu

$$\boxed{\overline{\mathcal{K}}_Q = J'_2\omega\bar{k}' = J\bar{\omega}} \tag{8.49}$$

dacă axa de rotaţie este axă principală de inerţie relativă la polul Q.

De asemenea, energia cinetică va avea expresia redusă la un singur termen, cel datorat rotaţiei, adică se va scrie

$$\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{E}_{r,t} = \frac{1}{2} J'_{zz}\omega^2 = \frac{1}{2} J\omega^2} \tag{8.50}$$

8.2.3. Caracteristicile dinamice în cazul rigidului în rotaţie în jurul unei axe fixe

Considerînd numai cazul cînd axa de rotaţie este axă principală de inerţie ($\overline{\mathcal{K}}_Q = J\bar{\omega}$), se vor putea scrie relaţiile

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{F}}_{ext} = M\bar{a}_G = M(\ddot{x}_G\bar{i} + \ddot{y}_G\bar{j}) = (M\ddot{x}_G)\bar{i} + (M\ddot{y}_G)\bar{j}\,; \\ \overline{\mathfrak{M}}_{extQ} = \dot{\overline{\mathcal{K}}}_{Q_{rot}} = J\bar{\varepsilon} = (J\ddot{\varphi})\bar{k}' \end{cases} \tag{8.51}$$

care scot în evidenţă faptul că mişcarea de rotaţie în jurul unei axe principale de inerţie fixe se va putea produce numai în următoarele condiţii de solicitare exterioară :

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_G(\overline{\mathcal{F}}_{ext}) = \begin{Bmatrix} \overline{\mathcal{F}}_{ext} = \mathcal{F}'_{ext_x}\bar{i}' + \mathcal{F}'_{ext_y}\bar{j}' \\ \overline{\mathfrak{M}}_{ext_Q} = \mathfrak{M}_{ext_Q}\bar{k}' \end{Bmatrix}} \tag{8.52}$$

În ceea ce priveşte expresiile lucrului mecanic elementar şi puterii mecanice corespunzătoare unui sistem de solicitări $(\overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathfrak{M}}_Q)$, ele vor lua, datorită condiţiilor (8.44) şi (8.45), formele simplificate

$$\boxed{\mathrm{d}\mathcal{L} = \overline{\mathfrak{M}}_Q \mathrm{d}\Theta = \overline{\mathfrak{M}}_{Q_z} \mathrm{d}\varphi}, \tag{8.53}$$

respectiv

$$\boxed{\mathcal{P} = \overline{\mathfrak{M}}_Q \bar{\omega} = \overline{\mathfrak{M}}_{Q_z} \dot{\varphi}}. \tag{8.54}$$

8.2.4. Stabilirea sistemului de ecuaţii scalare ale dinamicii mişcării de rotaţie în jurul unei axe fixe a rigidului

Se va folosi forma a doua a ecuaţiilor vectoriale ale dinamicii rigidului, cu simplificarea corespunzătoare cazului particular de mişcare studiată, $(\bar{a}_Q \equiv \mathrm{O})$, adică ecuaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\overline{\mathcal{H}}]_r + \bar{\omega} \times \overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{F}}_a + \overline{R}_t + \overline{R}_1 + \overline{R}_2; \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\overline{\mathcal{H}}_Q]_r + \bar{\omega} \times \overline{\mathcal{H}}_Q = \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} + \overline{\mathfrak{M}}_Q(\overline{R}_t) + \overline{\mathfrak{M}}_Q(\overline{R}_1) + \overline{\mathfrak{M}}_Q(\overline{R}_2), \end{cases} \tag{8.55}$$

$(\overline{R}_t, \overline{\mathfrak{M}}_Q(\overline{R}_t))$ fiind componentele torsorului rezultant în polul Q al rezistenţelor totale — rezistenţele mediului şi rezistenţele de amortizare — , cu forţa rezultantă situată în plan normal la axa de rotaţie, iar $(\overline{R}_1, \overline{\mathfrak{M}}_Q(\overline{R}_1)$ şi $(\overline{R}_2, \overline{\mathfrak{M}}_Q(\overline{R}_2))$ fiind componentele torsorilor în polul Q ai reacţiunilor lagărului pivot — cu centrul C_1 ales ca origine comună a celor două repere — şi lagărului cilindric cu centrul în C_2, aceşti torsori avînd formele

$$\overline{\mathcal{F}}_Q(\overline{R}_1) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{R}_1 = R'_{1x}\bar{i}' + R'_{1y}\bar{j}' + R'_{1z}\bar{k}' \\ \overline{\mathfrak{M}}_Q(\overline{R}_1) = \overline{\mathcal{M}}_{fr_1} = \overline{\mathcal{M}}_{f_1} + \overline{\mathcal{M}}_{piv} = (\mathcal{M}_{f_1} + \mathcal{M}_{piv})\bar{k}' \end{array} \right\} \tag{8.56}$$

respectiv

$$\overline{\mathcal{F}}_Q(\overline{R}_2) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{R}_2 = R'_{2x}\bar{i} + R'_{2y}\bar{j}' \\ \overline{\mathfrak{M}}_Q(\overline{R}_2) = \overline{\mathcal{M}}_{f_2} + \bar{r}'_{c_2} \times \overline{R}_2 = -hR'_{2y}\bar{i}' + hR'_{2x}\bar{j}' + \mathcal{M}_{f_2}\bar{k}' \end{array} \right\} \tag{8.57}$$

cu

$$|\bar{\mathcal{M}}_{f_1}| = \mu_1' r_{f_1} \sqrt{R_{1x}'^2 + R_{1y}'^2}\,; \quad |\bar{\mathcal{M}}_{piv}| = \nu |R_{1z}'| \tag{8.58}$$

și

$$|\mathcal{M}_{f_2}| = \mu_2' r_{f_2} \sqrt{R_{2x}'^2 + R_{2y}'^2}\,. \tag{8.59}$$

Considerînd cazul mai general, corespunzător situației cînd axa de rotație nu este axă principală de inerție și deci momentul cinetic $\bar{\mathcal{K}}_{Qrot}$ are expresia (8.48), ecuațiilor vectoriale (8.55) le vor corespunde următorul sistem de ecuații de proiecții pe axele reperului invariabil legat de rigid, reprezentînd *sistemul de ecuații scalare ale dinamicii mișcării de rotație în jurul unei axe fixe a rigidului*:

$$\boxed{\begin{aligned}
&(1) \quad -My_G'\ddot{\varphi} - Mx_G'\dot{\varphi}^2 = \mathcal{F}_{ax}' + R_{tx}' + R_{1x}' + R_{2x}'\,;\\
&(2) \quad Mx_G'\ddot{\varphi} - My_G'\dot{\varphi}^2 = \mathcal{F}_{ay}' + R_{ty}' + R_{1y}' + R_{2y}'\,;\\
&(3) \quad 0 = \mathcal{F}_{az}' + R_{1z}'\,;\\
&(4) \quad +J_{xz}'\ddot{\varphi} - J_{yz}'\dot{\varphi}^2 = \mathcal{M}_{aQ_x}' + \mathcal{M}_{Qx}'(\bar{R}_t) - hR_{2y}'\,;\\
&(5) \quad +J_{yz}'\ddot{\varphi} + J_{xz}'\dot{\varphi}^2 = \mathcal{M}_{aQ_y}' + \mathcal{M}_{Qy}'(\bar{R}_t) + hR_{2x}'\,;\\
&(6) \quad J_{zz}'\ddot{\varphi} = \mathcal{M}_{aQ_z}' + \mathcal{M}_{Qz}'(R_t) + \mathcal{M}_{f_1} + \mathcal{M}_{f_2} + \mathcal{M}_{piv}
\end{aligned}} \tag{8.60}$$

Rezultă deci un număr de

$$\boxed{e = 6} \tag{8.61}$$

ecuații scalare de mișcare.

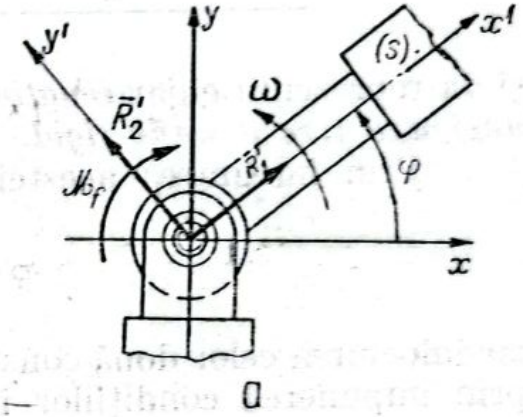
În cazul cînd rigidul în rotație este o placă plană subțire, sau o bară subțire ($J_{xz}' = J_{yz}' = 0$), (fig. 8.2), supusă la solicitări — forțe și cupluri de forțe — situate în același plan normal la axa de rotație ($\mathcal{F}_{a_z}' \equiv 0$; $\mathcal{M}_{aQ_x}' = \mathcal{M}_{aQ_y}' \equiv 0$), iar ansamblul celor două lagăre este asimilabil cu o articulație plană unică, ($R_{1x}' = R_{1y}' = R_{1z}' = 0$ $\mathcal{M}_{fr_1} \equiv 0$), numărul ecuațiillor scalare de mișcare se reduce la

$$\boxed{e = 3} \tag{8.62}$$

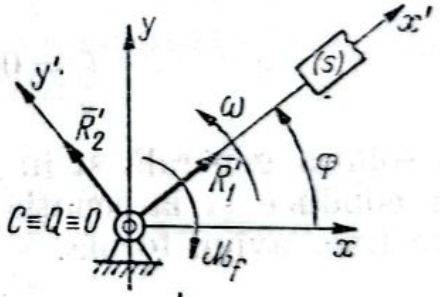
ele fiind reperezentate prin ecuațiile (1), (2), și (6), din sistemul (8.60), cu simplificările precizate mai sus.

8.2.5. Problema separării și integrării ecuației diferențiale a mișcării de rotație în jurul unei axe fixe

În condițiile precizate, o problemă de dinamica mișcării de rotație în jurul unei axe fixe va conține, ca necunoscute scalare, un parametru de poziție, (p = 1), reprezentat prin unghiul de rotație și pentru care va trebui separată din sistemul (8. 60) o ecuație diferențială și un număr de 5 reacțiuni necunoscute (r = 5), reprezentate prin cele trei reacțiuni ale lagărului pivot și cele două reacțiuni ale lagărului cilindric.



a



b

Fig. 8.2.

Examinînd forma ecuațiilor (8.60), apare vizibil faptul că cea mai simplă ecuație care ar putea fi folosită pentru stabilirea ecuației diferențiale a mișcării este ecuația (6), scrisă deseori, prin notarea axei de rotație cu (Δ) și a tuturor mărimilor care se referă la această axă cu indicele (Δ) ($J'_{zz} = J_\Delta$; $\mathfrak{M}'_{a_{Q_z}} = \mathfrak{M}_{a_\Delta}$; $\mathfrak{M}'_{Q_z}(\bar{R}_t) = \mathfrak{M}_\Delta(\bar{R}_t)$), precum și prin notarea momentului total de frecare cu simbolul $\mathfrak{M}_{fr} = \mathcal{M}_{f_1} + \mathcal{M}_{f_2} + \mathcal{M}_{piv}$, sub forma

$$\boxed{J_\Delta \ddot{\varphi} = \mathfrak{M}_{a_\Delta} + \mathfrak{M}_\Delta(\bar{R}_t) + \mathfrak{M}_{fr}}, \qquad (8.63)$$

cunoscută sub numele de *ecuația fundamentală a dinamicii mișcării de rotație în jurul unei axe fixe.*

În condițiile în care s-ar ține seama de expresiile (8.58) și (8.59) ale momentelor de frecare, ecuația fundamentală (8.63) nu va reprezenta, evident, ecuația diferențială a mișcării de rotație în jurul unei axe fixe, deoarece conține, în afara funcției necunoscute $\varphi(t)$ și necunoscute algebrice, reprezentate prin reacțiunile lagărelor; în aplicațiile practice însă momentele de frecare sînt aproximate, de regulă, cu

valori constante, determinate experimental pentru cazul static și acceptate și ca valori medii pentru cazul dinamic. În această situație, notînd cu C_f valoarea constantă a momentului rezultant de frecare — această constantă putînd fi, în funcție de sensul rotației, pozitivă, negativă, sau chiar egală cu zero dacă se pot neglija frecările în lagăre (ca în cazul lagărelor pe rulmenți)— , ecuația (8.63), în care se va ține seama că momentul $\mathfrak{M}_{a_\Delta}$ depinde, în general, de unhiul de rotație și de timp și că momentul $\mathfrak{M}_\Delta(\bar{R}_t)$ este funcție de viteza unghiulară, va lua forma

$$\boxed{J_\Delta \ddot{\varphi} = \mathfrak{M}_{a_\Delta} + \mathfrak{M}_\Delta(\bar{R}_t) + C_f = \mathfrak{M}_\Delta(\varphi;\ \dot{\varphi};\ t)} \tag{8.64}$$

și va reprezenta chiar *ecuația diferențială a mișcării de rotație în jurul unei axe fixe a unui rigid.*

Prin integrarea acestei ecuații se va obține soluția generală

$$\varphi = \varphi(t;\ C_1;\ C_2), \tag{8.65}$$

iar înlocuirea celor două constante de integrare cu valorile ce se obțin prin impunerea condițiilor inițiale

$$t = 0\,\{\varphi(0) = \varphi^0;\ \ \dot{\varphi}(0) = \omega^0\} \tag{8.66}$$

în soluția generală și în expresia derivatei ei în raport cu timpul, va conduce și la ecuația finită a mișcării de rotație în jurul unei axe fixe, avînd forma,

$$\varphi = \varphi\,(t;\ \varphi^\circ,\ \omega^\circ). \tag{8.67}$$

Se întîlnesc și aici următoarele cazuri simple de integrare, prin separarea de variabile, a ecuației diferențiale (8.64), analoage cazurilor întîlnite la integrarea ecuației diferențiale a mișcării de translație rectilinie :

— cazul momentului rezultant exterior axial depinzînd numai de parametrul de poziție $\left(\mathfrak{M}_\Delta = \mathfrak{M}_\Delta(\varphi);\ \ddot{\varphi} = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d\omega}{d\varphi}\,\omega\right)$;

— cazul momentului rezultant exterior depinzînd numai de viteza unghiulară, $\left(\mathfrak{M}_\Delta = \mathfrak{M}_\Delta(\dot{\varphi}) = \mathfrak{M}_\Delta(\omega);\ \ddot{\varphi} = \dfrac{d\omega}{dt}\right)$;

Scanned with CamScanner

R.P.R. „N. BĂLCESCU" 1961

— cazul momentului rezultant exterior axial depinzînd numai de timp, $\left(\mathfrak{M}_\Delta = \mathfrak{M}_\Delta(t)\,;\ \ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt}\right)$.

O situaţie frecvent întîlnită în aplicaţiile practice este aceea în care membrul drept al ecuaţiei (8.64) se reduce la o constantă $\mathfrak{M}^0$ — pozitivă, negativă, sau, în particular, chiar zero — şi cînd ecuaţia (8.64) ia forma

$$\ddot{\varphi} = \frac{\mathfrak{M}^0}{J_\Delta}, \tag{8.68}$$

cu integrala primă

$$\dot{\varphi} = \frac{\mathfrak{M}^0}{J_\Delta} t + C_1 \tag{8.69}$$

şi cu soluţia generală

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{M}^0}{J_\Delta} t^2 + C_1 t + C_2. \tag{8.70}$$

Introducerea condiţiilor iniţiale (8.66) în relaţiile (8.69) şi (8.70) permite să se determine constantele de integrare :

$$C_1 = \omega^0\,; \quad C_2 = \varphi^0$$

şi să se obţină ecuaţia finită a mişcării sub forma

$$\boxed{\varphi = \varphi^0 + \omega^0 t + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{M}^0}{J_\Delta} t^2}, \tag{8.71}$$

indicînd existenţa unei rotaţii uniforme variate şi anume :

— *rotaţie uniform accelerată*, în cazul

$$\omega^0 \mathfrak{M}^0 > 0, \tag{8.72}$$

adică atunci cînd viteza unghiulară iniţială şi componenta după axa de rotaţie a momentului rezultant exterior au acelaşi sens ;

Scanned with CamScanner

— *rotație uniform încetinită*, pentru condiția

$$\omega^0 \mathfrak{M}^0 < 0, \tag{8.73}$$

adică atunci cînd viteza unghiulară inițială și momentul axial exterior rezultant au sensuri contrarii :

— *rotație uniformă*, în cazul

$$\mathfrak{M}^0 = 0, \tag{8.74}$$

rotația avînd în această situație caracter inerțial.

În ipoteza că s-a reușit să se integreze ecuația diferențială (8.64), primele 5 ecuații ale sistemului (8.60), cu termenii din membrul stîng cunoscuți acum ca funcții de timp, vor furniza cele 5 reacțiuni necunoscute ale lagărelor, valorile lor fiind date mai jos ;

$$R'_{1x_1} = -\left\{ M y'_G \ddot{\varphi} + M x'_G \dot{\varphi}^2 + R'_{l_x} - \frac{1}{h}[J'_{yz}\ddot{\varphi} + J'_{xz}\dot{\varphi}^2 + \mathfrak{M}'_{Qy}(\bar{R}_t)] \right\} -$$

$$- \mathcal{F}'_{ax} + \frac{1}{h}\mathfrak{M}'_{aQy} = R'_{1d_x} - \mathcal{F}'_{ax} + \frac{1}{h}\mathfrak{M}'_{aQy} ;$$

$$R'_{1y_2} = \left\{ M x'_G \ddot{\varphi} - M y'_G \dot{\varphi}^2 - R'_{l_y} - \frac{1}{h}[J'_{xz}\ddot{\varphi} - J'_{yz}\dot{\varphi}^2 + \mathfrak{M}'_{Qx}(\bar{R}_t)] \right\} -$$

$$- \mathcal{F}'_{ay} - \frac{1}{h}\mathfrak{M}'_{aQx} = R'_{1d_y} \mathcal{F}'_{ay} - \frac{1}{h}\mathfrak{M}'_{aQx} ;$$

$$R'_{1z_3} = -\mathcal{F}'_{az} ;$$

$$R'_{2x_1} = -\frac{1}{h}[J'_{yz}\ddot{\varphi} + J'_{xz}\dot{\varphi}^2 + \mathfrak{M}'_{Qy}(\bar{R}_t)] - \frac{1}{h}\mathfrak{M}'_{aQy} = R'_{2d_x} - \frac{1}{h}\mathfrak{M}'_{aQy} ;$$

$$R'_{2y_2} = \frac{1}{h}[J'_{xy}\ddot{\varphi} - J'_{yz}\dot{\varphi}^2 + \mathfrak{M}'_{Qx}(\bar{R}_t)] + \frac{1}{h}\mathfrak{M}'_{aQx} = R'_{2d_y} + \frac{1}{h}\mathfrak{M}'_{aQx}.$$

(8.75)

În expresiile precedente, termenii notaţi cu indicele $(_d)$ corespund *componentelor dinamice ale reacţiunilor lagărelor*, definite prin relaţiile

$$\bar{R}_{1d} = R'_{1d_x}\bar{i}' + R'_{1d_y}\bar{j}'; \quad \bar{R}_2 = \bar{R}'_{2d_x}\bar{i}' + R'_{2d_y}\bar{j}'. \tag{8.76}$$

În legătură cu reacţiunile celor două lagăre, se pun următoarele trei probleme interesînd în mod deosebit aplicaţiile tehnice :

— *Stabilirea condiţiilor în care componentele dinamice ale reacţiunilor lagărelor pot deveni egale cu zero.*

Examinînd expresiile componentelor dinamice ale reacţiunilor lagărelor, rezultă următoarele serii de condiţii pentru anularea lor :

— *condiţii privind caracteristicile inerţiale* :

$$x'_G = y'_G = 0; \quad J'_{xz} = J'_{yz} = 0, \tag{8.77}$$

implicînd coincidenţa axei de rotaţie cu o axă centrală de inerţie.

— *condiţii privind solicitările pasive:*

$$R'_{1x} = R'_{1y} \equiv 0; \quad \mathfrak{M}'_{Qx}(\bar{R}_1) = \mathfrak{M}'_{Qy}(\bar{R}_1) \equiv 0. \tag{8.78}$$

În cazul cînd rezistenţele totale sînt reprezentate numai prin rezistenţele mediului, ambele serii de condiţii sînt satisfăcute dacă axa de rotaţie este axă de simetrie de revoluţie în repartiţia masei.

— *Stabilirea condiţiilor în care componentele reacţiunii lagărului cilindric devin egale cu zero.* Egalitatea, în permanenţă, cu zero a proiecţiilor R'_{2x} şi R'_{2y} ale reacţiunilor lagărului cilindric se va produce în următoarele condiţiuni :

— *condiţii privind caracteristicile inerţiale* :

$$J'_{xz} = J'_{yz} = 0; \tag{8.79}$$

— *condiţii privind solicitările pasive* :

$$\mathfrak{M}'_{Qx}(\bar{R}_1) = \mathfrak{M}'_{Qy}(\bar{R}_1) \equiv 0; \tag{8.80}$$

— *condiţii privind solicitările active* :

$$\mathfrak{M}'_{a_{Qx}} = \mathfrak{M}'_{a_{Qy}} \equiv 0, \tag{8.81}$$

Scanned with CamScanner

aceste condiții implicînd coincidența axei de rotație cu o axă principală de inerție și orientarea momentelor rezultante ale solicitărilor pasive și ale solicitărilor active numai în lungul axei de rotație.

Satisfacerea condițiilor precedente asigură deci menținerea direcției fixe a axei de rotație numai cu ajutorul lagărului pivot; o asemenea axă de rotație, care își poate păstra direcția fixă cu un singur punct de imobilizare, poartă numele de *axă permanentă de rotație.*

— *Stabilirea condițiilor în care componentele normale la axa de rotație ale ambelor reacțiuni ale lagărelor devin egale cu zero.* Egalitatea cu zero a proiecțiilor R'_{1x}, R'_{1y}, R'_{2x}, și R'_{2y} implică satisfacerea simultană a următoarelor serii de condiții:

— *condiții privind caracteristicile inerțiale:*

$$x'_G = y'_G = 0\,; \quad J'_{xz} = J'_{yz} = 0\,; \tag{8.82}$$

— *condiții privind solicitările pasive:*

$$R'_{1x} = R'_{1y} \equiv 0\,; \quad \mathfrak{M}'_{Qx}(\bar{R}_t) = \mathfrak{M}'_{Qy}(\bar{R}_t) \equiv 0\,; \tag{8.83}$$

— *condiții privind solicitările active:*

$$\mathcal{F}'_{ax} = \mathcal{F}'_{ay} \equiv 0\,; \quad \mathfrak{M}'_{aQx} = \mathfrak{M}'_{aQy} \equiv 0, \tag{8.84}$$

primele implicînd coincidența axei de rotație cu o axă centrală de inerție, iar ultimele fiind satisfăcute în toate cazurile cînd atît solicitările active, cît și cele de rezistență, se reduc fie la un cuplu cu momentul orientat în lungul axei de rotație, fie la un răsucitor, admițînd axa de rotație ca axă centrală.

Satisfacerea condițiilor de mai sus asigură deci menținerea fixă în spațiu a axei de rotație, fără nici un fel de lagăr, cel mult prin un reazem pe o suprafață de pivotare dacă solicitările active se reduc la un răsucitor; o asemenea axă de rotație, care își menține poziția fixă în spațiu fără nici un lagăr, se numește *axă naturală de rotație,* sau încă *axă liberă de rotație.*

8.2.6. Aplicație: Pendulul fizic

Se numește *pendul fizic* un rigid în rotație, cu frecare neglijabilă, în jurul unei axe fixe orizontale, numai sub acțiunea greutății proprii.

Scanned with CamScanner

Axa de rotație a pendulului mai este numită *axă de suspensie*, iar punctul C_s, (fig. 8.3), de intersecție a acestei axe cu planul perpendicular pe axă și conținînd centrul de masă G al rigidului, este numit *centru de suspensie al pendulului fizic*.

Alegînd cele două repere ca în fig. 8.3, ($Q \equiv C_s$; $O \equiv C_1$; $\overline{QC_1} = h_1$; $\overline{QC_2} = h_2$), cu axa Ox orientată pe verticală și în jos, rezultă următoarele forme concrete ale ecuațiilor vectoriale ale mișcării pendulului fizic;

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\overline{\mathscr{H}}]_r + \bar{\omega} \times \overline{\mathscr{H}} = \bar{P} + \bar{R}_1 + \bar{R}_2; \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\overline{\mathscr{K}}_{Qrot}]_r + \bar{\omega} \times \overline{\mathscr{K}}_{Qrot} = \bar{r}'_G \times \bar{P} + \bar{r}'_{C_1} \times \bar{R}_1 + \bar{r}'_{C_2} \times \bar{R}_2, \end{cases} \tag{8.85}$$

cu

$$\bar{P} = Mg\bar{i} = Mg(\cos\varphi\bar{i}' - \sin\varphi\bar{j}') \tag{8.86}$$

și cu următoarele coordonate, în raport cu reperul $Ox'y'z'$, ale celor trei puncte de aplicație ale solicitărilor aplicate pendulului fizic:

$$G(a;\ 0;0;);\ C_1(0;0;-h_1);\ C_2(0;0;h_2) \tag{8.87}$$

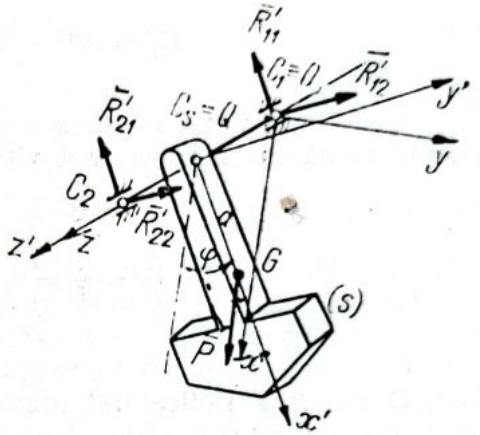


Fig. 8.3.

Ecuațiilor vectoriale (8.85) le vor corespunde următorul sistem de ecuații scalare de mișcare, rezultînd prin proiectare pe axele reperului legat de pendul:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad -Ma\dot{\varphi}^2 = Mg\cos\varphi + R'_{1x} + R'_{2x};\\
&(2)\quad Ma\ddot{\varphi} = -Mg\sin\varphi + R'_{1y} + R'_{2y};\\
&(3)\quad 0 = R'_{1z}\\
&(4)\quad -J'_{xz}\ddot{\varphi} + J'_{yz}\dot{\varphi}^2 = h_1R'_{1y} - h_2R'_{2y};\\
&(5)\quad -J'_{yz}\ddot{\varphi} - J'_{xz}\dot{\varphi}^2 = -h_1R'_{1x} + h_2R'_{2x};\\
&(6)\quad J'_{zz}\ddot{\varphi} = -Mag\sin\varphi.
\end{aligned} \tag{8.87}$$

Introducînd notațiile

$$\frac{J'_{zz}}{Ma} = l_r;\quad \frac{Ma}{J'_{zz}}g = \frac{g}{l_r} = k^2, \tag{8.88}$$

unde l_r, care are dimensiunea fizică a unei lungimi, este numită *lungime redusă a pendulului fizic*, ultima dintre ecuațiile (8.87) poate fi scrisă sub forma

$$\boxed{\ddot{\varphi} = -k^2\sin\varphi} \tag{8.89}$$

și va reprezenta *ecuația diferențială a mișcării pendului fizic*.

Scanned with CamScanner

O integrală primă a acestei ecuații va putea fi obținută imediat, după înmulțirea cu $2\dot{\varphi}$ și integrare, ea avînd forma

$$\dot{\varphi}^2 = 2k^2 \cos\varphi + C_1 \tag{8.90}$$

Determinînd constanta de integrare cu ajutorul condițiilor inițiale

$$t = 0\ \{\varphi(0) = \varphi^0;\ \ \dot{\varphi}(0) = \omega^0\}, \tag{8.91}$$

care conduc la valoarea

$$C_1 = \omega^{02} - 2k^2\cos\varphi^0 = 2k^2\left(\frac{\omega^{02}}{2k^2} - \cos\varphi^0\right), \tag{8.92}$$

rezultă următoarea expresie a vitezei unghiulare a pendulului fizic:

$$\omega = \dot{\varphi} = \pm\sqrt{2}k\sqrt{\cos\varphi + \frac{\omega^{02}}{2k^2} - \cos\varphi^0}, \tag{8.92}$$

semnul din fața radicalului urmînd a fi precizat ținîndu-se seama de sensul variației unghiului de rotație $\varphi(t)$.

Deoarece integrarea, mai departe, a ecuației (8.92) conduce la o integrală de tip eliptic, care nu poate fi exprimată prin funcții elementare, se va studia caracterul mișcării pe baza expresiei (8.92) a vitezei unghiulare, luîndu-se în considerație următoarele trei situații distincte, corespunzătoare diverselor valori pe care le poate lua constanta C_1, în funcție de datele inițiale φ^0 și ω^0:

— *mișcarea de rotație continuă a pendulului fizic*, caracterizată prin condiția

$$\frac{\omega^{02}}{2k^2} - \cos\varphi^0 > 1, \tag{8.93}$$

care asigură menținerea semnului inițial luat în expresia (8.92) a vitezei unghiulare — pozitiv pentru rotație inițială în sens direct și negativ pentru rotație inițială în sens invers — și deci variația într-un sens unic a funcției $\varphi(t)$;

— *mișcarea de rotație asimptotică a pendulului fizic*, efectuată în cazul satisfacerii condiției critice

$$\frac{\omega^{02}}{2k^2} - \cos\varphi^0 = 1; \tag{8.94}$$

pentru această valoare a constantei de integrare relația (8.92) luînd forma

$$\omega = \dot{\varphi} = \pm\sqrt{2}k\sqrt{1 + \cos\varphi}. \tag{8.95}$$

Scanned with CamScanner

Se observă că viteza unghiulară va deveni zero pentru valoarea $\varphi = \pm \pi$ (rad); poziția pendulului corespunzătoare acestei valori este numită *poziție asimptotică*, datorită faptului că dacă se calculează timpul după care rigidul ajunge în această poziție, rezultă valoare infinită pentru acest timp.

— *mișcarea de rotație oscilatorie a pendulului fizic*, efectuată în condițiile

$$-1 < \frac{\omega^{02}}{2k^2} - \cos\varphi^0 < 1, \tag{8.96}$$

inegalitatea din stînga fiind justificată de caracterul real al vitezei unghiulare.

Caracterul oscilatoriu al mișcării va rezulta din modul de variație, în condițiile (8.96), a funcției $\omega = \omega(\varphi)$, observîndu-se că prin introducerea notației

$$\frac{\omega^{02}}{2k^2} - \cos\varphi^0 = -\cos\Phi, \tag{8.97}$$

cu $\varphi^0 = \Phi$ pentru $\omega^0 = 0$ —, expresia vitezei unghiulare poate fi scrisă sub forma

$$\omega = \dot{\varphi} = \pm\sqrt{2}k\sqrt{\cos\varphi - \cos\Phi}. \tag{8.98}$$

Într-adevăr, admițînd, pentru fixarea ideilor, că din momentul inițial unghiul φ începe să crească, $(\omega > 0)$, se vede imediat că viteza unghiulară va descrește odată cu creșterea unghiului φ, pînă la anularea ei pentru valoarea $\varphi = \Phi$, Φ reprezentînd deci maximul funcției $\varphi(t)$; din acest moment funcția $\varphi(t)$ scăzînd, derivata ei își va schimba semnul, $(\omega < 0)$, axa Qx' a pendulului revenind către poziția Qx'_{st} poziție corespunzătoare stării de echilibru static a pendulului, (fig. 8.4) și caracterizată prin valoarea $\varphi = 0$, pentru care viteza unghiulară capătă valoarea

$$\omega'(0) = -\sqrt{2}k\sqrt{1 - \cos\Phi}, \tag{8.99}$$

cu modulul maxim

$$|\omega'(0)| = \sqrt{2}k\sqrt{1 - \cos\Phi} = \omega_{max}. \tag{8.100}$$

Rezultă că în această ultimă poziție energia cinetică a pendulului are valoarea maximă

$$\mathscr{E}_{max} = \frac{1}{2} J'_{zz}\omega^2_{max} = J'_{zz}k^2(1 - \cos\Phi), \tag{8.101}$$

în baza căreia pendulul va continua să se rotească în sens invers pînă la anularea din nou a vitezei unghiulare, pentru valoarea $\varphi = -\Phi$.

Din această poziție se va produce iar creșterea funcției $\varphi(t)$, cu schimbarea corespunzătoare de semn a derivatei $\dot{\varphi}$, $(\omega > 0)$, pendulul revenind în poziția de echilibru static cu viteza unghiulară

$$\omega''(0) = \sqrt{2}k\sqrt{1 - \cos\Phi} = \omega_{max}, \tag{8.102}$$

căreia îi va corespunde din nou energia cinetică maximă (8.101); în consecință, pendulul își va con-

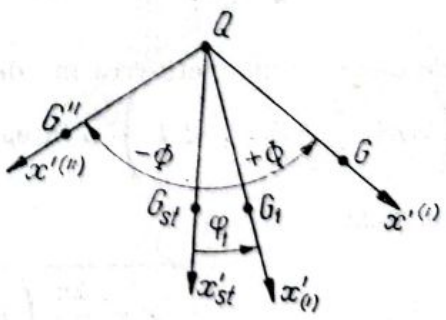


Fig. 8.4.

tinua rotația în sens direct, pînă la anularea, din nou, a vitezei lui unghiulare pentru $\varphi = +\Phi$ ș.a. m. d., diversele etape ale mișcării repetîndu-se identic, ceea ce justifică caracterul oscilator al mișcării lui.

Observațiile precedente evidențiază, de asemenea, și semnificația fizică a constantei Φ, aceea de *amplitudine* a mișcării oscilatorii a pendulului fizic.

Ecuația (8.98), scrisă — prin separarea variabilelor — sub forma

$$dt = \pm \frac{1}{\sqrt{2}k} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\Phi}} = \pm \frac{1}{2k} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\Phi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}, \tag{8.103}$$

va permite să se calculeze și *perioada de oscilație* a pendulului fizic, adică timpul

$$T = \frac{1}{2k}\int_{\varphi_1}^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\Phi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} - \frac{1}{2k}\int_{\Phi}^{-\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\Phi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} +$$

$$+ \frac{1}{2k}\int_{-\Phi}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\Phi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = \frac{1}{k}\int_{-\Phi}^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\Phi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}, \tag{8.104}$$

scurs între două treceri consecutive, și în același sens, a axei Qx' printr-o poziție determinată Qx_1' ($\varphi = \varphi_1$) a ei.

Efectuînd substituția

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\Phi}{2}\sin\chi, \tag{8.105}$$

integrala (8.104) va mai lua forma

$$T = \frac{2}{k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\Phi}{2}\sin^2\chi}} = \frac{2}{k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \sin^2\frac{\Phi}{2}\sin^2\chi\right]^{-\frac{1}{2}} d\chi, \tag{8.106}$$

de unde, prin reținerea în dezvoltarea binomului numai a primilor doi termeni $\left(\sin^2\frac{\Phi}{2}\sin^2\chi \ll 1\right)$ și integrare, se obține, utilizînd și aproximarea $\sin\frac{\Phi}{2} \approx \frac{\Phi}{2}$, formula

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{k}\left(1 + \frac{\Phi^2}{16}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{lr}{g}}\left(1 + \frac{\Phi^2}{16}\right)}. \tag{8.107}$$

Scanned with CamScanner

Ecuația diferențială a mișcării pendulului fizic poate fi complet integrată în *cazul micilor oscilații*, ($\sin \varphi \approx \varphi$), cînd ia forma

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \tag{8.108}$$

cu soluția generală

$$\varphi = \Phi \sin (kt + \alpha). \tag{8.109}$$

Impunînd în această soluție, precum și în expresia derivatei ei în raport cu timpul, condițiile inițiale (9.81), rezultă următoarele valori pentru constantele de integrare Φ și α:

$$\Phi = \sqrt{\varphi^{02} + \frac{\omega^{02}}{k^2}}; \quad \alpha = arc\ tg \left(\sqrt{\frac{g}{l_r}} \frac{\varphi^0}{\omega^0} \right) \tag{8.110}$$

și deci următoarea *ecuație finită a micilor oscilații ale pendulului fizic*:

$$\boxed{\varphi = \sqrt{\varphi^{02} + \frac{\omega^{02}}{k^2}} \sin \left[\sqrt{\frac{g}{l_r}}\ t + arctg \left(\sqrt{\frac{g}{l_r}} \cdot \frac{\varphi^0}{\omega^0} \right) \right]} \tag{8.111}$$

După cum se vede, este vorba în acest caz de o oscilație armonică, de perioadă

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}}, \tag{8.112}$$

ultima formulă reprezentînd o aproximare și mai largă a formulei (8.107).

În condițiile micilor oscilații ale pendulului fizic poate fi semnalată existența *fenomenului de reversibilitate a axelor de suspensie și de oscilație*, axa de oscilație fiind axa paralelă la axa de suspensie, care trece prin punctul O^*, (fig. 8.5) — numit *centru de oscilație* — situat pe axa Qx' la distanța $O^*C_s = l_r$ de centrul de suspensie.

Prin aplicarea teoremei lui Steiner, expresia (8.88) a lungimii reduse a pendulului fizic ia forma

$$l_r = \frac{J'_{zz}}{Ma} = \frac{J'_{\Delta G} + Ma^2}{Ma} = \frac{J'_{\Delta G}}{Ma} + a > a, \tag{8.113}$$

rezultînd de aici că centrul de oscilație se găsește de cealaltă parte a centrului de masă, opusă centrului de suspensie.

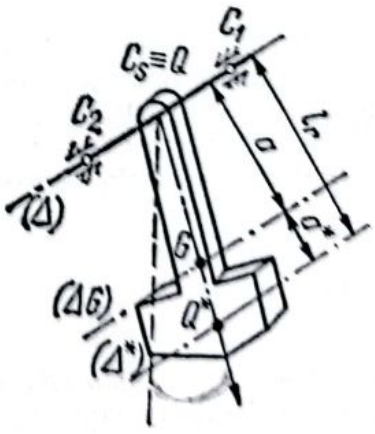


Fig. 8.5.

Scanned with CamScanner

Dacă s-ar inversa acum, între ele, axele de suspensie și de oscilație, ultima devenind axă de rotație, momentul de inerție al pendulului față de noua axă va avea valoarea

$$J_{zz}^{*} = J'_{\Delta_G} + Ma^{*2} = J'_{\Delta_G} + M(l_r - a)^2, \tag{8.114}$$

căreia îi va corespunde o nouă lungime redusă

$$l_r^{*} = \frac{J_{zz}^{*}}{Ma^{*}} = \frac{J'_{\Delta_G}}{Ma^{*}} + a^{*} = \frac{J'_{\Delta_G}}{M(l_r - a)} + l_r - a \tag{8.115}$$

și deci și o nouă perioadă de oscilație

$$T^{*} = 2\pi \sqrt{\frac{l_r^{*}}{g}}. \tag{8.116}$$

Scoțind însă din (8.113) valoarea lui J'_{Δ_G} și înlocuind-o în relația (8.115), rezultă condiția $l_r^{*} = lr$, cu consecința

$$T^{*} = T, \tag{8.117}$$

care permite să se tragă concluzia că perioada micilor oscilații ale unui pendul fizic nu se modifică dacă se inversează între ele axele de suspensie și de oscilație.

În ceea ce privește reacțiunile lagărelor, se va remarca mai întîi că din ecuația (3) a sistemului (8.87) rezultă concluzia

$$R'_{1z} = 0, \tag{8.118}$$

adică ambele lagăre se comportă ca lagăre cilindrice, această concluzie putînd fi extinsă în cazul tuturor mișcărilor de rotație în jurul unei axe fixe în condițiile în care forțele active nu au componente în lungul axei de rotație.

Sistemul format din ecuațiile (1), (2), (4) și (5) ale sistemului (8.87) va permite să se determine și restul necunoscutelor problemei, reprezentate prin reacțiunile R'_{1x}, R'_{1y}, R'_{2x} și R'_{2y}.

În cazul cînd axa de rotație este axă principală de inerție, ($J'_{xz} = J'_{yz} = 0$) ecuațiile (4) și (5) ale sistemului (8.87) capătă formele simplificate

$$0 = h_1 R'_{1y} - h_2 R'_{2y}; \quad 0 = -h_1 R'_{1x} + h_2 R'_{2x}, \tag{8.119}$$

care permit să se tragă următoarele concluzii privind reacțiunile lagărelor în următoarele două situații particulare:

— *cazul pendulului fizic cu centrul de suspensie situat la egală distanță de centrele celor două lagăre* ($h_1 = h_2$), pentru care rezultă din (8.119) concluziile

$$R'_{1x} = R'_{2x}; \quad R'_{1y} = R'_{2y}, \tag{8.120}$$

adică

$$\bar{R}_1 = \bar{R}_2; \tag{8.121}$$

— *cazul pendulului cu centrul de suspensie coincizînd cu centrul unuia din cele două lagăre*, de exemplu $C_s \equiv C_1$, ($h_1 = 0$), în această situație rezultînd concluziile

$$R'_{2x} = R'_{2y} = 0, \tag{8.122}$$

Scanned with CamScanner

adică

$$\bar{R}_2 = 0, \tag{8.123}$$

care atestă comportarea ca axă permanentă de rotație a axei de suspensie.

8.3. *Dinamica mișcării în jurul unui punct fix, a unui rigid*

8.3.1. Parametrii de poziție independenți ai rigidului cu un punct fix

Prin alegerea punctului imobilizat al rigidului — acesta fiind, de regulă, centrul unei articulații sferice, (fig. 8.6) — ca origine comună a celor două repere, fix și invariabil legat de rigid, singurii parametrii de poziție care vor varia în timp vor fi cele trei unghiuri ale lui Euler. În cazul cînd rigidului nu-i mai este aplicată nici o altă legătură pasivă în afara aceleia care imobilizează punctul ales drept pol, toate cele trei unghiuri ale lui Euler vor varia independent unul de altul; aplicarea unor asemenea legături poate reduce numărul parametrilor independenți la doi, sau chiar la unul pentru problemele de tip fundamental.

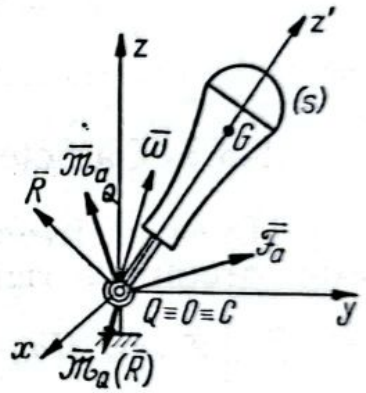


Fig. 8.6.

Rezultă deci condiția

$$\boxed{p \leqslant 3}, \tag{8.124}$$

egalitatea corespunzînd cazului cînd rigidul este supus numai la legătura care imobilizează polul.

Ca urmare a modului de alegere a celor două repere sînt valabile condițiile cinematice

$$\bar{v}_Q \equiv 0\,;\ \bar{\omega} = \dot{\psi}\bar{k} + \dot{\varphi}\bar{k}' + \dot{\theta}\bar{n} \neq 0, \tag{8.125}$$

cu consecințele

$$d\bar{r}_Q \equiv 0\,;\ d\bar{\Theta} = d\psi\bar{k} + d\varphi\bar{k}' + d\theta\bar{n} \neq 0 \tag{8.126}$$

și

$$\bar{a}_Q \equiv 0\,;\ \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} \neq 0. \tag{8.127}$$

Scanned with CamScanner

8.3.2. Caracteristicile cinetice ale rigidului cu punct fix

În baza condițiilor cinematice (8.125) rezultă următoarele expresii pentru componentele torsorului în polul $Q \equiv O$ al impulsurilor rigidului cu punct fix

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{H}}) = \overline{\mathcal{T}}_Q(\overline{\mathcal{H}}) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathcal{H}} = M\bar{v}_G = M(\bar{\omega} \times \bar{r}'_G) \\ \overline{\mathcal{K}} = \overline{\mathcal{K}}_Q = \overline{\mathcal{K}}_{Q_{rot}} = J'_x\omega'_x\bar{i}' + J'_y\omega'_y\bar{j}' + J'_z\omega'_z\bar{k}') \end{array} \right\},} \tag{8.128}$$

precum și pentru energia sa ciñetică

$$\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{E}_{rot} = \frac{1}{2}(J'_x\omega'^2_x + J'_y\omega'^2_y + J'_z\omega'^2_z),} \tag{8.129}$$

8.3.3. Caracteristicile dinamice ale rigidului cu punct fix

În cazul, frecvent întîlnit în aplicații, cînd punctul imobilizat este oarecare în rigid, pot fi scrise relațiile

$$\left| \begin{array}{l} \overline{\mathcal{F}}_{ext} = M\bar{a}_G = M[\varepsilon \times \bar{r}'_G + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}'_G)] \neq 0\,; \\ \overline{\mathcal{M}}_{ext_Q} = \dot{\overline{\mathcal{K}}}_{Q_{rot}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J'_x\omega'_x\bar{i}' + J'_y\omega'_y\bar{j}' + J'_z\omega'_z\bar{k}'] \neq 0, \end{array} \right.$$

în general cu

$$\overline{\mathcal{F}}_{ext} \cdot \overline{\mathcal{M}}_{ext_Q} = M\bar{a}_G\dot{\overline{\mathcal{K}}}_{Q_{rot}} \neq 0,$$

rezultînd de aici concluzia că o asemenea mișcare poate avea loc în condițiile cele mai generale de solicitare exterioară, adică se poate scrie

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_Q(\overline{\mathcal{F}}_{ext}) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathcal{F}}_{ext} = \mathcal{F}'_{ext_x}\bar{i}' + \mathcal{F}'_{ext_y}\bar{j}' + \mathcal{F}'_{ext_z}\bar{k}' \\ \overline{\mathcal{M}}_{ext_Q} = \mathcal{M}'_{ext_{Q_x}}\bar{i}' + \mathcal{M}'_{ext_{Q_y}}\bar{j}' + \mathcal{M}'_{ext_{Q_z}}\bar{k}' \end{array} \right\},} \tag{8.130}$$

fără a fi exclusă însă și situația ca ultima dintre componentele torsorului solicitărilor exterioare să aibă și valoarea zero.

Scanned with CamScanner

În ceea ce privește lucrul mecanic elementar și puterea mecanică a unui sistem de solicitări $(\overline{\mathscr{F}}, \overline{\mathfrak{M}}_Q)$ aplicate rigidului cu punct fix, ele vor avea, în baza condițiilor (8.126) și (8.127), expresiile

$$\boxed{\mathrm{d}\mathscr{L} = \overline{\mathfrak{M}}_Q \mathrm{d}\overline{\Theta} = (\mathfrak{M}'_{Q_x}\omega'_x + \mathfrak{M}'_{Q_y}\omega'_y + \mathfrak{M}'_{Q_z}\omega'_z)\,\mathrm{d}t}, \tag{8.131}$$

respectiv

$$\boxed{\mathscr{P} = \overline{\mathfrak{M}}_Q \overline{\omega} = \mathfrak{M}'_{Q_x}\omega'_x + \mathfrak{M}'_{Q_y}\omega'_y + \mathfrak{M}'_{Q_z}\omega'_z}. \tag{8.132}$$

8.3.4. Stabilirea ecuațiilor scalare ale dinamicii rigidului cu punct fix

Folosind și acum forma a doua a ecuațiilor vectoriale ale dinamicii rigidului, cu considerarea primei dintre condițiile (8.127), se obțin următoarele ecuații vectoriale de mișcare a rigidului cu punct fix

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\overline{\mathscr{H}}]_r + \overline{\omega}\times\overline{\mathscr{H}} = \overline{\mathscr{F}}_a + \overline{\mathscr{F}}_p; \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\overline{\mathscr{K}}_{Q_{rot}}] + \overline{\omega}\times\overline{\mathscr{K}}_{Q_{rot}} = \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} + \overline{\mathfrak{M}}_{p_Q} \end{cases} \tag{8.133}$$

cu următoarele ecuații de proiecții pe axele reperului legat de rigid, reprezentînd *sistemul de ecuații scalare ale dinamicii rigidului cu punct fix*:

$$\boxed{\begin{aligned}
&(1)\ Ma\dot{\omega}'_y + Ma\omega'_x\omega'_z = \mathscr{F}'_{a_x} + \mathscr{F}'_{p_x};\\
&(2)\ -Ma\dot{\omega}'_x + Ma\omega'_y\omega'_z = \mathscr{F}'_{a_y} + \mathscr{F}'_{p_y};\\
&(3)\ -Ma(\omega'^2_x + \omega'^2_y) = \mathscr{F}'_{a_z} + \mathscr{F}'_{p_z};\\
&(4)\ J'_x\dot{\omega}'_x + (J'_z - J'_y)\omega'_y\omega'_z = \mathfrak{M}'_{aQ_x} + \mathfrak{M}'_{pQ_x};\\
&(5)\ J'_y\dot{\omega}'_y + (J'_x - J'_z)\omega'_x\omega'_z = \mathfrak{M}'_{aQ_y} + \mathfrak{M}'_{pQ_y};\\
&(6)\ J'_z\dot{\omega}'_z + (J'_y - J'_x)\omega'_x\omega'_y = \mathfrak{M}'_{aQ_z} + \mathfrak{M}'_{pQ_z}.
\end{aligned}} \tag{8.134}$$

Scanned with CamScanner

(Axele reperului legat de rigid au fost alese după axele principale de inerţie relative la polul Q, axa Qz' fiind chiar axă centrală de inerţie : $\bar{r}'_G = a\,\bar{k}'$.)

Rezultă deci un număr total de

$$\boxed{e = 6} \tag{8.135}$$

ecuaţii scalare de mişcare.

8.3.5. Problema separării şi integrării sistemului de ecuaţii diferenţiale ale dinamicii rigidului cu punct fix

Deşi în cazul acestei mişcări particulare a rigidului este satisfăcută condiţia $e = s = 6$, necunoscutele problemei fiind reprezentate prin cele $p = 3$ unghiuri ale lui Euler şi prin cele $r = 3$ reacţiuni ale legăturii, asimilabile cu o articulaţie sferică, care imobilizează polul Q, totuşi problemele de dinamica rigidului cu punct fix pot căpăta rezolvări exacte numai în următoarele condiţiuni :

— Neglijarea tuturor frecărilor şi rezistenţelor, ($\overline{\mathcal{F}}_p = \bar{R}$; $\overline{\mathfrak{M}}_{p_Q} \equiv 0$), satisfacerea acestei condiţii permiţînd descompunerea sistemului (8.134) în două sisteme independente între ele şi anume : sistemul format din ecuaţiile (4.) (5) şi (6), care vor reprezenta ecuaţiile diferenţiale ale mişcării rigidului în jurul unui punct fix, denumite încă şi *ecuaţiile lui Euler* şi care, prin integrare, vor putea furniza ecuaţiile finite ale mişcării şi sistemul format din ecuaţiile (1), (2) şi (3) care vor permite determinarea reacţiunilor legăturii.

— Încadrarea problemei într-unul din cele trei cazuri de integrabilitate a sistemului de ecuaţii diferenţiale, dovedite de E. Husson ca fiind singurele posibile pentru condiţii iniţiale oarecari :

— *cazul Euler — Poinsot*, caracterizat prin condiţia

$$\overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} \equiv 0\,; \tag{8.136}$$

— *cazul Lagrange-Poisson*, corespunzător condiţiilor

$$x'_G = y'_G = 0\,;\ z'_G = a\,;\ J'_x = J'_y\,;\ \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} = \overline{\mathcal{M}}_Q(\bar{P}) = \bar{r}'_G \times \bar{P}\,; \tag{8.137}$$

— *cazul Sofia Kovalevskaia*, caracterizat prin condiţiile

$$x'_G = a\,;\ y'_G = z'_G = 0\,;\ J'_x = J'_y = 2J'_z\,;\ \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} = \overline{\mathcal{M}}_Q(\bar{P}) = \bar{r}'_G \times \bar{P}. \tag{8.138}$$

Scanned with CamScanner

În continuare, vor fi examinate următoarele două probleme de dinamica rigidului cu punct fix, interesînd în mod deosebit practica inginerească :

1°. Integrarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării rigidului cu punct fix în condițiile cazului Euler—Poinsot, cu elipsoid de inerție de revoluție ($J'_x = J'_y = J_0$; $J'_z = J$). În condițiile precizate, ecuațiile lui Euler iau formele

$$\begin{cases} J_0\dot{\omega}'_x + (J - J_0)\omega'_y\omega'_z = 0 ; \\ J_0\dot{\omega}'_y - (J - J_0)\omega'_x\omega'_z = 0 ; \\ J\dot{\omega}'_z = 0, \end{cases} \tag{8.139}$$

ultima admițînd integrala primă

$$\omega'_z = c, \tag{8.140}$$

c fiind o constantă de integrare.

Pentru integrarea, mai departe, a sistemului de ecuații diferențiale vor fi luate în considerație următoarele două situații distincte :

— *Problema cere să se determine numai viteza unghiulară ca funcție de timp.* În baza relației (8.140), primele două dintre ecuațiile (8. 139) vor lua formele

$$J_0\dot{\omega}'_x + (J - J_0)c\omega'_y = 0 ; \quad J_0\dot{\omega}'_y - (J - J_0)c\omega'_x = 0 \tag{8.141}$$

și deci scoaterea din prima ecuație a lui ω'_y :

$$\omega'_y = -\frac{J_0}{(J - J_0)c}\dot{\omega}'_x \tag{8.142}$$

și înlocuirea sa, după derivare în raport cu timpul, în cea de-a doua dintre ecuații, va conduce la ecuația diferențială

$$\ddot{\omega}'_x + \left(\frac{J - J_0}{J_0}\right)^2 c^2\omega'_x = 0, \tag{8.143}$$

cu soluția generală

$$\omega'_x = \Omega \sin\left(\frac{J - J_0}{J_0}ct + \chi\right), \tag{8.144}$$

Ω și χ fiind două noi constante de integrare.

Scanned with CamScanner

Ținînd seama și de relația (8.142) va rezulta astfel următoarea soluție generală a sistemului (8.139) de ecuații diferențiale

$$\omega'_x = \Omega \sin\left(\frac{J - J_0}{J_0} ct + \chi\right); \ \omega'_y = -\Omega \cos\left(\frac{J - J_0}{J_0} ct + \chi\right); \ \omega'_z = c. \tag{8.145}$$

Impunînd, în aceste relații, condițiile inițiale

$$t = 0 \ \{\omega'_x(0) = \omega'^0_x; \ \omega'_y(0) = \omega'^0_y; \ \omega'_z(0) = \omega'^0_z)\}, \tag{8.146}$$

vor rezulta următoarele valori pentru constantele de integrare:

$$\Omega = \sqrt{(\omega'^0_x)^2 + (\omega'^0_y)^2}; \ \chi = arc\,tg \frac{\omega'^0_x}{\omega'^0_y}; \ c = \omega'^0_z \tag{8.147}$$

și deci următoarele expresii determinate ale proiecțiilor pe axele reperului legat de rigid ale vitezei unghiulare:

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega'_x = \sqrt{(\omega'^0_x)^2 + (\omega'^0_y)^2} \sin\left(\frac{J - J_0}{J_0} ct + arctg \frac{\omega'^0_x}{\omega'^0_y}\right); \\ &\omega'_y = -\sqrt{(\omega'^0_x)^2 + (\omega'^0_y)^2} \cos\left(\frac{J - J_0}{J_0} ct + arctg \frac{\omega'^0_x}{\omega'^0_y}\right); \\ &\omega'_z = \omega'^0_z \end{aligned}} \tag{8.148}$$

— *Problema cere să se determine unghiurile lui Euler ca funcții de timp.* Întrucît în condițiile cazului Euler-Poinsot este valabilă legea de conservare a momentului cinetic în raport cu polul Q:

$$\overline{\mathcal{K}}_{Qrot} = \overline{\mathcal{K}}_Q = \overline{\mathcal{K}}^0, \tag{8.149}$$

se vor putea folosi integralele momentului cinetic, care, prin orientarea axei fixe Oz în direcția vectorului constant $\overline{\mathcal{K}}^0$, reprezentînd momentul cinetic inițial al rigidului, ($\overline{\mathcal{K}}^0 = \mathcal{K}^0 \bar{k}$ și deci $J'_x\omega'_x\bar{i}' + J'_y\omega'_y\bar{j}' + J'_z\omega'_z\bar{k}' = \mathcal{K}^0\bar{k}$), vor avea formele

$$J_0\omega'_x = \mathcal{K}^0\alpha_{xz}; \ J_0\omega'_y = \mathcal{K}^0\alpha_{yz}; \ J\omega'_z = \mathcal{K}^0\alpha_{zz}. \tag{8.150}$$

Scanned with CamScanner

Înlocuind în ultima dintre aceste integrale pe ω_z' cu constanta c, (integrala 8.140), rezultă relaţia

$$\alpha_{zz} = \cos\theta = \frac{J}{\mathcal{K}^0} c = const., \tag{8.151}$$

adică

$$\theta = arc\cos\left(\frac{J_C}{\mathcal{K}^0}\right) = \theta^\circ, \tag{8.152}$$

în baza căreia expresia vitezei unghiulare instantanee ia forma

$$\bar{\omega} = \dot{\psi}\bar{k} + \dot{\varphi}\bar{k}', \tag{8.153}$$

cu următoarele proiecţii pe axele reperului legat de rigid :

$$\omega_x' = \dot{\psi}\alpha_{xz}\,;\ \omega_y' = \dot{\psi}\alpha_{yz}\,;\ \omega_z' = \dot{\psi}\alpha_{zz} + \dot{\varphi}. \tag{8.154}$$

Înlocuind primele două proiecţii în primele două dintre integralele prime (8.150), se ajunge la aceeaşi concluzie.

$$\dot{\psi} = \frac{\mathcal{K}^0}{J_0} = \omega_p = const, \tag{8.155}$$

rezultînd de aici, prin integrare ;

$$\psi = \omega_p t + \psi^0, \tag{8.156}$$

ψ° fiind o nouă constantă de integrare, reprezentînd pe $\psi(0) = \psi^0$.

În fine, înlocuind în cea de-a treia dintre integralele prime (8.150) pe ω_z' cu expresia sa (8.154), rezultă ecuaţia

$$J(\dot{\psi}\alpha_{zz} + \dot{\varphi}) = \mathcal{K}^0\alpha_{zz},$$

din care se va scoate, ţinînd seama şi de relaţia (8.155), valoarea lui $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \frac{\mathcal{K}^0}{J}\cos\theta\left(1 - \frac{J}{J_0}\right) = \omega_r = const. \tag{8.157}$$

Scanned with CamScanner

şi deci, prin integrare, expresia celui de-al treilea unghi al lui Euler :

$$\varphi = \omega_r t + \varphi^0, \tag{8.158}$$

φ^0 fiind o nouă constantă de integrare, reprezentînd valoarea iniţială a unghiului de rotaţie proprie, $\varphi(0) = \varphi^0$.

Ecuaţiile de mişcare găsite

$$\boxed{\psi = \omega_p t + \psi^0 ;\ \varphi = \omega_r t + \varphi^0 ;\ \theta = \theta^0}, \tag{8.159}$$

cu constantele de integrare c şi $\mathcal{K}^0$ din expresiile mărimilor ω_p şi ω_r determinate cu ajutorul condiţiilor iniţiale, arată că mişcarea rigidului cu punct fix, efectuată în condiţiile cazului Euler-Poinsot cu elipsoid de inerţie de revoluţie, $(J'_x = J'_y = J_0)$, este o *precesie regulată*, aceasta fiind deci tot o mişcare cu caracter inerţial.

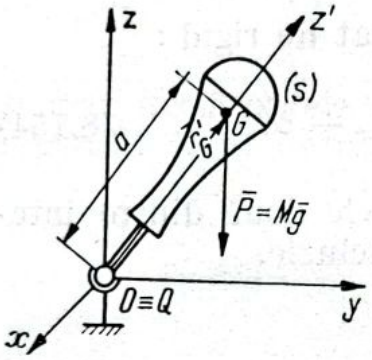


Fig. 8.7.

2. Stabilirea condiţiilor în care are loc mişcarea de precesie regulată în cazul Lagrange-Poisson.

Orientînd, de astă dată, axa fixă Oz pe verticală şi în sus, $(\bar{P} = -Mg\bar{k})$, (fig. 8.7), greutatea rigidului — unica solicitare activă în cazul Lagrange-Poisson — va avea următoarele proiecţii pe axele reperului legat de rigid

$$P'_x = \bar{P}\bar{i}' = -Mg\alpha_{xz};\ P'_y = \bar{P}\bar{j}' = -Mg\alpha_{yz};\ P'_z = \bar{P}\bar{k}' = -Mg\alpha_{zz}, \tag{8.160}$$

rezultînd astfel următoarele proiecţii, pe aceleaşi axe, ale momentului ei în raport cu polul Q :

$$\mathcal{M}'_{Q_x}(\bar{P}) = Mag\alpha_{yz};\ \mathcal{M}'_{Q_y}(\bar{P}) = -Mag\alpha_{xz};\ \mathcal{M}'_{Q_z}(\bar{P}) = 0. \tag{8.161}$$

În consecinţă, ecuaţiile lui Euler corespunzătoare cazului Lagrange, cu : $(J'_x = J'_y = J_0;\ J'_z = J)$, vor avea formele

$$\begin{cases} J_0\dot{\omega}'_x + (J - J_0)\omega'_y\omega'_z = Mag\alpha_{yz}; \\ J_0\dot{\omega}'_y - (J - J_0)\omega'_x\omega'_z = -Mag\alpha_{xz}; \\ J\dot{\omega}'_z = 0. \end{cases} \tag{8.162}$$

Scanned with CamScanner

Pe de altă parte, mişcarea trebuind să fie o precesie regulată, determinată prin ecuaţiile finite

$$\psi = \omega_p t\,;\ \varphi = \omega_r t\,;\ \theta = \theta^0, \tag{8.163}$$

viteza unghiulară instantanee va avea expresia

$$\bar{\omega} = \omega_p \bar{k} + \omega_r \bar{k}' = \bar{\omega}_p + \bar{\omega}_r, \tag{8.164}$$

ei corespunzîndu-i următoarele proiecţii pe axele reperului legat de rigid

$$\begin{cases} \omega_x' = \bar{\omega}\bar{i}' = \omega_p \alpha_{xz} = \omega_p \sin(\omega_r t) \sin\theta^0\,; \\ \omega_y' = \bar{\omega}\bar{j}' = \omega_p \alpha_{yz} = \omega_p \cos(\omega_r t) \sin\theta^0\,; \\ \omega_z' = \bar{\omega}\bar{k}' = \omega_p \alpha_{zz} + \omega_r = \omega_p \cos\theta^0 + \omega_r, \end{cases} \tag{8.165}$$

cu

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x' = \omega_p \omega_r \cos(\omega_r t)\ \sin\theta^0 = \omega_p \omega_r \alpha_{yz}\,; \\ \dot{\omega}_y' = -\omega_p \omega_r \sin(\omega_r t)\ \sin\theta^0 = -\omega_p \omega_r \alpha_{xz}\,; \\ \dot{\omega}_z' = 0. \end{cases} \tag{8.166}$$

Introducerea expresiilor (8.165) şi (8.166) în primele două dintre ecuaţiile (8.162) conduce la aceeaşi concluzie

$$\boxed{J_0 \omega_p \omega_r + (J - J_0)\,\omega_p(\omega_p \cos\theta^0 + \omega_r) = Mag}\,, \tag{8.167}$$

care va reprezenta condiţia căutată.

În ipoteza că a fost efectuată integrarea sistemului de ecuaţii ale lui Euler, primele trei ecuaţii din sistemul (8.134), în care, conform precizărilor făcute, proiecţiile forţei rezultante pasive vor fi reprezentate numai prin proiecţiile reacţiunii legăturii care imobilizează polul Q, vor permite să se determine şi aceste ultime necunoscute ale problemei :

$$\boxed{\begin{aligned} R_x' &= Ma(\dot{\omega}_y' + \omega_x'\omega_z') - \mathscr{F}'_{a_x}\,;\ R_y' = -Ma(\dot{\omega}_x' - \omega_y'\omega_z') - \mathscr{F}'_{a_y} \\ R_z' &= -Ma(\omega_x'^2 + \omega_y'^2) - \mathscr{F}'_{a_z}. \end{aligned}} \tag{8.168}$$

Scanned with CamScanner

8.3.6. Aplicație: Giroscopul (teorie elementară)

Se numește *giroscop*, un rigid greu cu punct fix, prezentînd simetrie de revoluție în repartiția masei și executînd o mișcare de precesie regulată, cu viteza unghiulară de rotație proprie orientată în lungul axei de simetrie de revoluție — numită încă și *axa giroscopului* — și de modul foarte mare în raport cu modulul vitezei unghiulare de precesie ; legătura care imobilizează punctul în jurul căruia se execută precesia regulată este asimilată cu o articulație sferică cu frecare neglijabilă (fig. 8.8.).

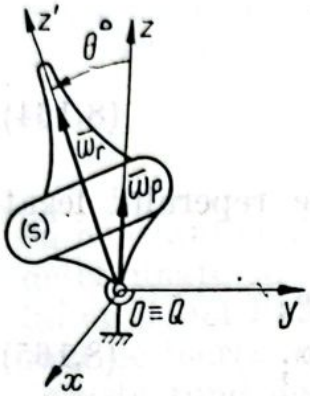


Fig. 8.8.

Definiția dată mai sus justifică încadrarea giroscopului în condițiile cazului Lagrange-Poisson, cu condițiile cinematice suplimentare

$$\psi = \omega_p t\,;\quad \varphi = \omega_r t\,;\quad \theta = \theta^0, \tag{8.169}$$

cu

$$|\omega_r| \gg |\omega_p|, \tag{8.170}$$

ultima permițînd să se accepte aproximarea

$$\overline{K}_{Q_{rot}} = J\omega_r\left\{\bar{k}' + \frac{\omega_p}{\omega_r}\left[\frac{J_0}{J}\ (\alpha_{xz}\bar{i}' + \alpha_{yz}\bar{j}') + \alpha_{zz}\bar{k}'\right]\right\} \approx J\bar{\omega}_r, \tag{8.171}$$

care va constitui *ipoteza fundamentală a teoriei elementare a giroscopului.*

Observînd că în această situație se poate scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\overline{K}_{Q_{rot}}]_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J\omega_r\bar{k}']_r = 0$$

și

$$\bar{\omega}\times\overline{K}_{Q_{rot}} = (\bar{\omega}_p + \bar{\omega}_r)\times J\bar{\omega}_r = \bar{\omega}_p\times J\bar{\omega}_r,$$

rezultă următoarea formă pentru ecuația vectorială de mișcare corespunzătoare teoremei momentului cinetic :

$$\boxed{J\bar{\omega}_p\times\bar{\omega}_r = \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q}}, \tag{8.172}$$

această relație reprezentînd *ecuația fundamentală a teoriei elementare a giroscopului.*

Ultima ecuație permite să se explice o serie de fenomene care par curioase la prima vedere și care au primit numele de *fenomene giroscopice.*

Astfel, în cazul rotorului (Rt), (fig. 8.9), cu axa (Δ_1) fixată în lagărele (Lg_1) și (Lg_2) montate pe cadrul (Cd), ultimul avînd posibilitatea să se rotească, la rîndul lui, în jurul axei fixe (Δ_2), pentru a se imprima ansamblului cadru-rotor o rotație cu viteza unghiulară

Scanned with CamScanner

$\bar{\omega}_2$ în jurul axei (Δ_2) va trebui să se acționeze diferențiat, potrivit următoarele două situații distincte :

1) În cazul cînd rotorul nu se rotește în jurul axei sale, $(\bar{\omega}_1 \equiv 0)$, el formînd un ansamblu rigid cu cadrul, va trebui să se exercite asupra ansamblului un cuplu de moment $\overline{\mathfrak{M}}'$ satisfăcînd — în ipoteza neglijării tuturor frecărilor — relația

$$\overline{\mathfrak{M}}' = J'\dot{\bar{\omega}}_2,$$

unde J' este momentul de inerție al ansamblului cadru — rotor față de axa (Δ_2) ; momentul $\overline{\mathfrak{M}}'$ va fi deci orientat în lungul axei (Δ_2) și va putea fi realizat prin cuplul de forțe $(\bar{F}' - \bar{F}')$, trasate punctat în fig. 8.9 și aplicate cadrului prin intermediul lagărelor (Lg_1) și (Lg_2).

2) În cazul cînd rotorul se rotește în jurul axei sale cu o viteză unghiulară $\bar{\omega}_1$ de modul foarte mare în raport cu modulul vitezei unghiulare $\bar{\omega}_2$ a cadrului, el se va comporta ca un giroscop cu $\bar{\omega}_p = \bar{\omega}_2$ și $\bar{\omega}_r = \bar{\omega}_1$ și deci momentul cu care va trebui să se acționeze asupra cadrului va trebui să satisfacă relația

$$\overline{\mathfrak{M}} = J\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1,$$

unde J este acum momentul de inerție al rotorului față de axa sa de rotație — ; acest ultim moment va fi orientat deci perpendicular pe axele (Δ_1) și (Δ_2), el putînd fi realizat prin cuplul de forțe $(\bar{F} - \bar{F})$, trasate prin linii neîntrerupte în fig, 8.9, aplicate cadrului prin intermediul lagărelor (Lg_1) și (Lg_2).

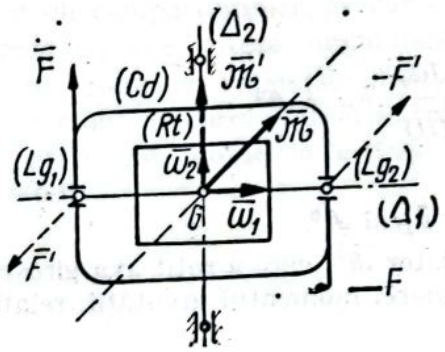


Fig. 8.9.

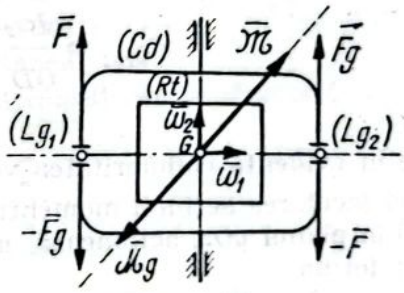


Fig. 8.10.

O consecință a acestui fenomen o constituie apariția, în baza principiului acțiunii și reacțiunii, a unui alt cuplu de forțe, $(\bar{F}_g = -\bar{F}\,;\ -\bar{F}_g = \bar{F})$, (fig. 8.10), de moment :

$$\boxed{\overline{\mathcal{M}}_g = -\overline{\mathfrak{M}} = -J\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1}, \tag{8.173}$$

exercitate de arborele rotorului asupra lagărelor (Lg_1) și (Lg_2), aceste forțe purtînd numele de *forțe giroscopice*, iar momentul $\overline{\mathcal{M}}_g$ fiind numit *moment giroscopic*.

Un al doilea fenomen giroscopic explicat cu ajutorul ecuației (8.172) este apariția mișcării de precesie a unui giroscop în rotație proprie, la devierea axei lui din poziție

Scanned with CamScanner

verticală, cînd funcționa ca axă naturală de rotație în baza legii de conservare a momentului cinetic

$$\overline{\varkappa}_{Q_{rot}} = \overline{\varkappa}_Q = J\bar{\omega}_r = \varkappa^0\bar{k}. \tag{8.174}$$

Experiența arată că la încercarea de deviere a axei unui giroscop din poziția verticală prin acțiunea, de scurtă durată, a unei forțe $\bar{F}^0$ orientată, de exemplu, după axa Ox, (fig. 8.11), ei corespunzîndu-i momentul

$$\overline{\mathfrak{M}}^0 = \overline{\mathcal{M}}_Q(\bar{F}^0) = \overline{\mathcal{M}}^0 = \mathcal{M}^0\bar{J},$$

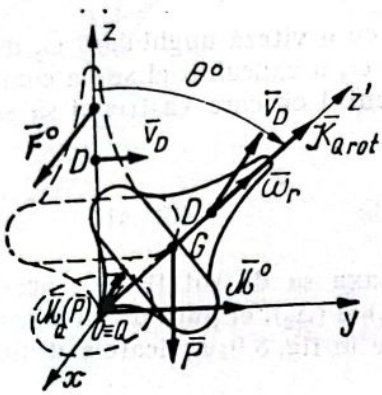


Fig. 8.11.

deviația axei nu se produce în planul xOz, cum s-ar întîmpla în cazul cînd giroscopul nu ar avea mișcarea de rotație proprie, ci în planul yOz, astfel încît viteza unui punct D al axei giroscopului să fie coliniară cu momentul $\overline{\mathcal{M}}^0$.

Într-adevăr, vectorul de poziție $\bar{r}_D = \overline{OD}.\bar{k}'$ al punctului D va avea același versor ca și momentul cinetic $\overline{\varkappa}_{Q_{rot}}$ al giroscopului, putîndu-se scrie deci relația

$$\overline{\varkappa}_{Q_{rot}} = J\omega_r\bar{k}' = \frac{J\omega_r}{\overline{OD}}.\bar{r}_D,$$

cu consecința

$$\dot{\overline{\varkappa}}_{Q_{rot}} = \frac{J\omega_r}{\overline{OD}}.\dot{\bar{r}}_D = \frac{J\omega_r}{\overline{OD}}.\bar{v}_D = \overline{\mathcal{M}}^0, \tag{8.175}$$

care scoate în evidență coliniaritatea vectorilor $\bar{v}_D$ și $\overline{\mathcal{M}}^0$.

După încetarea acțiunii momentului deviator $\overline{\mathcal{M}}^0$, care a rotit axa giroscopului de un unghi θ în planul yOz, acționează, în continuare, momentul greutății, relația (8.175) luînd acum forma

$$\frac{J\omega_r}{\overline{OD}}\bar{v}_D = \overline{\mathcal{M}}_Q(\bar{P}) = \bar{r}'_G \times \bar{P}. \tag{8.176}$$

Este suficient să se observe acum că momentul greutății, în permanență normal la planul determinat de axa giroscopului și de suportul greutății, se va găsi tot timpul în planul orizontal xOy, (fig. 11) și că odată cu deplasarea punctului D al axei giroscopului în direcția vectorului $\bar{v}_D$ se rotește și momentul greutății în jurul polului Q, rămînînd însă în planul Oxy, pentru a se înțelege apariția rotației axei giroscopului în jurul axei Oz, deci apariția precesiei.

Din ecuația fundamentală corespunzătoare acestei situații:

$$J\bar{\omega}_p \times \bar{\omega}_r = \bar{r}'_G \times \bar{P} \tag{8.177}$$

Scanned with CamScanner

va rezulta, prin trecere la moduli și simplificarea factorului *sin* 0, mărimea vitezei unghiulare de precesie

$$\boxed{|\bar{\omega}_p| = \frac{Mga}{J|\bar{\omega}_r|}}, \tag{8.178}$$

$a = |\bar{r}'_G|$ fiind distanța centrului de masă al giroscopului la polul Q.

Tot cu ajutorul ecuației fundamentale (8.172) pot fi explicate unele efecte — numite *efecte giroscopice* — ale comportării rigidelor ca giroscoape, avînd în practica inginerească două aspecte:

Un aspect dăunător, manifestat prin apariția solicitărilor giroscopice în lagărele rotorilor în rotație rapidă fixați pe construcții mecanice în mișcare — nave, avioane autovehicule etc., atunci cînd acestea din urmă execută rotații instantanee.

Astfel, o navă maritimă poate executa, datorită valurilor, curenților marini, vîntului etc., *oscilații de ruliu* în jurul axei longitudinale Qy' (fig. 8.12), *oscilații de tangaj* în jurul axei transversale Ox', sau *oscilații în jurul verticalei* Qz'; pe navă se găsesc însă întotdeauna montați rotori, în rotații cu viteze unghiulare foarte mari în jurul axelor de rotație proprie orientate, de regulă, tot după una din cele trei direcții menționate mai sus. Pentru acești rotori, oricare din cele trei oscilații ale navei va juca rol de mișcare de precesie, rotorii comportîndu-se, în consecință, ca giroscoape. Dacă $\bar{\omega}_i$ este viteza unghiulară de rotație proprie a unui asemenea rotor (S_i) și $\bar{\omega}_{osc}$ este viteza unghiulară a uneia, oricare, dintre rotațiile instantanee oscilatorii ale navei, atunci în lagărele rotorului considerat se dezvoltă forțe giroscopice de modul

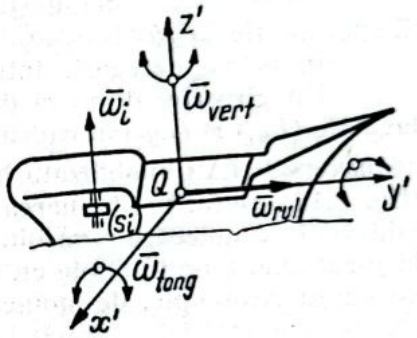


Fig. 8.12.

$$|\bar{F}_{gi}| = \frac{|\bar{\mathcal{M}}_{gi}|}{h_i} = \frac{|-J_i\bar{\omega}_{osc}\times\bar{\omega}_i|}{h_i}, \tag{8.179}$$

J_i fiind momentul de inerție al rotorului în raport cu axa sa de rotație proprie, iar h_i distanța dintre centrele celor două lagăre.

Un alt exemplu de efect giroscopic cu aspect dăunător îl constituie creșterea presiunilor pe șinele exterioare exercitate de roțile unui vagon la înscrierea lui în curbe și diminuarea presiunilor pe șinele interioare.

Într-adevăr, orice pereche solidară de roți ale unui vagon care se înscrie, cu viteza de translație $\bar{v}$, într-o curbă de rază R(m), (fig. 8.13), formează un giroscop, a cărui viteză unghiulară de rotație proprie satisface condiția

$$|\bar{\omega}_1| = \frac{|\bar{v}|}{r} \gg \frac{|\bar{v}|}{R} = |\bar{\omega}_2|, \tag{8.180}$$

$r \ll R$ fiind raza roții și $\bar{\omega}_2$ fiind viteza unghiulară instantanee a vagonului — deci și aperechii considerate de roți — , imprimată prin înscrierea în curbă (arc de cerc).

Scanned with CamScanner

Rezultă de aici apariția unui cuplu giroscopic, de moment

$$\bar{\mathcal{M}}_g = -J\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1 \tag{8.181}$$

unde J este momentul de inerție al perechii de roți în raport cu axa de rotație proprie — și deci apariția forțelor giroscopice $\bar{F}_g$ și $-\bar{F}_g$, aplicate șinelor, care joacă rolul lagărelor, (fig. 8.13), modulul acestor forțe avînd valoarea

$$\boxed{|\bar{F}_g| = \frac{|\bar{\mathcal{M}}_g|}{e} = \frac{Jv^2}{e\,r\,R}}. \tag{8.182}$$

e fiind ecartamentul șinelor.

Un aspect util, manifestat în posibilitatea de utilizare a unor giroscoape de construcții speciale fie ca *stabilizatoare de mișcare*, fie ca *indicatoare de direcție*.

În prima categorie intră, de exemplu, *amortizoarele giroscopice antiruliu*.

Un giroscop de mari dimensiuni (S), cu axa de rotație proprie imobilizată prin lagărele (Lg_1) și (Lg_2) în cadrul (Cd), ultimul putîndu-se roti, la rîndul său, în jurul axei transversale (Δ') imobilizată în vas prin lagărele (Lg_1') și (Lg_2') montate pe pereții vasului (fig. 8.14), permite atenuarea, în mod sensibil, a oscilațiilor de ruliu ale vasului. Într-adevăr, la o aplecare a vasului în sensul indicat de săgeată, echivalentă cu o rotire a sa în jurul axei longitudinale cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$, se dezvoltă în lagărele (Lg_1) și (Lg_2) un cuplu giroscopic, de moment

$$\bar{\mathcal{M}}_{g1} = -J\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1, \tag{8.183}$$

care va acționa asupra cadrului (Cd), rotindu-l în jurul axei (Δ') cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_3$; în această ultimă rotație va fi antrenată însă, prin cadru, și axa de rotație proprie

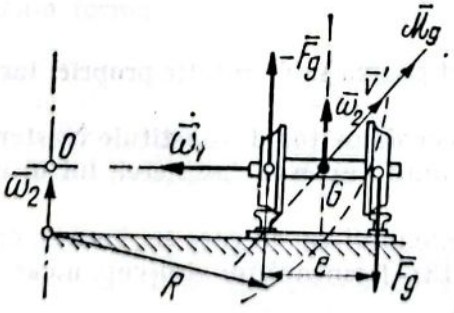


Fig. 8.13.

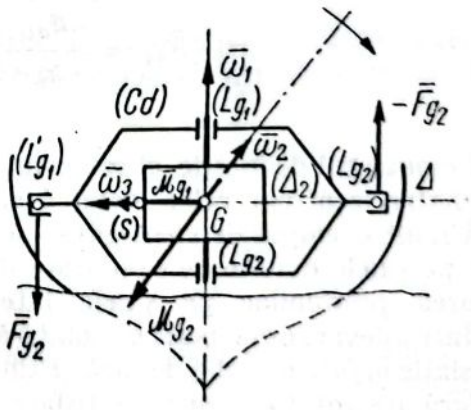


Fig. 8.14.

a giroscopului, pentru care vectorul $\bar{\omega}_3$ va juca rolul unei noi viteze unghiulare de precesie, ei corespunzîndu-i momentul giroscopic

$$\bar{\mathcal{M}}_{g2} = -J\bar{\omega}_3 \times \bar{\omega}_1 \tag{8.184}$$

Scanned with CamScanner

orientat după axa longitudinală a vasului și în sens invers vitezei unghiulare $\bar{\omega}_2$; acest moment acționînd, prin lagărele (L'_{g1}) și (L'_{g2}), asupra vasului, îl va readuce în poziția normală de plutire, compensînd efectul oscilației de ruliu.

Pe același principiu au fost realizate vagoane monorai (fig. 8.15) și autovehicole cu două roți, stabilitatea mișcării fiindu-le asigurată prin giroscoape montate convenabil pe ele.

În cea de-a doua categorie de giroscoape cu efecte utile intră *compasele giroscopice* — indicînd direcția nord — *azimuturile giroscopice* — indicînd azimutul — și *orizonturile artificiale giroscopice*, respectiv *giroclinometrele* dacă sînt prevăzute și cu instrumente

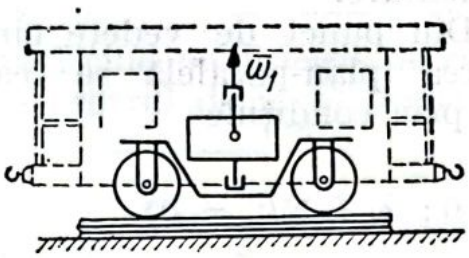


Fig. 8.15.

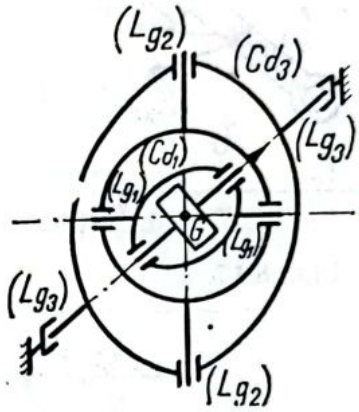


Fig. 8.16.

de măsurare a unghiurilor — indicînd orizontul locului — , toate avînd același principiu constructiv la bază : un giroscop aflat în condițiile cazului Euler — Poinsot, cu centrul de masă imobilizat prin intermediul unei suspensiuni cardanice (fig. 8.16), își va păstra, în baza legii de conservare a momentului cinetic, direcția, fixată inițial, a axei sale de rotație proprie.

8.4. *Dinamica mișcării plan-paralele a rigidului*

8.4.1. Parametrii de poziție independenți ai rigidului în mișcare plan-paralelă

Prin reducerea, justificată în cinematică, a studiului mișcării plan — paralele a rigidului la studiul mișcării în planul director Oxy a secțiunii (Σ_s) a corpului, care conține și centrul de masă G al acestuia, ales, de regulă în problemele de dinamică, ca pol invariabil legat de rigid, parametrii de poziție ai rigidului variabili în timp au fost reduși numai la coordonatele x_G și y_G ale centrului de masă și la unghiul de rotație φ (fig. 8.17).

Dacă rigidului nu-i mai este aplicată nici o altă legătură pasivă în afara celeia care asigură menținerea centrului de masă în planul

Scanned with CamScanner

Oxy şi menţinerea normală la planul director al mişcării a axei instantanee de rotaţie, toţi cei trei parametri de poziţie variază independent unul de altul; aplicarea unor legături suplimentare pasive poate reduce numărul parametrilor de poziţie independenţei la 2, sau la cel puţin 1 în problemele de tip fundamental.

Rezultă deci condiţia

$$\boxed{p \leqslant 3,} \qquad (8.185)$$

egalitatea corespunzînd cazului cînd rigidului nu-i sînt aplicate legături suplimentare.

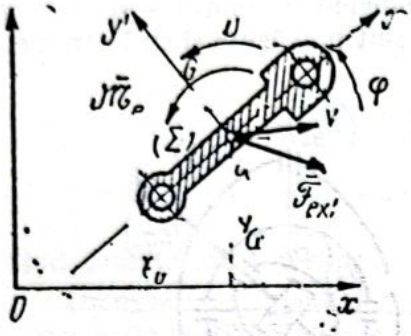


Fig. 8.17.

Din punct de vedere cinematic, mişcarea plan-paralelă se caracterizează prin condiţiile

$$\bar{v}_G = \dot{x}_G\bar{i} + \dot{y}_G\bar{j} \neq 0\,;\ \bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{k}' \neq 0, \qquad (8.186)$$

cu consecinţele

$$d\bar{r}_G = \bar{v}_G dt \neq 0\,;\ d\bar{\Theta} = d\varphi\bar{k}' \neq 0 \qquad (8.187)$$

şi

$$\bar{a}_G = \dot{\bar{v}}_G \begin{matrix} \neq 0 \\ < \\ = 0 \end{matrix};\quad \bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\bar{k}' \begin{matrix} \neq 0 \\ < \\ = 0 \end{matrix}. \qquad (8.188)$$

8.4.2. Caracteristicile cinetice ale rigidului în mişcare plan paralelă

Considerînd cazul cel mai des întîlnit în aplicaţiile tehnice, cînd planul secţiunii (Σ_s) este plan de simetrie în repartiţia masei şi deci axa de rotaţie corespunzătoare centrului de masă este axă centrală de inerţie, ($J'_{xz} = J'_{yz} = 0\,;\ J'_{zz} = J'_z = J$), torsorii, în centrul de masă G şi în polul fix *0*, ai impulsurilor rigidului în mişcare plan-paralelă vor avea formele

$$\boxed{\mathcal{T}_G(\overline{\mathcal{H}}) = \begin{Bmatrix} \overline{\mathcal{H}} = M\bar{v}_G \\ \overline{\mathcal{K}}_G = J\bar{\omega} \end{Bmatrix}}, \qquad (8.189)$$

Scanned with CamScanner

respectiv

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathscr{K}}) = \begin{Bmatrix} \overline{\mathscr{K}} = M\bar{v}_G \\ \overline{\mathscr{K}} = \bar{r}_G \times M\bar{v}_G + J\bar{\omega} \end{Bmatrix}}. \tag{8.190}$$

De asemenea, energia cinetică a rigidului în mișcare plan-paralelă va avea expresia

$$\boxed{\mathscr{E} = \frac{1}{2}\left[M\bar{v}_G^2 + J\bar{\omega}^2\right]}, \tag{8.191}$$

iar în cazul cînd polul legat de rigid (de secțiunea (Σ_s)) nu va putea fi ales în centrul de masă, expresia

$$\boxed{\mathscr{E} = \frac{1}{2} M\bar{v}_Q^2 + M\bar{v}_Q(\bar{\omega} \times \bar{r}'_G) + \frac{1}{2} J\omega^2}. \tag{8.192}$$

8.4.3. Caracteristicile dinamice în mișcarea plan-paralelă a rigidului

Observînd că în cazul acestei mișcări pot fi scrise relațiile

$$\begin{cases} \overline{\mathscr{F}}_{ext} = M\bar{a}_G = (M\ddot{x}_G)\bar{i} + (M\ddot{y}_G)\bar{j}\,; \\ \overline{\mathfrak{M}}_{ext_G} = \dot{\overline{\mathscr{K}}}_G = J\bar{\varepsilon} = (J\ddot{\varphi})\bar{k}', \end{cases} \tag{8.193}$$

cu

$$\overline{\mathscr{F}}_{ext}\overline{\mathfrak{M}}_{ext_G} = M\bar{a}_G . J\bar{\varepsilon} = 0, \tag{8.194}$$

rezultă următoarea formă pentru torsorul rezultant în centrul de masă al rigidului al solicitărilor exterioare la care este supus, necesară pentru a-i asigura efectuarea mișcării plan-paralele :

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_G = (\overline{\mathscr{F}}_{ext}) = \begin{Bmatrix} \overline{\mathscr{F}}_{ext} = \mathscr{F}_{ext_x}\bar{i} + \mathscr{F}_{ext_y}\bar{j} \\ \overline{\mathfrak{M}}_{ext_G} = \mathfrak{M}_{ext_G}\bar{k}' \end{Bmatrix}}. \tag{8.195}$$

Scanned with CamScanner

Condițiile precedente arată că mișcarea plan-paralelă a rigidului, cu axa de rotație axă centrală de inerție, se produce atunci cînd sistemul tuturor solicitărilor exterioare, la care este supus, este reductibil la o rezultantă unică, situată în planul director al mișcării și cu suportul netrecînd, în general, prin centrul de masă al rigidului.

De asemenea, în baza condițiilor cinematice (8.187) și (8.186) rezultă și următoarele expresii pentru lucrul mecanic elementar și pentru puterea mecanică a unui sistem de solicitări $(\overline{\mathscr{F}}, \overline{\mathfrak{M}}_G)$, aplicate rigidului:

$$\boxed{\mathrm{d}\mathscr{L} = \overline{\mathscr{F}}\mathrm{d}\bar{r}_G + \overline{\mathfrak{M}}_G\mathrm{d}\overline{\Theta} = \mathscr{F}_x\mathrm{d}x_G + \mathscr{F}_y\mathrm{d}y_G + \mathfrak{M}'_{G_z}\mathrm{d}\varphi}, \quad (8.196)$$

respectiv

$$\boxed{\mathscr{P} = \overline{\mathscr{F}}\bar{v}_G + \overline{\mathfrak{M}}_G\bar{\omega} = \mathscr{F}_x\dot{x}_G + \mathscr{F}_y\dot{y}_G + \mathfrak{M}'_{G_z}\dot{\varphi}}. \quad (8.197)$$

8.4.4. Stabilirea ecuațiilor scalare ale dinamicii mișcării plan-paralele a rigidului

Observînd că în condițiile precizate pot fi scrise relațiile

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\overline{\mathscr{K}}_G]_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J\omega\bar{k}']_r = J\overline{\varepsilon}\,;\ \bar{\omega}\times\overline{\mathscr{K}}_G = \bar{\omega}\times J\overline{\omega} = 0,$$

forma a treia a ecuațiilor vectoriale ale dinamicii rigidului va fi reprezentată prin ecuațiile concrete:

$$\boxed{M\bar{a}_G = \overline{\mathscr{F}}_a + \overline{\mathscr{F}}_p\,;\ J\overline{\varepsilon} = \overline{\mathfrak{M}}_{a_G} + \overline{\mathfrak{M}}_{p_G}}, \quad (8.198)$$

cărora le corespund următoarele ecuații de proiecții — pentru prima pe axele fixe, iar pentru a doua pe axele reperului legat de rigid —, reprezentînd *ecuațiile scalare ale dinamicii mișcării plan-paralele a rigidului*:

$$\boxed{\begin{array}{l}(1)\ M\ddot{x}_G = \mathscr{F}_{a_x} + \mathscr{F}_{p_x}\,;(2)\ M\ddot{y}_G = \mathscr{F}_{a_y} + \mathscr{F}_{p_y}\,;\ 3)\ 0 = \mathscr{F}_{a_z} + \mathscr{F}_{p_z}\,;\\ (4)\ 0 = \mathfrak{M}'_{a_{G_x}} + \mathfrak{M}'_{p_{G_x}}\,;(5)\ 0 = \mathfrak{M}'_{a_{G_x}} + \mathfrak{M}'_{p_{G_y}}\,;(6)\ J\ddot{\varphi} = \mathfrak{M}'_{a_{G_z}} + \mathfrak{M}'_{p_{G_z}}\end{array}}. \quad (8.199)$$

Scanned with CamScanner

Se observă că ecuaţiile (3), (4) şi (5) vor reprezenta numai condiţii pe care trebuie să le îndeplinească sistemul solicitărilor exterioare, active şi pasive, pentru ca rigidul să execute mişcarea plan — paralelă, ele nefurnizînd însă nici un fel de date asupra mişcării.

În cazul cînd toate forţele active şi pasive care acţionează asupra unui rigid în mişcare plan-paralelă se găsesc în planul secţiunii (Σ_s), ($\mathcal{F}_{az} = \mathcal{F}_{pz} \equiv 0$; $\mathcal{M}'_{a_{Gx}} = \mathcal{M}'_{p_{Gx}} \equiv 0$; $\mathcal{M}'_{a_{Gy}} = \mathcal{M}'_{p_{Gy}} \equiv 0$), sistemul (8.199) de ecuaţii scalare se reduce numai la ecuaţiile (1), (2) şi (6).

Pentru problemele de dinamica mişcării plan-paralele a rigidului vor putea fi scrise deci un număr de

$$\boxed{e = 6} \tag{8.200}$$

ecuaţii scalare de mişcare dacă rigidul este solicitat spaţial şi un număr de

$$\boxed{e = 3} \tag{8.201}$$

ecuaţii scalare de mişcare în cazul unor distribuţii plane de forţe.

8.4.5. Problema separării şi integrării sistemului de ecuaţii diferenţiale ale mişcării plan-paralele a rigidului

Luînd în consideraţie numai cazul solicitărilor plane, ($e = 3$) de altfel şi cel mai des întîlnit în aplicaţiile practice, vor putea fi, întîlnite următoarele cazuri de rezolvare completă a problemelor de tip fundamental de dinamica mişcării plan-paralele a rigidului, ($e = s = p + r = 3$);

— *Cazul rigidului în mişcare plan-paralelă liberă*, caracterizat prin condiţiile:

$$p = 3; \quad r = 0. \tag{8.202}$$

Observînd că în această situaţie torsorul solicitărilor pasive se reduce numai la torsorul rezistenţelor totale, — rezistenţele mediului şi rezistenţele de amortizare ale elementelor de legătură elastică —, ecuaţiile vectoriale (8.198) vor lua formele

$$\boxed{M\bar{a}_G = \overline{\mathcal{F}}_a + \bar{R}_t; \quad J\bar{\varepsilon} = \overline{\mathcal{M}}_{a_G} + \overline{\mathcal{M}}_G(\bar{R}_t)}, \tag{8.203}$$

Scanned with CamScanner

lor corespunzîndu-le următorul sistem de ecuații scalare :

$$\boxed{M\ddot{x}_G = \mathscr{F}_{a_x} + R_{t_x};\ M\ddot{y}_G = \mathscr{F}_{a_y} + R_{t_y};\ J\ddot{\varphi} = \mathfrak{M}_{a_G} + \mathfrak{M}_G(\bar{R}_t)}, \tag{8.204}$$

reprezentînd chiar *sistemul de ecuații diferențiale ale mișcării plan-paralele libere a rigidului.*

Integrarea acestui sistem, atunci cînd este posibilă, va permite să se obțină ecuațiile finite ale mișcării plan-paralele a rigidului, adică funcțiile $x_G(t)$, $y_G(t)$ și $\varphi(t)$.

— *Cazul rigidului supus la o legătură pasivă exprimată prin o singură ecuație de legătură*, corespunzător condițiilor

$$p = 2;\ r = 1. \tag{8.205}$$

Scriind ecuațiile vectoriale ale mișcării sub forma

$$\boxed{M\bar{a}_G = \bar{\mathscr{F}}_a + \bar{R}_t + \bar{R};\ J\bar{\varepsilon} = \bar{\mathfrak{M}}_{a_G} + \bar{\mathfrak{M}}_G(\bar{R}_t) + \bar{\mathfrak{M}}_G(\bar{R})}, \tag{8.206}$$

lor le vor corespunde următoarele ecuații scalare de mișcare :

$$\boxed{\begin{gathered} M\ddot{x}_G = \mathscr{F}_{a_x} + R_{t_x} + R_x;\ M\ddot{y}_G = \mathscr{F}_{a_y} + R_{t_y} + R_y; \\ J\ddot{\varphi} = \mathfrak{M}_G + \mathfrak{M}_G(\bar{R}_t) + \mathfrak{M}_G(\bar{R}) \end{gathered}}. \tag{8.207}$$

Scoțînd din una din aceste ecuații reacțiunea necunoscută și înlocuind-o în celelalte două, se va obține un sistem de două ecuații diferențiale de ordinul doi în trei funcții necunoscute de timp, x_G, y_G și φ; explicitarea uneia din ele în funcție de celelalte două cu ajutorul ecuației de legătură și introducerea ei în cele două ecuații diferențiale va permite obținerea unui sistem de două ecuații diferențiale de ordinul doi în două funcții necunoscute de timp, care, prin integrare, va furniza doi din parametrii de poziție ai rigidului exprimați ca funcțiuni de timp. Utilizarea, din nou, a ecuației de legătură

Scanned with CamScanner

va permite să se determine şi cel de-al treilea parametru de poziţie ca funcţie de timp, iar revenirea la ecuaţia care a fost folosită pentru eliminarea reacţiunii necunoscute va permite să se obţină şi ultima necunoscută a problemei.

— *Cazul rigidului supus la legături exprimate prin două ecuaţii de legătură*, caracterizat prin condiţiile

$$p = 1; \quad r = 2. \tag{8.208}$$

Ecuaţiile vectoriale şi ecuaţiile scalare ale mişcării vor avea şi în acest caz formele (8.206), respectiv (8.207).

Rezolvînd două dintre ecuaţiile (8.207) în raport cu cele două reacţiuni necunoscute şi introducînd expresiile acestora în cea de-a treia ecuaţie, se obţine o ecuaţie diferenţială de ordinul doi, dar în trei funcţii necunoscute de timp. Eliminarea, cu ajutorul celor două ecuaţii de legătură, a două dintre aceste funcţii va conduce la o ecuaţie diferenţială de ordinul doi în o singură funcţie necunoscută de timp, care, prin integrare, va furniza unul din cei trei parametrii de poziţie, exprimat ca o funcţie cunoscută de timp. Utilizarea, din nou, a ecuaţiilor de legătură va permite să se stabilească şi expresiile celorlalţi doi parametrii de poziţie ca funcţii de timp. În fine, revenirea la sistemul format din cele două ecuaţi cu ajutorul cărora au fost eliminate reacţiunile legăturilor, va permite să se determine şi aceste ultime necunoscute ale problemei.

8.4.6. Aplicaţie: Dinamica mişcării de rostogolire plană a discurilor circulare omogene

Adoptînd, ca şi în cinematică, convenţia de a privi totdeauna planul mişcării discului rezemat pe un plan orizontal astfel încît mişcarea să fie văzută efectuîndu-se de la dreapta spre stînga şi alegînd cele două repere — fix şi invariabil legat de disc — ca în fig. 8.18, din care se vede că în momentul iniţial reperul $Gx'y'$ coincide cu reperul fix Oxy, rezultă ecuaţia de legătură geometrică

$$y_G \equiv 0, \tag{8209}$$

cu consecinţele

$$\dot{y}_G \equiv 0 \; ; \qquad \ddot{y}_G \equiv 0, \tag{8.210}$$

la care se va adăuga, în condiţiile rostogolirii pure, ecuaţia de legătură cinematică

$$x_G - r\varphi = 0, \tag{8.211}$$

cu consecinţele

$$\dot{x}_G = r\dot{\varphi} \; ; \qquad \ddot{x}_G = r\ddot{\varphi} \tag{8.212}$$

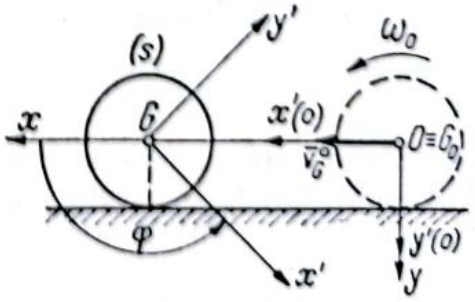


Fig. 8.18.

Scanned with CamScanner

Avînd în vedere că în cazul acestei mișcări se neglijează, de regulă, toate rezistențele și ținînd seama de faptul că deplasarea discului poate avea loc sub acțiunea unui sistem de solicitări active — între ele figurînd și greutatea discului — reductibil în centrul de masă la un torsor de componente $(\bar{\mathscr{F}}, \bar{\mathscr{M}})$ (fig. 8.19), vor rezulta următoarele ecuații vectoriale ale mișcării plane a discului

$$M\bar{a}_G = \bar{\mathscr{F}} + \bar{N} + \bar{T}\,; \quad J\,\bar{\varepsilon} = \bar{\mathscr{M}} + \bar{\mathscr{M}}_{rost} + \bar{\mathscr{M}}_G(\bar{T}), \tag{8.213}$$

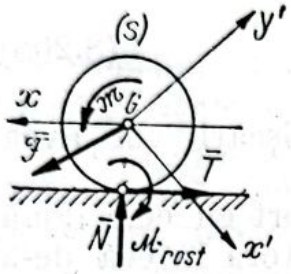


Fig. 8.19.

cu

$$\bar{\mathscr{M}}_{rost} = -\sigma\,|\,\bar{N}\,|\,\bar{k}'\,; \quad \bar{\mathscr{M}}_G(\bar{T}) = -rT\bar{k}' \tag{8.214}$$

și cu componenta $\bar{T}$ a reacțiunii reazemului dată de relația

$$|\,\bar{T}\,| = |\,\bar{\Phi}\,| = -\mu\,|\,\bar{N}\,|\,\bar{i}_{al}, \tag{8.215}$$

dacă deplasarea discului se efectuează prin rostogolire cu alunecare ($\bar{i}_{al}$=vers $\bar{v}_{al}$) și trebuind să satisfacă condiția

$$|\,\bar{T}\,| \leqslant |\,\bar{\Phi}\,| = \mu|\,\bar{N}\,|\,, \tag{8.216}$$

dacă deplasarea se face prin rostogolire pură.

Ecuațiilor vectoriale (8.213) le vor corespunde următoarele ecuații scalare de mișcare

$$M\ddot{x}_G = \mathscr{F}_x + T\,; \quad 0 = \mathscr{F}_y - |\bar{N}|\,; \quad J\ddot{\varphi} = \mathscr{M} - \sigma|\,\bar{N}\,| - rT, \tag{8.217}$$

care vor conține următoarele necunoscute:

— mărimile x_G, φ și $|\bar{N}|$, dacă deplasarea se efectuează prin rostogolire cu alunecare;

— mărimile $|\,\bar{N}\,|$ și T, precum și unul din parametrii de poziție x_G și φ, dacă deplasarea discului se efectuează prin rostogolire pură.

Sistemului de ecuații (8.217) i se vor asocia condițiile inițiale

$$t = 0 \begin{cases} x_G(0) = 0\,; & \dot{x}_G(0) = \bar{v}_G^0 > 0 \\ \varphi\,(0) = 0\,; & \dot{\varphi}\,(0) = \omega^0 > 0 \end{cases}, \tag{8.218}$$

$v_G^0 > 0$ și $\omega^0 > 0$ fiind parametrii cinematici inițiali ai mișcării.

Scoțînd din cea de-a doua dintre ecuațiile (8.217) pe $|\bar{N}|$:

$$|\bar{N}| = \mathscr{F}_y > 0 \tag{8.219}$$

inegalitatea scoțînd în evidență sensul pe care trebuie să-l aibă componenta verticală a forței rezultante active pentru asigurarea menținerii legăturii prin reazem — și introducînd această valoare în celelalte două ecuații din sistemul (8.217), rezultă ecuațiile

$$M\ddot{x}_G = \mathscr{F}_x + T\,; \qquad J\ddot{\varphi} = \mathscr{M} - \sigma\mathscr{F}_y - rT \tag{8.220}$$

Scanned with CamScanner

În majoritatea situațiilor întîlnite în aplicațiile practice concrete componentele torsorului solicitărilor active sînt constante în timpul mișcării de rostogolire, pură sau cu alunecare, a discului, această ipoteză de lucru fiind acceptată și în cele ce urmează; se va arăta, de asemenea, că și mărimea T este constantă în toate cazurile. Într-adevăr, dacă rostogolirea se face cu alunecare, T va avea, în baza relațiilor (8.216) și (8.219), valoarea

$$|\bar{T}| = |\bar{\Phi}| = \mu|\bar{N}| = \mu\mathscr{F}_y = const. \tag{8.221}$$

Dacă deplasarea discului este o rostogolire pură, atunci scoțind din prima dintre ecuațiile (8.220) pe

$$T = M\ddot{x}_G - \mathscr{F}_x = Mr\ddot{\varphi} - \mathscr{F}_x \tag{8.222}$$

și înlocuindu-l în cea de-a doua, rezultă, în ipotezele de lucru acceptate, condiția

$$\ddot{\varphi} = \frac{\mathfrak{M} - \sigma\mathscr{F}_y + r\mathscr{F}_x}{J + Mr^2} = const. \tag{8.223}$$

și deci

$$T = \frac{Mr}{J + Mr^2}\left(\mathfrak{M} - \sigma\mathscr{F}_y - \frac{J\mathscr{F}_x}{Mr}\right) = const, \tag{8.224}$$

care justifică afirmația făcută.

În consecință, întrucît toți termenii din membrul drept al ecuațiilor (8.220) sînt constanți în toate situațiile, aceste două ecuații diferențiale vor putea fi integrate separat, obținîndu-se sistemele de integrale

$$\dot{x}_G = \frac{1}{M}(\mathscr{F}_x + T)t + C_{1x}; \quad x_G = \frac{1}{M}(\mathscr{F}_x + T)\frac{t^2}{2} + C_{1x}t + C_{2x}, \tag{8.225}$$

respectiv

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{J}(\mathfrak{M} - \sigma\mathscr{F}_y - rT)t + C_1: \quad \varphi = \frac{1}{J}(\mathfrak{M} - \sigma\mathscr{F}_y - rT)\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2, \tag{8.226}$$

C_{1x}, C_{2x}, C_1 și C_2 fiind constante de integrare, avînd, în baza condițiilor inițiale (8.218), valorile

$$C_{1x} = v_G^0; \quad C_{2x} = 0; \quad C_1 = \omega^0; \quad C_2 = 0. \tag{8.227}$$

Introducerea acestor valori în soluțiile generale obținute mai sus, conduce la următoarele ecuații finite ale mișcării plane a discului rezemat pe plan orizontal:

$$\begin{cases} x_G = v_G^0 t + \dfrac{1}{M}(\mathscr{F}_x + T)\dfrac{t^2}{2}; \\ \varphi = \omega^0 t + \dfrac{1}{J}(\mathfrak{M} - \sigma\mathscr{F}_y - rT)\dfrac{t^2}{2}. \end{cases} \tag{8.228}$$

Scanned with CamScanner

Distanța parcursă de centrul de masă numai prin rostogolire pură a discului va fi dată de relația

$$s_{rost} = r\varphi = r\omega^0 t + \frac{r}{J}(\mathfrak{M} - \sigma\mathscr{F}_y - rT)\frac{t^2}{2}, \tag{8.229}$$

iar distanța parcursă numai prin alunecare va avea expresia

$$s_{al} = x_G - s_{rost} = (v_G^0 - r\omega^0)t + \left[\frac{1}{M}(\mathscr{F}_x + T) - \frac{r}{J}(\mathfrak{M} - \sigma\mathscr{F}_y - rT)\right]\frac{t^2}{2}, \tag{8.230}$$

această alunecare efectuîndu-se cu viteza

$$v_{al} = \dot{s}_{al} = (v_G^0 - r\omega^0) + \left[\frac{1}{M}(\mathscr{F}_x + T) - \frac{r}{J}(\mathfrak{M} - \sigma\mathscr{F}_y - rT)\right]t. \tag{8.231}$$

Concluziile generale precedente vor fi aplicate la studiul următoarelor cazuri particulare de deplasări ale discului rezemat:

Cazul I: *alunecare pură a discului*, caracterizată prin condițiile, (fig. 8.20):

$$\varphi \equiv 0; \quad v_{al} > 0; \quad T = -|\bar{\Phi}| = -\mu\mathscr{F}_y, \tag{8.232}$$

prima dintre ele implicînd satisfacerea condițiilor

$$\omega^0 = 0; \quad \mathfrak{M} + r\left(\mu - \frac{\sigma}{r}\right)\mathscr{F}_y = 0. \tag{8.233}$$

Ecuațiile finite (8.228) vor lua în acest caz formele

$$\boxed{x_G = v_G^0 t + \frac{1}{M}(\mathscr{F}_x - \mu\mathscr{F}_y)\frac{t^2}{2}; \quad \varphi \equiv 0}, \tag{8.234}$$

iar distanța parcursă prin alunecare va avea expresia

$$\boxed{s_{al} = x_G = v_G^0 t + \frac{1}{M}(\mathscr{F}_x - \mu\mathscr{F}_y)\frac{t^2}{2}}, \tag{8.235}$$

alunecarea fiind:

— *uniform accelerată*, în cazul

$$\mathscr{F}_x - \mu\mathscr{F}_y > 0; \tag{8.236}$$

— *uniform încetinită*, în cazul

$$\mathscr{F}_x - \mu\mathscr{F}_y < 0; \tag{8.237}$$

— *uniformă*, în cazul

$$\mathscr{F}_x - \mu\mathscr{F}_y = 0. \tag{8.238}$$

Scanned with CamScanner

Cazul II: *rostogolirea pură a discului*, caracterizată prin condițiile (fig. 8.21):

$$v_{al} = 0\,; \quad |\bar{T}| \leqslant \mu \mathscr{F}_y, \tag{8.239}$$

prima dintre condiții implicînd satisfacerea relațiilor

$$v_G^0 - r\omega^0 = 0\,; \quad \frac{1}{M}(\mathscr{F}_x + T) - \frac{r}{J}(\mathscr{M} - \sigma\mathscr{F}_y - rT) = 0, \tag{8.240}$$

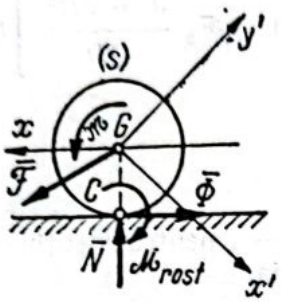


Fig. 8.20.

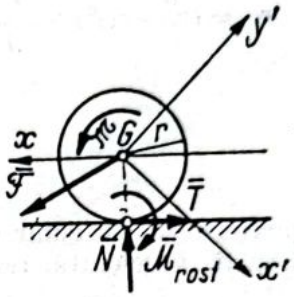


Fig. 8.21.

ultima avînd drept consecință obținerea din nou a expresiei (8. 224) a lui T — , iar a doua dintre condițiile (8.239) implicînd satisfacerea ingalităților

$$-\mu\mathscr{F}_y \leqslant T = \frac{Mr}{J + Mr^2}\left(\mathscr{M} - \sigma\mathscr{F}_y - \frac{J\mathscr{F}_x}{Mr}\right) \leqslant \mu\mathscr{F}_y. \tag{8.241}$$

Condițiile (8.239) vor mai putea fi scrise deci sub forma

$$\begin{cases} v_G^0 - r\omega^0 = 0\,; \\ \dfrac{J\mathscr{F}_x}{Mr} - \mu\mathscr{F}_y\dfrac{J + Mr^2}{Mr} \leqslant \mathscr{M} - \sigma\mathscr{F}_y \leqslant \dfrac{J\mathscr{F}_x}{Mr} + \mu\mathscr{F}_y\dfrac{J + Mr^2}{Mr}\,. \end{cases} \tag{8.242}$$

În cazul acestei deplasări particulare a discului, ecuațiile finite ale mișcării (8.228) vor lua formele

$$\boxed{\begin{aligned} &x_G = r\varphi\,; \\ &\varphi = \omega^0 t + \frac{1}{J + Mr^2}(\mathscr{M} - \sigma\mathscr{F}_y + r\mathscr{F}_x)\frac{t^2}{2} \end{aligned}}\,, \tag{8.243}$$

rostogolirea fiind

— *uniform accelerată*, în cazul

$$\mathscr{M} - \sigma\mathscr{F}_y + r\mathscr{F}_x \rhd 0\,; \tag{8.244}$$

— *uniform încetinită*, în cazul

$$\mathscr{M} - \sigma\mathscr{F}_y + r\mathscr{F}_x < 0\,; \tag{8.245}$$

Scanned with CamScanner

— *uniformă*, pentru

$$\mathfrak{M} - \sigma \mathscr{F}_y + r\mathscr{F}_x = 0. \tag{8.246}$$

Cazul III: *rostogolirea cu alunecare a discului*, caracterizată prin condiţiile, (fig. 8.22):

$$v_{al} > 0; \quad T = -\mu \mathscr{F}_y. \tag{8.247}$$

Viteza de alunecare avînd, în această situaţie, expresia

$$v_{al} = (v_G^0 - r\omega^0) + \frac{r}{J}\left[\frac{J\mathscr{F}_x}{Mr} - (\mathfrak{M} - \sigma\mathscr{F}_y) - \mu\mathscr{F}_y \frac{J + Mr^2}{Mr}\right]t, \tag{8.248}$$

cu

$$v_{al}^0 = v_G^0 - r\omega^0 \geqslant 0 \tag{8.249}$$

alunecarea poate avea loc chiar din momentul iniţial — , pentru menţinerea alunecării ea va trebui să fie accelerată, rezultînd de aici condiţia

$$\frac{J\mathscr{F}_x}{Mr} - (\mathfrak{M} - \sigma\mathscr{F}_y) - \mu\mathscr{F}_y \frac{J + Mr^2}{Mr} > 0. \tag{8.250}$$

Condiţiile (8.247) vor putea fi înlocuite deci cu condiţiile echivalente

$$v_G^0 - r\omega^0 \geqslant 0;$$

$$\mathfrak{M} - \sigma\mathscr{F}_y < \frac{J\mathscr{F}_x}{Mr} - \mu\mathscr{F}_y \frac{J + Mr^2}{Mr}. \tag{8.251}$$

În condiţiile acestei mişcări particulare a discului, ecuaţiile finite (8.228) vor lua formele

$$\boxed{\begin{aligned} x_G &= v_G^0 t + \frac{1}{M}(\mathscr{F}_x - \mu\mathscr{F}_y)\frac{t^2}{2}; \\ \varphi &= \omega^0 t + \frac{1}{J}\left[\mathfrak{M} + r\left(\mu - \frac{\sigma}{r}\right)\mathscr{F}_y\right]\frac{t^2}{2} \end{aligned}}, \tag{8.252}$$

iar distanţa parcursă prin alunecare va fi dată de relaţia

$$\boxed{s_{al} = x_G - r\varphi = (v_G^0 - r\omega^0)t + \frac{1}{J}\left[\frac{J\mathscr{F}_x}{Mr} - (\mathfrak{M} - \sigma\mathscr{F}_y) - \mu\mathscr{F}_y \frac{J + Mr^2}{Mr}\right]\frac{t^2}{2}}, \tag{8.253}$$

fiind, în baza condiţiei (8.250), totdeauna uniform accelerată.

Cazul IV: *rostogolirea cu patinare a discului*, caracterizată prin condiţiile, (fig. 8.23):

$$v_{al} < 0; \quad T = \mu\mathscr{F}_y. \tag{8.254}$$

Scanned with CamScanner

cu viteza de alunecare avînd, în această situație, expresia

$$v_{al}=(v_G^0-r\omega^0)+\frac{r}{J}\left[\frac{J\mathscr{F}_x}{Mr}-(\mathfrak{M}-\sigma\mathscr{F}_y)+\mu\mathscr{F}_y\frac{J+Mr^2}{Mr}\right]t, \tag{8.255}$$

cu

$$v_{al}^0=v_G^0-r\omega^0<0, \tag{8.256}$$

întrucît patinarea va începe chiar din momentul inițial.

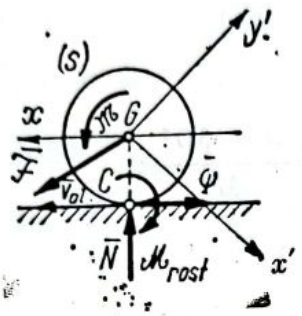


Fig. 8.22.

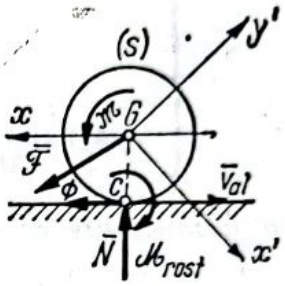


Fig. 8.23.

Pentru ca să existe în mod cert patinarea, ea va trebui să fie accelerată, rezultînd de aici condiția

$$\frac{J\mathscr{F}_x}{Mr}-(\mathfrak{M}-\sigma\mathscr{F}_y)+\mu\mathscr{F}_y\frac{J+Mr^2}{Mr}<0. \tag{8.257}$$

Se poate trage deci concluzia că rostogolirea cu patinare se va produce în condițiile

$$\begin{cases} v_G^0-r\omega^0\leqslant 0; \\ \mathfrak{M}-\sigma\mathscr{F}_y>\dfrac{J\mathscr{F}_x}{Mr}+\mu\mathscr{F}_y\dfrac{J+Mr^2}{Mr}, \end{cases} \tag{8.258}$$

ecuațiile finite (8.228) luînd în această situație formele

$$\boxed{\begin{aligned} x_G &= v_G^0t+\frac{1}{M}(\mathscr{F}_x+\mu\mathscr{F}_y)\frac{t^2}{2}; \\ \varphi &= \omega^0t+\frac{1}{J}\left[\mathfrak{M}-r\left(\mu-\frac{\sigma}{r}\right)\mathscr{F}_y\right]\frac{t^2}{2} \end{aligned}} \tag{8.259}$$

De asemenea, pentru distanța pierdută prin patinare rezultă relația

$$\boxed{s_{pat}=(v_G^0-r\omega^0)t+\frac{r}{J}\left[\frac{J\mathscr{F}_x}{Mr}-(\mathfrak{M}-\sigma\mathscr{F}_y)+\mu\mathscr{F}_y\frac{J+Mr^2}{Mr}\right]\frac{t^2}{2}} \tag{8.260}$$

Scanned with CamScanner

Condițiile (8.233), (8.242) (8.251) și (8.258) capătă forme simplificate în cazul cînd componenta orizontală a forței active este egală cu zero, ($\mathcal{F}_x = 0$; $\mathcal{F}_y = \mathcal{F}$), ele devenind:

- *pentru alunecare pură*:

$$\begin{cases} \omega^0 = 0; \\ \mathcal{R} - \sigma\mathcal{F} = -\mu r\mathcal{F}; \end{cases} \tag{8.261}$$

- *pentru rostogolire pură*:

$$\begin{cases} v_G^0 - r\omega^0 = 0; \\ -\mu\mathcal{F}\dfrac{J + Mr^2}{Mr} \leqslant \mathcal{R} - \sigma\mathcal{F} \leqslant \mu\mathcal{F}\dfrac{J + Mr^2}{Mr}; \end{cases} \tag{8.262}$$

- *pentru rostogolire cu alunecare*:

$$\begin{cases} v_G^0 - r\omega^0 > 0; \\ \mathcal{R} - \sigma\mathcal{F} < -\mu\mathcal{F}\dfrac{J + Mr^2}{Mr}; \end{cases} \tag{8.263}$$

- *pentru rostogolire cu patinare*:

$$\begin{cases} v_G^0 - r\omega^0 < 0; \\ \mathcal{R} - \sigma\mathcal{F} > \mu\mathcal{F}\dfrac{J + Mr^2}{Mr}. \end{cases} \tag{8.264}$$

8.5. *Dinamica mișcării elicoidale a rigidului*

8.5.1. Parametrii de poziție independenți ai rigidului în mișcare elicoidală

În majoritatea covîrșitoare a situațiilor întîlnite în aplicațiile practice corpurile care execută mișcări elicoidale prezintă simetrie de revoluție în repartiția masei în jurul axei mișcării respective. Considerînd numai aceste situații și alegînd cele două repere — fix și invariabil legat de rigid — ca în fig. 8.24 (originea reperului legat de rigid este luată în centrul de masă G, aflat pe axa mișcării elicoidale) singurii parametri de poziție variabili în timp vor fi z_G și φ. În cazul cînd rigidului nu-i mai este impusă altă legătură în afara aceleia care asigură efectuarea mișcării elicoidale, cei doi parametrii de poziție menționați mai sus vor varia independent unul de altul; aplicarea

Scanned with CamScanner

unei legături suplimentare, poate reduce, pentru problemele de tip fundamental, la 1 numărul acestor parametri de poziție.

Rezultă deci următoarea condiție pentru această mișcare particulară a rigidului:

$$\boxed{p \leqslant 2}\,. \tag{8.265}$$

Mișcarea elicoidală este caracterizată cinematic prin condițiile

$$\bar{v}_G = \dot{z}_G \bar{k} \neq 0 : \quad \bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{k}' \neq 0, \tag{8.266}$$

cu consecințele

$$d\bar{r}_G = \bar{v}_G dt \neq 0; \quad d\bar{\Theta} = d\varphi \bar{k}' \neq 0 \tag{8.267}$$

și

$$\bar{a}_G = \dot{\bar{v}}_G \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}; \quad \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}. \tag{8.268}$$

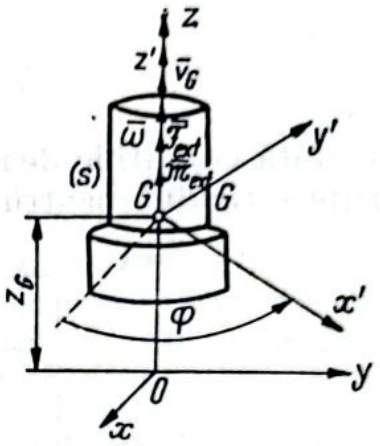


Fig. 8.24.

8.5.2. Caracteristicile cinetice ale rigidului în mișcare elicoidală

În baza condițiilor cinematice (8.266) și a coliniarității vectorilor $\bar{r}_G$, $\bar{v}_G$, $\bar{\omega}$ și $\overline{\mathscr{H}}$, rezultă următoarea formă pentru torsorii în polii O și G ai impulsurilor rigidului în mișcare elicoidală:

$$\boxed{\overline{\mathscr{T}}(\overline{\mathscr{H}}) = \overline{\mathscr{T}}_G(\overline{\mathscr{H}}) = \left\{\begin{array}{l} \overline{\mathscr{H}} = M\bar{v}_G \\ \overline{\mathscr{K}} = \overline{\mathscr{K}}_G = \overline{\mathscr{K}}_{G_{rot}} = J\bar{\omega} \end{array}\right\}}, \tag{8.269}$$

axa mișcării fiind, în condițiile precizate, axă centrală de inerție ($J'_{zz} = J'_{yz} = 0$; $J' = J$).

De asemenea, rezultă următoarea expresie pentru energia cinetică a rigidului:

$$\boxed{\mathscr{E} = \frac{1}{2}\left[Mv_G^2 + J\omega^2\right]}\,. \tag{8.270}$$

Scanned with CamScanner

8.5.3. Caracteristicile dinamice în mișcarea elicoidală a rigidului

Observînd că în condițiile precizate pot fi scrise relațiile

$$\overline{\mathscr{F}}_{ext} = M\bar{a}_G = (M\ddot{z}_G)\bar{k};$$

$$\overline{\mathscr{M}}_{ext_G} = J\bar{\varepsilon} = (J\ddot{\varphi})\bar{k}',$$

rezultă condițiile de mai jos pentru solicitările exterioare la care este supus rigidul pentru a se asigura efectuarea unei mișcări elicoidale

$$\boxed{\overline{\mathscr{T}}_G(\overline{\mathscr{F}}_{ext}) = \begin{Bmatrix} \overline{\mathscr{F}}_{ext} = \mathscr{F}_{ext}\bar{k} \\ \overline{\mathscr{M}}_{ext_G} = \mathscr{M}_{ext_G}\bar{k}' \end{Bmatrix}}. \qquad (8.271)$$

De asemenea, în baza condițiilor cinematice (8.266) și (8.267) rezultă și următoarele expresii pentru lucrul mecanic elementar și puterea mecanică a unui sistem de solicitări $(\overline{\mathscr{F}}, \mathscr{M}_G)$ aplicate rigidului în această mișcare particulară:

$$\boxed{\mathrm{d}\mathscr{L} = \overline{\mathscr{F}}\,\mathrm{d}\bar{r}_G + \overline{\mathscr{M}}_G\,\mathrm{d}\bar{\Theta} = \mathscr{F}_z\,\mathrm{d}z_G + \mathscr{M}'_{G_z}\mathrm{d}\varphi,}, \qquad (8.272)$$

respectiv

$$\boxed{\mathscr{P} = \overline{\mathscr{F}}\bar{v}_G + \overline{\mathscr{M}}_G\bar{\omega} = \mathscr{F}\dot{z}_G + \mathscr{M}'_{G_z}\dot{\varphi}}. \qquad (8.273)$$

8.5.4. Stabilirea ecuațiilor scalare ale dinamicii mișcării elicoidale a rigidului

Observînd că în condițiile menționate sînt valabile relațiile

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\overline{\mathscr{K}}_G]_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J\omega\bar{k}']_r = J\ddot{\varphi}\bar{k}' = J\bar{\varepsilon}; \quad \bar{\omega}\times\overline{\mathscr{K}}_G = \bar{\omega}\times J\bar{\omega} = 0,$$

Scanned with CamScanner

se vor obţine următoarele particularizări ale ecuaţiilor dinamicii rigidului utilizate sub forma a treia, corespunzătoare mişcării elicoidale :

$$\boxed{M\bar{a}_G = \overline{\mathscr{F}}_a + \overline{\mathscr{F}}_p\,;\quad J\bar{\varepsilon} = \overline{\mathfrak{M}}_a + \overline{\mathfrak{M}}_{p_G}}\,, \tag{8.274}$$

cu ecuaţiile scalare de proiecţii — pentru prima pe axele fixe şi pentru cea de-a doua pe axele reperului legat de rigid — avînd formele

$$\boxed{\begin{array}{l}(1)\ \ 0 = \mathscr{F}_{a_x} + \mathscr{F}_{p_x}\,;\quad (2)\ 0 = \mathscr{F}_{a_y} + \mathscr{F}_{p_y}\,;\quad (3)\ M\ddot{z}_G = \mathscr{F}_{a_z} + \mathscr{F}_{p_z}\,;\\ (4)\ \ 0 = \mathfrak{M}'_{a_{G_x}} + \mathfrak{M}_{p_{G_x}}\,;\quad (5)\ 0 = \mathfrak{M}'_{a_{G_y}} + \mathfrak{M}'_{p_{G_y}}\,;\quad (6)\ J\ddot{\varphi} = \mathfrak{M}'_{a_{G_z}} + \mathfrak{M}'_{p_{G_z}}\end{array}} \tag{8.275}$$

Se observă că numai ecuaţiile (3) şi (6) pot furniza date asupra mişcării rigidului, celelalte patru ecuaţii reprezentînd doar condiţii pe care trebuie să le satisfacă sistemul solicitărilor exterioare, active şi pasive, pentru a avea loc mişcarea elicoidală.

În cazul cînd solicitările active şi pasive vor fi reprezentate numai prin răsucitori admiţînd axa mişcării elicoidale ca axă centrală, ($\mathscr{F}_{a_x} = \mathscr{F}_{a_y} \equiv 0\,;\ \mathscr{F}_{p_x} = \mathscr{F}_{p_y} \equiv 0\,;\ \mathfrak{M}'_{a_{G_x}} = \mathfrak{M}'_{a_{G_y}} \equiv 0\,;\ \mathfrak{M}'_{p_{G_x}} = \mathfrak{M}'_{p_{G_y}} \equiv 0$), sistemul (8.75) se va reduce numai la ecuaţiile (3) şi (6).

Rezultă deci un număr total de

$$\boxed{e = 6} \tag{8.276}$$

ecuaţii scalare de mişcare în cazul rigidului supus la solicitări cu orientări oarecare în spaţiu şi un număr de

$$\boxed{e = 2} \tag{8.277}$$

ecuaţii scalare de mişcare în cazul rigidului supus la solicitări orientate numai în lungul axei mişcării elicoidale.

Scanned with CamScanner

8.5.5. Problema separării şi integrării ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării elicoidale a rigidului

Considerînd numai cazul rigidului supus la solicitări active şi pasive orientate în lungul axei mişcării elicoidale, condiţia de rezolvare completă a problemei de dinamică de tip fundamental, reprezentată în cazul considerat prin relaţia

$$e = s = p + r = 2, \tag{8.278}$$

va fi satisfăcută în următoarele două situaţii:

Cazul rigidului în mişcare elicoidală liberă, caracterizat prin condiţiile

$$p = 2 \; ; \; r = 0 \tag{8.279}$$

Ecuaţiilor vectorilor ale mişcării, avînd şi acum formele (8.203), le vor corespunde următoarele ecuaţii scalare

$$\boxed{M\ddot{z}_G = \mathscr{F}_a + R_t \; ; \quad J\ddot{\varphi} = \mathfrak{M}_{a_G} + \mathfrak{M}_G(\bar{R}_t)}, \tag{8.280}$$

care, prin integrare, vor furniza ecuaţiile finite ale mişcării elicoidale ale rigidului, adică funcţiile

$$z_G = z_G(t) \; ; \quad \varphi = \varphi(t). \tag{8.281}$$

Cazul rigidului în mişcare elicoidală supus la o legătură exprimată prin o singură ecuaţie de legătură, corespunzător condiţiilor

$$p = 1 \; ; \quad r = 1. \tag{8.282}$$

În acest caz ecuaţiile vectoriale ale mişcării vor avea formele (8.206), cu următoarele ecuaţii scalare corespunzătoare acestei situaţii:

$$\boxed{M\ddot{z}_G = \mathscr{F}_a + R_t + R \; ; \quad J\ddot{\varphi} = \mathfrak{M}_{a_G} + \mathfrak{M}_G(\bar{R}_t) + \mathfrak{M}_G(\bar{R})}. \tag{8.283}$$

Scanned with CamScanner

Scoțînd din una din ecuații reacțiunea necunoscută și înlocuind-o în cea de-a doua, se obține o ecuație diferențială de ordinul doi în două funcții necunoscute, z_G și φ; exprimarea, cu ajutorul ecuației de legătură, a uneia din cele două funcții prin cealaltă și introducerea ei în ecuația diferențială amintită, conduce la o ecuație diferențială de ordinul doi într-o singură funcție necunoscută de timp care, prin integrare, va furniza unul din cei doi parametri de poziție, exprimat ca funcție cunoscută de timp. Ecuația de legătură va permite apoi să se determine și cel de-al doilea parametru de poziție ca funcție de timp, iar revenirea la ecuația care a fost utilizată pentru eliminarea reacțiunii necunoscute a legăturii va permite să se determine și această ultimă necunoscută a problemei.

Cea mai frecventă legătură aplicată rigidului în mișcare elicoidală este cupla șurub — bucșă filetată, realizînd mișcarea de șurub, cu următoarea ecuație de legătură

$$f(z_G,\varphi) = z_G - p_s\varphi = z_G \pm \frac{h}{2\pi} = 0. \tag{8.284}$$

8.5.6. Aplicație: Mișcarea liberă de șurub a rigidului

În continuare, se va demonstra că mișcarea unui rigid liber, prezentînd simetrie de revoluție în repartiția masei și supus unui sistem de solicitări active admițînd axa de simetrie de revoluție ca axă centrală fixă, cu componentele răsucitorului satisfăcînd relația

$$\overline{\mathfrak{M}}_{aG} = p_R\overline{\mathscr{F}}_a. \tag{8.285}$$

cu parametrul răsucitorului constant, este, în anumite condiții pentru parametrii cinematici de ordinul întîi inițiali, o mișcare de șurub.

Într-adevăr, ecuațiile scalare (8.280) vor lua în acest caz formele

$$M\ddot{z}_G = \mathscr{F}_a; \quad J\ddot{\varphi} = p_R\mathscr{F}_a, \tag{8.286}$$

conducînd, prin eliminarea lui $\mathscr{F}_a$, la ecuația

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{z}_G - \frac{J}{Mp_R}\dot{\varphi}\right] = 0; \tag{8.287}$$

cu integrala primă

$$\dot{z}_G - \frac{J}{Mp_R}\dot{\varphi} = C_1. \tag{8.287}$$

Scanned with CamScanner

Impunînd în această relație condițiile inițiale

$$t = 0 \{ z_G(0) = v_G^0 ; \quad \dot{\varphi}(0) = \omega^0 \}, \tag{8.288}$$

rezultă următoarea valoare pentru constanta de integrare C_1:

$$C_1 = v_G^0 - \frac{J}{Mp_R} \omega^0 \tag{8.289}$$

și deci următoarea formă determinată pentru integrala primă (8. 287)

$$v_G - v_G^0 = \frac{J}{Mp_R} (\omega - \omega^0) \cdot \tag{8.290}$$

În cazul cînd mărimile V_G^0 și ω^0 satisfac condiția

$$v_G^0 = \frac{J}{Mp_R} \omega^0 = p_s \omega^0, \tag{8.291}$$

relația (2.90) ia forma

$$\boxed{v_G = p_s \omega,}, \tag{8.292}$$

corespunzătoare unei mișcări de șurub de parametru

$$\boxed{p_s = \frac{J}{Mp_R}} \tag{8.293}$$

§. 9. Dinamica punctului material

9.1. *Utilizarea, în tehnică, a noțiunii de „punct material"*

9.1.1. Definiția noțiunii tehnice de „punct material"

În practica inginerească, în deosebi de profil mecanic, se numește *punct material* un rigid a cărui energie cinetică totală poate fi aproximată cu energia centrului său de masă, adică se poate scrie

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} M v_G^2 + \mathcal{E}_{rot} = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} (J_x' \omega_x'^2 + J_y' \omega_y'^2 + J_z' \omega_z'^2) \approx \frac{1}{2} M v_G^2 \cdot \tag{9.1}$$

Scanned with CamScanner

această aproximare implicînd satisfacerea simultană a următoarelor două condiţii:

— dimensiuni reduse ale corpului — deci momente de inerţie centrale mici;

— rotaţii instantanee lente în jurul centrului de masă — deci viteze unghiulare foarte mici.

Definiţia precedentă conduce la acceptarea unei imagini punctuale a rigidului respectiv, punctul material ca model mecanic reprezentînd deci un rigid cu dimensiunile reduse la cele ale unui punct geometric — *aceasta fiind totdeauna centrul de masă al rigidului* —, dotat însă cu masă finită, reprezentată prin masa totală a rigidului.

Pentru a se distinge, în aplicaţiile concrete, cazurile cînd un rigid în mişcare este asimilat cu un punct material, de celelalte cazuri, cînd trebuie considerat rigid ca atare, se va nota masa punctului material cu simbolul „m" în loc de „M", iar în expresiile caracteristicilor cinetice şi dinamice se va renunţa peste tot la indicele $(_G)$ aplicat mărimilor pentru a se preciza referirea lor la centrul de masă ($\bar{r}_G = \bar{r}$; $\bar{v}_G = \bar{v}$; $\bar{a}_G = \bar{a}$ etc), o asemenea precizare nemai avînd sens în cazul punctului material.

9.1.2. Caracteristicile inerţiale în dinamica punctului material

Prin neglijarea rotaţiilor, inerţia unui punct material va fi măsurată numai prin masa sa, m.

9.1.3. Caracteristicile cinetice ale punctului material

Definiţia adoptată pentru noţiunea de punct material permite considerarea dinamicii punctului material ca o aproximare a dinamicii rigidului, aproximare care constă în neglijarea tuturor termenilor datoraţi rotaţiei ($\mathcal{E}_{rot} \approx 0$; $\overline{\mathcal{K}}_G \approx 0$); în consecinţă ţinînd seama şi, de convenţia de notaţii adoptată, va rezulta următoarea formă pentru torsorul în polul fix al impulsului unui punct material

$$\overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{H}}) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathcal{H}} = m\bar{v} \\ \overline{\mathcal{K}} = \bar{r} \times m\bar{v} = \bar{r} \times \overline{\mathcal{H}} \end{array} \right\}; \qquad (9.2)$$

Scanned with CamScanner

fiind evidentă valabilitatea, în această situație, a teoremei lui Varignon —, precum și următoarea expresie pentru energia cinetică:

$$\boxed{\mathscr{E} = \frac{1}{2} mv^2} \tag{9.3}$$

9.1.4. Caracteristicile dinamice în dinamica punctului material

Imaginea punctuală acceptată pentru punctul material implică neglijarea tuturor cuplurilor și considerarea numai a forțelor finite, formînd un sistem de vectori concurenți în punctul respectiv și conformîndu-se teoremei lui Varignon, adică torsorul în polul fix al unui asemenea sistem de forțe cu rezultanta $(\overline{\mathscr{F}})$ va avea forma

$$\boxed{\overline{\mathscr{T}}(\overline{\mathscr{F}}) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathscr{F}} \\ \overline{\mathfrak{M}} = \bar{r} \times \overline{\mathscr{F}} = \overline{\mathscr{M}}(\overline{\mathscr{F}}) \end{array} \right\}} \tag{9.4}$$

Clasificarea forțelor va fi, evident, aceeași din dinamica rigidului, cu singura observație însă că în dinamica punctului material nu mai are sens noțiunea de forțe interioare.

În ceea ce privește expresiile diverselor tipuri de forțe, ele vor rămîne aceleași din dinamica rigidului, cu modificările de notații adoptate pentru dinamica punctului material.

Astfel, *greutatea punctului material* va avea expresia

$$\boxed{\bar{P} = m\bar{g}}, \tag{9.5}$$

ea derivînd din una din funcțiile de forță

$$\boxed{U_g = -mgz + C;\ U_g = -mgy + C;\ U_g = mgx + C,} \tag{9.6}$$

după cum verticala este aleasă ca axă Oz, Oy, sau Ox, în primele două cazuri cu sensul pozitiv în sus, iar în cazul axei Ox cu sensul pozitiv în jos.

Scanned with CamScanner

Forţa elastică exercitată prin deformarea elastică a unui arc elicoidal sau a unei bare deformate prin încovoiere — singurele legături elastice care au sens în dinamica punctului material—, va avea expresia

$$\boxed{\bar{F}_c = -k_e[(\bar{r} - \bar{r}_{st}) - (\bar{r}_E - \bar{r}_{E_{st}})] + \bar{F}_{e_{st}} = \bar{F}_{e_c} + \bar{F}_{e_{pt}}}, \qquad (9.7)$$

cu termenul conservativ

$$\boxed{\bar{F}_{e_c} = -k_e(\bar{r} - \bar{r}_{st}) + \bar{F}_{e_{st}}}, \qquad (9.8)$$

derivînd din funcţia de forţă

$$\boxed{U_c = -\frac{1}{2}k_e(x - x_{st})^2 + F_{e_{st}}(x - x_{st}) + C} \qquad (9.9)$$

în cazul unei mişcări rectilinii a punctului material, efectuată în lungul axei Ox.

Rezistenţa mediului va avea una din expresiile

$$\boxed{\bar{R}_z = -c_R v^{\lambda}\bar{i}_v\,;\quad \bar{R}_v = -c_R\bar{v}\,;\quad \bar{R}_z = -c_R v^2\bar{i}_v}, \qquad (9.10)$$

după cum se consideră *legea generală a lui Bernoulli*, *lega întîi a lui Newton*, sau *legea a doua a lui Newton*, $\bar{i}_v$ fiind versorul vitezei punctului material, iar c_R coeficientul de rezistenţă, avînd acum expresia

$$c_R = \frac{1}{2}c_f\rho_m, \qquad (9.11)$$

unde ρ_m este densitatea mediului şi c_f este *coeficientul de formă* determinat experimental.

Rezistenţa de amortizare a unui arc elicoidal va avea expresia

$$\boxed{\bar{R}_a = -C\bar{v} + C\bar{v}_E = \bar{R}_{a_d} + \bar{R}_{a_{pt}}} \qquad (9.12)$$

$\bar{R}_{a_d}$ fiind termenul disipativ, iar $\bar{R}_{a_{pt}}$ termenul perturbator, ultimul fiind egal cu zero în cazul cînd extremitatea legată cu exteriorul a arcului este fixă.

Scanned with CamScanner

Imaginea punctuală acceptată pentru noțiunea de punct material are drept consecință faptul că numai două din cele patru tipuri fundamentale de legături pasive aplicate unui rigid pot să aibă sens în dinamica punctului material și anume:

— *Reazemul pe o suprafață*, căruia îi corespunde reacțiunea

$$\boxed{\bar{R} = \bar{N} + \bar{\Phi}}, \tag{9.13}$$

cu reacțiunea normală având una din expresiile

$$\boxed{\bar{N} = N\bar{n} = \lambda grad f = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}\right)}, \tag{9.14}$$

după cum punctul material se găsește pe o suprafață cu direcția normalei cunoscută, determinată prin versorul $\bar{n}$, sau pe o suprafață oarecare, determinată prin ecuația

$$f(x, y, z) = 0, \tag{9.15}$$

iar forța de frecare la alunecare este dată de *legea Amonton-Coulomb:*

$$\boxed{\bar{\Phi} = -\mu|\bar{N}|\bar{i}_{al}} \tag{9.16}$$

— *Legătura prin fir*, sau *prin tijă rigidă*, cu reacțiunea legăturii având, după caz, una din expresiile

$$\boxed{\bar{T} = |\bar{T}|\bar{n}\,; \quad \bar{S} = S\bar{n}\,;} \tag{9.17}$$

$\bar{n}$ fiind, ca de obicei, versorul direcției firului sau al axei tijei, orientat dinspre punctul material spre exterior.

Torsorul în polul fix, al forței de inerție a unui punct material va avea forma

$$\boxed{\bar{\mathscr{T}}(\bar{F}^i) = \left\{\begin{matrix}\bar{F}^i = -m\bar{a} \\ \bar{\mathfrak{M}}^i = \bar{r} \times \bar{F}^i = \bar{\mathscr{M}}(\bar{F}^i)\end{matrix}\right\}} \tag{9.18}$$

fiind evidentă și aici valabilitatea teoremei lui Varignon.

Scanned with CamScanner

În ceea ce priveşte caracteristicile dinamice scalare în dinamica punctului material, ele vor avea expresii de asemenea simplificate, prin neglijarea termenilor datoraţi rotaţiei.

Astfel *lucrul mecanic elementar* al unei forţe $\overline{\mathcal{F}}$ aplicate punctului material va avea expresia

$$\boxed{\mathrm{d}\mathcal{L} = \overline{\mathcal{F}}\,\mathrm{d}\bar{r} = \mathcal{F}_x\mathrm{d}x + \mathcal{F}_y\mathrm{d}y\,\mathcal{F}_z\mathrm{d}z}, \tag{9.19}$$

respectiv expresia

$$\boxed{\mathrm{d}\mathcal{L} = \mathrm{d}U = -\,\mathrm{d}V} \tag{9.20}$$

dacă forţa admite o funcţie de forţă $U = U(x,y,z)$, iar *puterea mecanică* a aceleiaşi forţe va fi dată de relaţia

$$\boxed{\mathcal{P} = \overline{\mathcal{F}}\,\bar{v} = \mathcal{F}_x\dot{x} + \mathcal{F}_y\dot{y} + \mathcal{F}_z\dot{z}}. \tag{9.21}$$

9.2. *Dinamica mişcării absolute a punctului material*

9.2.1. Teoremele fundamentale ale dinamicii punctului material

Teoremele fundamentale ale dinamicii rigidului îşi vor păstra valabilitatea şi în dinamica punctului material, fiind exprimate prin aceleaşi relaţii, deosebirea constînd doar în valorile aproximative acceptate pentru termenii ce figurează în relaţii, în cazul punctului material.

Teorema impulsului va fi exprimată deci şi acum prin relaţia

$$\boxed{\dot{\overline{\mathcal{H}}} = \overline{\mathcal{F}}_a + \overline{\mathcal{F}}_p}, \tag{9.22}$$

ea furnizînd, în condiţiile

$$\overline{\mathcal{F}}_a + \overline{\mathcal{F}}_p \equiv 0, \tag{9.23}$$

Scanned with CamScanner

legea de conservare a impulsului:

$$\boxed{\overline{\mathscr{H}} = \overline{\mathscr{H}}^0 = m\bar{v}^0}, \tag{9.24}$$

cu consecințele

$$\boxed{\bar{v} = \frac{\overline{\mathscr{H}}^0}{m} = \bar{v}^0} \tag{9.25}$$

și

$$\boxed{m\dot{x} = \mathscr{H}_x^0;\ m\dot{y} = \mathscr{H}_y^0;\ m\dot{z} = \mathscr{H}_z^0}, \tag{9.26}$$

prima exprimînd *legea inerției în dinamica punctului material*, iar ultimele reprezentînd *integralele impulsului*.

Teorema momentului cinetic, care va avea sens numai în raport cu polul fix, va fi exprimată prin relația

$$\boxed{\dot{\overline{\mathscr{K}}} = \overline{\mathfrak{M}}_a + \overline{\mathfrak{M}}_p}, \tag{9.27}$$

și va furniza, în condițiile

$$\overline{\mathfrak{M}}_a + \overline{\mathfrak{M}}_p \equiv 0 \tag{9.28}$$

legea de conservare a momentului cinetic, adică

$$\boxed{\overline{\mathscr{K}} = \overline{\mathscr{H}}^0 = \bar{r}^0 \times m\bar{v}^0}, \tag{9.29}$$

cu proiecțiile pe axele de coordonate purtînd și acum numele de *integralele momentului cinetic*:

$$\boxed{m(y\dot{z} - z\dot{y}) = \mathscr{K}_x^0;\ m(z\dot{x} - x\dot{z}) = \mathscr{K}_y^0;\ m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \mathscr{K}_z^0} \tag{9.30}$$

Scanned with CamScanner

O consecință importantă a valabilității legii de conservare a momentului cinetic o constituie caracterul plan al traiectoriei punctului material care se deplasează în condițiile (9.28).

Într-adevăr, considerînd planul (π), (fig. 9.1), determinat de vectorii inițiali $\bar{r}^0 = \bar{r}(0)$ și $\bar{v}^0 = \bar{v}(0)$, se observă că relația

$$\bar{r} \times m\bar{v} = \overline{\mathcal{K}}^0$$

implică ortogonalitatea în permanență a vectorilor $\bar{r}$ și $\overline{\mathcal{K}}^0$, respectiv $\bar{v}$ și $\overline{\mathcal{K}}^0$, deci coplanaritatea vectorilor $\bar{r}$ și $\bar{v}$ cu vectorii $\bar{r}^0$ și $\bar{v}^0$ în orice alt moment $t > 0$ al mișcării.

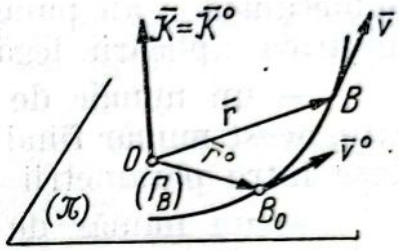


Fig. 9.1.

Teorema energiei va fi exprimată și în dinamica punctului material prin una din relațiile

$$\boxed{\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_p\,;\ \mathrm{d}\mathcal{E} = \mathrm{d}\mathcal{L}_a + \mathrm{d}\mathcal{L}_p\,;\ \mathcal{E} - \mathcal{E}^0 = \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_p,} \tag{9.31}$$

teorema energiei sub forma generală, teorema energiei sub forma diferențială și teorema variației finite a energiei cinetice), din cea de-a doua formă rezultînd, în condițiile aplicării numai de legături pasive staționare cu frecare neglijabilă și de legături elastice cu amortizare neglijabilă și pentru mișcări efectuate în medii cu rezistență neglijabilă sub acțiunea unor forțe conservative, ($\mathrm{d}\mathcal{L}_p = 0\,;\ \mathrm{d}\mathcal{L}_a = \mathrm{d}U$) *integrala energiei*, exprimată prin relația

$$\boxed{\mathcal{E}(\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) = U(x, y, z) + h,} \tag{9.32}$$

respectiv *legea de conservare a energiei mecanice*

$$\boxed{\mathcal{E} + \mathcal{E}_p = h} \tag{9.33}$$

dacă funcția potențială coincide chiar cu energia potențială.

Scanned with CamScanner

9.2.2. Problemele şi ecuaţiile dinamicii mişcării absolute a punctului material

1°. Problemele dinamicii punctului material. Problemele de dinamica mişcării absolute a punctului material conţin aceleaşi categorii de necunoscute scalare ca şi problemele de dinamica rigidului, adică :

— un număr de p parametrii de poziţie independenţi, reprezentanţi prin p dintre coordonatele — sub una din formele utilizate în mecanică — ale punctului material mobil, care rămîn independenţi în urma aplicării legăturilor pasive;

— un număr de r reacţiuni necunoscute ale legăturilor aplicate, acest număr fiind egal cu numărul ecuaţiilor de legătură introduse între parametrii de poziţie;

— un număr de f mărimi necunoscute caracterizînd forţele active aplicate punctului material.

Numărul total de elemente scalare necunoscute ale unei probleme de dinamica punctului material va fi deci tot

$$s = p + r + f. \tag{9.34}$$

Ca şi în dinamica rigidului, şi în dinamica punctului material problemele vor putea fi împărţite în :

— *probleme de tip direct*, caracterizate prin condiţiile

$$p = 0; \quad s = r + f \tag{9.35}$$

de importanţă minimă însă pentru aplicaţiile practice, din aceleaşi motive de imposibilitate, în general, de realizare a legilor de variaţie a forţelor active, găsite prin rezolvarea problemei;

—*probleme de tip invers*, sau *fundamental*, caracterizate prin condiţiile

$$f = 0; \quad s = p + r \tag{9.36}$$

această ultimă categorie de probleme prezentînd cel mai mare interes pentru practica inginerească.

2°. Forme ale ecuaţiilor scalare ale dinamicii punctului material Avînd în vedere faptul că în dinamica punctului material este vala-

Scanned with CamScanner

bilă teorema lui Varignon atît pentru torsorul în polul fix al impulsului ($\overline{\mathscr{K}} = \bar{r} \times \overline{\mathscr{H}}$), cu consecinţa

$$\dot{\overline{\mathscr{K}}} = \dot{\bar{r}} \times \overline{\mathscr{H}} + \bar{r} \times \dot{\overline{\mathscr{H}}} = \underbrace{\bar{v} \times m\bar{v}}_{0} + \bar{r} \times \dot{\overline{\mathscr{H}}} = \bar{r} \times \dot{\overline{\mathscr{H}}},$$

cît şi pentru torsorul în polul fix al forţelor active şi pasive ce acţionează asupra punctului material ($\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}}_a + \overline{\mathfrak{M}}_p = \bar{r} \times (\overline{\mathscr{F}}_a + \overline{\mathscr{F}}_p)$), cele două ecuaţii vectoriale ale dinamicii rigidului, reprezentate prin teoremele torsorului impulsurilor în raport cu polul fix, vor lua formele

$$\dot{\overline{\mathscr{H}}} = \overline{\mathscr{F}}_a + \overline{\mathscr{F}}_p; \quad \bar{r} \times \dot{\overline{\mathscr{H}}} = \bar{r} \times (\overline{\mathscr{F}}_a + \overline{\mathscr{F}}_p), \tag{9.37}$$

examinarea lor permiţînd să se tragă concluzia că ecuaţia de mişcare corespunzătoare teoremei momentului cinetic este o consecinţă a ecuaţiei corespunzătoare teoremei impulsului.

Se poate trage deci concluzia că în dinamica punctului material ecuaţiile vectoriale ale mişcării se reduc numai la prima dintre relaţiile (8.37), scrisă acum sub forma

$$\boxed{m\bar{a} = \overline{\mathscr{F}}_a + \overline{\mathscr{F}}_p} \tag{9.38}$$

şi purtînd numele de *ecuaţia fundamentală a dinamicii punctului material.*

Ecuaţiei (9.38) îi corespund un număr

$$\boxed{e = 3} \tag{9.39}$$

în cazul spaţial şi

$$\boxed{e = 2} \tag{9.40}$$

în cazul plan, de *ecuaţii scalare de mişcare*, obţinute prin proiectarea pe axele unuia din reperele folosite în mecanică pentru studiul mişcării punctului material.

Scanned with CamScanner

Rezultă deci următoarele forme curente ale ecuațiilor scalare ale dinamicii punctului material :

— *ecuațiile scalare în coordonate carteziene*, avînd formele :

$$\boxed{m\ddot{x} = \mathcal{F}_{a_x} + \mathcal{F}_{v_x}\,;\ m\ddot{y} = \mathcal{F}_{a_y} + \mathcal{F}_{v_y}\,;\ m\ddot{z} = \mathcal{F}_{a_z} + \mathcal{F}_{v_z}} \tag{9.41}$$

— *ecuațiile scalare în coordonate cilindrice*, cu formele

$$\boxed{m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = \mathcal{F}_{a_\rho} + \mathcal{F}_{v_\rho}\,;\ m(2\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) = \mathcal{F}_{a_\varphi} + \mathcal{F}_{v_\varphi}\,;\ m\ddot{\zeta} = \mathcal{F}_{a_\zeta} + \mathcal{F}_{v_\zeta}} \tag{9.42}$$

— *ecuațiile scalare sub forma intrinsecă* :

$$\boxed{m\dot{v} = m\ddot{s} = \mathcal{F}_{a_\tau} + \mathcal{F}_{v_\tau}\,;\quad m\frac{v^2}{\rho_c} = m\frac{\dot{s}^2}{\rho_c} = \mathcal{F}_{a_\nu} + \mathcal{F}_{v_\nu}\,;\ 0 = \mathcal{F}_{a_\beta} + \mathcal{F}_{v_\beta}} \tag{9.43}$$

3°. **Rezolvarea problemelor de dinamica punctului material.** Luînd în considerație numai cazul problemelor de tip fundamental și anume cele spațiale, vor putea fi întîlnite următoarele trei situații cînd este posibilă rezolvarea completă, în condițiile

$$e = s = p + r = 3, \tag{9.44}$$

a problemelor :

Cazul punctului material în mișcare liberă, corespunzător condițiilor

$$p = 3\,;\ r = 0 \tag{9.45}$$

În această situație ecuația fundamentală a dinamicii punctului material va lua forma

$$\boxed{m\ddot{\bar{r}} = \bar{\mathcal{F}}_a + \bar{R}_l = \bar{\mathcal{F}}\,(\bar{r}\,;\ \dot{\bar{r}}\,;\ t)}, \tag{9.46}$$

$\bar{R}_l$ reprezentînd rezultanta rezistenței mediului și a rezistențelor de amortizare a elementelor elastice.

Scanned with CamScanner

Ecuaţia precedentă constituie chiar *ecuaţia diferenţială sub forma vectorială a mişcării punctului material* considerat şi în unele cazuri ea poate fi integrată direct, fără a mai fi necesară înlocuirea ei cu sistemul echivalent de ecuaţii scalare de proiecţii : dacă integrarea nu este posibilă sub forma vectorială, se va pleca de la sistemul de cuaţii scalare de proiecţii, cel mai adesea pe axele reperului cartezian, avînd formele

$$m\ddot{x} = \mathcal{F}_{ax} + R_{t_x}\,; \quad m\ddot{y} = \mathcal{F}_{a_y} + R_{t_y}\,; \quad m\ddot{z} = \mathcal{F}_{az} + R_{t_z}, \tag{9.47}$$

la care se va asocia sistemul de condiţii iniţiale :

$$t = 0 \left\{ \begin{array}{lll} x(0) = x^0\,; & y(0) = y^0\,; & z(0) = z^0) \\ \dot{x}(0) = v_x^0\,; & \dot{y}(0) = v_y^0\,; & \dot{z}(0) = v_t^0) \end{array} \right\}, \tag{9.48}$$

care vor permite să se determine cele 6 constante de integrare din soluţia generală a sistemului (9.47) de ecuaţii diferenţiale, evident, aceasta în ipoteza că integrarea a putut fi efectuată.

Cazul punctului material supus la o legătură exprimată prin o singură ecuaţie de legătură, caracterizat prin condiţiile

$$\mathrm{p} = 2\,; \quad \mathrm{r} = 1. \tag{9.49}$$

Ecuaţia fundamentală a dinamicii punctului material va fi scrisă în acest caz sub forma

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{\mathcal{F}}_a + \bar{R}_t + \bar{R}, \tag{9.50}$$

ei corespunzîndu-i următorul sistem de ecuaţii de proiecţii pe axele reperului caretezian :

$$m\ddot{x} = \mathcal{F}_{a_x} + R_{t_x} + R_x\,; \; m\ddot{y} = \mathcal{F}_{a_y} + R_{t_y} + R_y\,; \; m\ddot{z} = \mathcal{F}_{a_z} + R_{t_z} + R_z. \tag{9.51}$$

Scoţînd din una din ecuaţii reacţiunea necunoscută şi înlocuind-o în celelalte două se obţine un sistem de două ecuaţii diferenţiale de ordinul doi, în general în trei funcţii necunoscute de timp, x, y şi z ; explicitarea uneia din ele în funcţie de celelalte două cu ajutorul ecuaţiei de legătură şi înlocuirea ei în cele două ecuaţii diferen-

Scanned with CamScanner

ţiale, va conduce la un sistem de două ecuaţii diferenţiale de ordinul doi în două funcţii necunoscute de timp. Integrarea acestor ecuaţii va furniza doi dintre parametrii de poziţie ca funcţii de timp, iar ecuaţia de legătură va permite să se exprime şi cel de-al treilea parametru de poziţie ca funcţie cunoscută de timp. În fine, revenirea la ecuaţia utilizată pentru eliminarea reacţiunii necunoscute va permite să se detrmine şi această ultimă necunoscută a problemei.

Cazul punctului material supus la legături exprimate prin două ecuaţii de legătură, caracterizat prin condiţiile

$$p = 1; \quad r = 2 \tag{9.52}$$

Ecuaţia vectorială a mişcării şi ecuaţiile scalare de proiecţii pe axele reperului cartezian vor avea şi acum formele (9.50), respectiv (9.51). Rezolvînd două dintre ecuaţiile scalare în raport cu cele două reacţiuni necunoscute şi introducînd expresiile lor în cea de-a treia ecuaţie, se obţine o ecuaţie diferenţială de ordinul doi conţinînd, în general, trei funcţii de timp necunoscute, x, y şi z; folosindu-se cele două ecuaţii de legătură, două dintre aceste coordonate vor putea fi exprimate ca funcţii de cea de-a treia şi deci introducerea lor în ecuaţia diferenţială obţinută după indicaţiile precedente va conduce la o ecuaţie diferenţială de ordinul doi într-o singură funcţie necunoscută de timp. Integrarea acestei din urmă ecuaţii va furniza unul din parametrii de poziţie, exprimat acum ca funcţie cunoscută de timp, iar ecuaţiile de legătură vor permite să se determine şi ceilalţi doi parametrii de poziţie în funcţie de timp; revenirea, în fine, la ecuaţiile care au fost folosite pentru eliminarea reacţiunilor necunoscute ale legăturilor pasive aplicate punctului material va permite să se determine şi ultimele două necunoscute ale problemei.

Se înţelege că în cazul cînd ecuaţiile scalare ale mişcării se utilizează sub forma cilindrică, sau intrinsecă, condiţiile iniţiale (9.48 vor trebui înlocuite cu cele corespunzătoare acestor ecuaţii, adică

$$t = 0 \left\{ \begin{array}{lll} \rho(0) = \rho^0; & \varphi(0) = \varphi^0; & \zeta(0) = \zeta^0 \\ \dot{\rho}(0) = v_\rho^0; & \dot{\varphi}(0) = \dfrac{v_\varphi^0}{\rho^0}; & \dot{\zeta}(0) = v_\zeta^0 \end{array} \right\}, \tag{9.53}$$

respectiv

$$t = 0 \quad \{s(0) = s^0; \qquad \dot{s}(0) = v^0\}. \tag{9.54}$$

Scanned with CamScanner

9.2.3. Problemele și ecuațiile staticii punctului material

1°. **Problemele staticii punctului material.** În statica punctului material se întîlnesc aceleași două tipuri de probleme ca și în statica rigidului, adică:

— *probleme de tip direct*, corespunzătoare condițiilor

$$p = 0; \quad s = r + f \tag{9.55}$$

— *probleme de tip invers*, caracterizate prin condițiile

$$f = 0; \quad s = p + r. \tag{9.56}$$

2°. **Ecuațiile staticii punctului material.** Condițiile necesare și suficiente de echilibru ale staticii rigidului vor căpăta, în statica punctului material, următoarea formulare:

Un punct material supus la legături pasive și active și acționat de un sistem dat de forțe active va rămîne în echilibru atunci cînd vor fi îndeplinite următoarele condiții:

— la aplicarea sistemului de forțe active punctul să se găsească în stare de repaus;

— rezultanta tuturor forțelor active și de legătură aplicate punctului material să fie în permanență egală cu zero.

Ca și în dinamică și în statica punctului material ecuațiile vectoriale de echilibru se vor reduce numai la ecuația de forțe, avînd forma

$$\boxed{\sum_i \bar{F}_i + \sum_j \bar{R}_j = 0} \tag{9.57}$$

și numită *ecuația vectorială de echilibru al punctului material*, ei corespunzîndu-i următorul *sistem de ecuații scalare de echilibru al punctului material*:

$$\boxed{\sum_i F_{ix} + \sum_j R_{jx} = 0; \quad \sum_i F_{iy} + \sum_j R_{jy} = 0; \quad \sum_i F_{iz} + \sum_j R_{jz} = 0} \tag{9.58}$$

În problemele plane, sistemul de ecuații scalare se va reduce numai la primele două dintre ecuațiile (9.58).

Scanned with CamScanner

Rezultă deci un număr total de

$$\boxed{e = 3} \tag{9.59}$$

ecuații scalare de echilibru în cazul punctului material solicitat spațial și un număr de

$$\boxed{e = 2} \tag{9.60}$$

ecuații scalare de echilibru în cazul punctului material acționat de forțe situate în același plan.

3°. **Rezolvarea problemelor de statica punctului material.** Luînd și aici în considerație numai cazul problemelor static determinate, caracterizate prin condiția

$$e = s = p + r + f, \tag{9.61}$$

se reamintește recomandarea ca, în scopul ușurării rezolvării problemelor, să se orienteze astfel axele de coordonate încît cît mai multe forțe — și în deosebi reacțiuni necunoscute — să se proiecteze numai pe una din axe; originea sistemului de axe de coordonate va fi aleasă, de regulă, în punctul material în echilibru.

9.3. *Dinamica unor cazuri particulare de mișcări absolute ale punctului material*

În continuare, vor fi studiate, sub aspectul dinamic, unele mișcări particulare ale punctului material, efectuate sub acțiunea unuia din cele două tipuri principale de forțe conservative, care interesează în mod deosebit practica inginerească mecanică: greutatea și forța elastică.

9.3.1. Mișcări ale punctului material sub acțiunea greutății

1°. **Mișcarea liberă a punctului material la suprafața solului terestru.** Se consideră un punct material aruncat, dintr-o poziție inițială B_0 situată la suprafața Pămîntului (fig. 9.2), cu viteza inițială $\bar{v}^0$, formînd unghiul α cu planul orizontal.

Singurele forțe care acționează asupra acestui punct material sînt greutatea sa

$$\bar{P} = m\bar{g} \tag{9.62}$$

Scanned with CamScanner

şi rezistenţa aerului exprimată — date fiind vitezele relativ mici în asemenea mişcări — prin prima lege a lui Newton, adică

$$\bar{R}_z = -c_R\bar{v} = -c_R\dot{\bar{r}}. \tag{9.63}$$

În consecinţă, ecuaţia fundamentală a dinamicii punctului material va lua, în cazul acestei probleme, forma

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{P} + \bar{R}_z = m\bar{g} - c_R\dot{\bar{r}}, \tag{9.64}$$

sau încă, introducînd notaţia

$$\frac{c_R}{m} = \mu \tag{9.65}$$

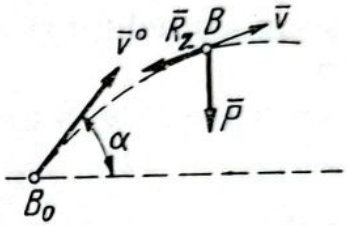


Fig. 9.2.

forma finală

$$\ddot{\bar{r}} + \mu\dot{\bar{r}} = \bar{g}, \tag{9.66}$$

reprezentînd o ecuaţie diferenţială vectorială liniară cu coeficienţi constanţi, neomogenă, care va putea fi integrată direct, în acelaşi mod în care se integrează şi ecuaţiile diferenţiale scalare liniare, cu coeficienţi constanţi.

Soluţia generală a ecuaţiei (9.66) va fi deci de forma

$$\bar{r} = \bar{r}_{(1)} + \bar{r}_{(2)}, \tag{9.67}$$

unde $\bar{r}_{(1)}$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene

$$\ddot{\bar{r}} + \mu\dot{\bar{r}} = 0, \tag{9.68}$$

în cazul de faţă de forma

$$\bar{r}_{(1)} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 e^{-\mu t}, \tag{9.69}$$

$\bar{R}_1$ şi $\bar{R}_2$ fiind vectori constanţi de integrare, iar $\bar{r}_{(2)}$ reprezintă o soluţie particulară a ecuaţiei complete (9.66), în cazul de faţă (lipseşte termenul în $\bar{r}$), de forma

$$\bar{r}_{(2)} = \bar{R}t, \tag{9.70}$$

Scanned with CamScanner

vectorul constant $\bar{R}$ urmînd a fi determinat impunînd condiția ca ultima soluție să verifice ecuația (9.66), ceea ce dă

$$\bar{R} = \frac{\bar{g}}{\mu}. \tag{9.71}$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (9.66) va avea deci forma

$$\bar{r} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 e^{-\mu t} + \frac{\bar{g}}{\mu} t, \tag{9.72}$$

cu

$$\dot{\bar{r}} = -\mu \bar{R}_2 e^{-\mu t} + \frac{\bar{g}}{\mu}. \tag{9.73}$$

Impunînd în ultimele două relații condițiile inițiale:

$$t = 0 \{\bar{r}(0) = \bar{r}^0 = 0\,;\ \dot{\bar{r}}(0) = \bar{v}^0\}, \tag{9.74}$$

stabilite prin alegerea poziției inițiale B_0 a punctului material ca origine a reperului la care va fi raportată mișcarea mobilului, rezultă următoarele valori pentru cei doi vectori constanți de integrare, $\bar{R}_1$ și $\bar{R}_2$:

$$\bar{R}_1 = -\bar{R}_2 = \frac{1}{\mu}\left(\bar{v}^0 - \frac{\bar{g}}{\mu}\right) \tag{9.75}$$

și deci introducerea lor în soluția generală (9.72) va furniza următoarea *ecuație finită vectorială* a mișcării punctului material considerat:

$$\boxed{\bar{r} = \frac{1}{\mu}\left(\bar{v}^0 - \frac{\bar{g}}{\mu}\right)(1 - e^{-\mu t}) + \frac{\bar{g}}{\mu} t}. \tag{9.76}$$

cu

$$\bar{v} = \left(\bar{v}^0 - \frac{\bar{g}}{\mu}\right) e^{-\mu t} + \frac{\bar{g}}{\mu}. \tag{9.77}$$

Scanned with CamScanner

Relaţia (9.76), scrisă încă sub forma

$$\bar{r} = \frac{1}{\mu}(1 - e^{-\mu t})\,\bar{v}^0 + \frac{1}{\mu}\left[t - \frac{1}{\mu}1 - e^{-\mu t})\right]\bar{g} = \lambda_1(t)\,\bar{v}^0 + \lambda_2(t)\bar{g} \tag{9.78}$$

exprimă coplanaritatea vectorilor $\bar{r}$, $\bar{v}^0$ şi $\bar{g}$, rezultînd de aici că traiectoria punctului material este o curbă, plană, situată în planul vertical ce conţine viteza iniţială $\bar{v}^0$.

Luînd acest plan ca plan de coordonate Oxy, cu axa Oy orientată pe verticală şi în sus, vor putea fi luate în consideraţie următoarele două situaţii distincte :

— *Cazul I* : *mişcarea cu rezistenţa aerului neglijabilă*, caz caracterizat prin condiţia

$$\mu = 0, \tag{9.79}$$

justificată de o valoare foarte mică a coeficientului de formă (dimensiuni mici şi profil aerodinamice) şi prin densitatea mare a materialului din care este confecţionat punctul material.

În această sitaţie, ecuaţia diferenţială (9.66) ia forma

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{g}, \tag{9.80}$$

iar ecuaţia finită (9.76) va deveni

$$\boxed{\bar{r} = \bar{v}^0 t + \frac{1}{2}\bar{g}t^2}, \tag{9.81}$$

cu

$$\bar{v} = \bar{v}^0 + \bar{g}t \tag{9.82}$$

(Ecuaţia (9.81) se obţine dezvoltînd în (9.76) pe $e^{-\mu t}$ în serie, oprind în dezvoltare numai primii trei termeni, reducînd apoi termenii asemenea şi făcînd pe $\mu = 0$).

Proiectînd relaţiile (9.81) şi (9.82) pe axele de coordonate alese, (fig. 9.3), se obţin următoarele ecuaţii finite scalare ale mişcării punctului material considerat :

$$x = (v^0 \cos\alpha)t \;;\; y = (v^0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2, \tag{9.83}$$

Scanned with CamScanner

respectiv următoarele proiecții pe axe ale vitezei lui:

$$v_x = v^0 \cos\alpha\,; \quad v_y = v^0 \sin\alpha - gt. \tag{9.84}$$

Eliminarea timpului între ecuațiile (9.83) conduce la ecuația analitică directă a traiectoriei punctului material considerat

$$\boxed{y = tg\,\alpha \cdot x - \frac{1}{2}\frac{g}{v^{0^2}\cos^2\alpha}x^2}, \tag{9.85}$$

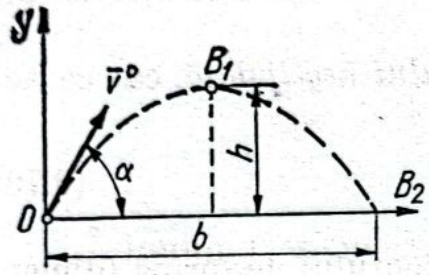


Fig. 9.3.

reprezentînd o parabolă, cu axa de simetrie paralelă la axa Oy, trecînd prin origine și cu concavitatea înspre sensul negativ al axei Oy (fig. 9.3).

În legătură cu mișcarea pe această traiectorie parabolică se pun următoarele probleme interesînd în mod deosebit tehnica lansării proiectilelor și purtînd din acest motiv numele de *probleme de balistică exterioară*:

Determinarea înălțimii maxime, h, atinsă de mobil. Această înălțime maximă va fi dată de relația

$$h = y(t_1), \tag{9.86}$$

t_1 fiind timpul care satisface condiția

$$v_y(t_1) = v^0 \sin\alpha - gt_1 = 0,$$

adică

$$t_1 = \frac{v^0 \sin\alpha}{g}, \tag{9.87}$$

rezultînd astfel

$$\boxed{h = y(t_1) = \frac{1}{2}\frac{v^{0^2}\sin^2\alpha}{g} = h(v^0, \alpha)} \tag{9.88}$$

Scanned with CamScanner

Pentru o viteză iniţială dată, această înălţime maximă va depinde numai de unghiul de aruncare, atingînd cea mai mare valoare posibilă

$$\boxed{h_{max} = \frac{v^{0^2}}{2g}} \tag{9.89}$$

la aruncarea pe verticală ($\alpha = \pi/2$ rad).

Determinarea bătăii aruncării, b, reprezentînd distanţa faţă de origine a punctului în care traiectoria mobilului intersectează din nou orizontala ce trece prin origine (fig. 9.3).

Notînd cu t_2 momentul în care mobilul atinge din nou axa Ox, moment dat de ecuaţia

$$y(t_2) = (v^0 \sin \alpha)\, t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0, \tag{9.90}$$

cu rădăcinile

$$t_2' = 0\,; \quad t_2'' = t_2 = 2\,\frac{v^0 \sin \alpha}{g} = 2t_1, \tag{9.91}$$

— prima corespunzînd poziţiei iniţiale a mobilului —, bătaia aruncării va fi dată de relaţia

$$\boxed{b = x(t_2) = \frac{v^{0^2} \sin 2\alpha}{g} = b(v^0,\ \alpha)} \tag{9.92}$$

Pentru o viteză iniţială dată, bătaia maximă posibilă va avea valoarea

$$\boxed{b_{max} = \frac{v^{0^2}}{g} = 2h_{max}} \tag{9.93}$$

corespunzătoare unui unghi de aruncare de $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ rad.

Determinarea unghiului de aruncare pentru ca mobilul să treacă printr-o poziţie determinată $P(x_p, y_p)$. Punînd condiţia ca ele două

Scanned with CamScanner

coordonate ale punctului P să verifice ecuația (9.85) a traiectoriei mobilului, se obține, după exprimarea lui *cos* α în funcție de *tg* α și după ordonarea termenilor, următoarea ecuație de gradul doi în tg α:

$$tg^2\alpha - 2\frac{v^{0^2}}{gx_p}tg\alpha + \frac{2v^{0^2}}{gx_p^2}\left(y_p + \frac{1}{2}\frac{g}{v^{0^2}}x_p^2\right) = 0, \qquad (9.94)$$

cu rădăcinile

$$tg\,\alpha_{1,2} = \frac{v^{0^2}}{gx_p} \pm \sqrt{\frac{2v^{0^2}}{gx_p^2}}\sqrt{\frac{v^{0^2}}{2g} - y_P - \frac{1}{2}\frac{g}{v^{0^2}}x_P^2}\,. \qquad (9.95)$$

Notînd cu Δ discriminantul ecuației, vor putea fi examinate următoarele situații distincte;

— *discriminant pozitiv*:

$$\Delta = \frac{v^{0^2}}{2g} - y_P - \frac{1}{2}\frac{g}{v^{0^2}}x_P^2 > 0. \qquad (9.96)$$

Rădăcinile ecuației fiind, în această situație, reale și disincte, vor rezulta două valori diferite pentru unghiul de aruncare pentru care mobilul va trece prin poziția P (fig. 9.4);

— *discriminant negativ*:

$$\Delta = \frac{v^{0^2}}{2g} - y_P - \frac{1}{2}\frac{g}{v^{0^2}}x_P^2 < 0. \qquad (9.97)$$

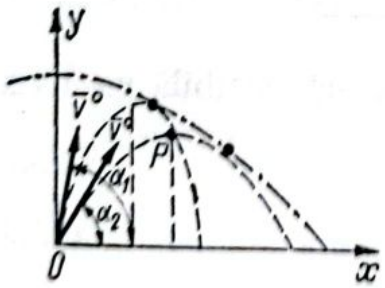


Fig. 9.4.

Rădăcinile fiind imaginare, rezultă că pentru viteza inițială dată ținta vizată nu poate fi atinsă;

— *discriminant egal cu zero*:

$$\Delta = \frac{v^{0^2}}{2g} - y_P - \frac{1}{2}\frac{g}{v^{0^2}}x_P^2 = 0. \qquad (9.98)$$

În această ultimă situație rădăcinile fiind reale și confundate, rezultă că există o singură valoare a unghiului de aruncare pentru care poziția P poate fi atinsă.

Scanned with CamScanner

Se înțelege că pentru o altă poziție P va rezulta, pentru aceeași viteză inițială de aruncare, o altă valoare a unghiului de aruncare unic; locul geometric al tuturor pozițiilor P care pot fi atinse sub un singur unghi de aruncare va fi reprezentat chiar prin ecuația (9.98), cu coordonatele $x_P = x$ și $y_P = y$ considerate acum coordonate curente, adică acest loc geometric va avea ecuația

$$y = \frac{v^{0^2}}{2g} - \frac{1}{2}\frac{g}{v^{0^2}}x^2, \tag{9.99}$$

reprezentînd o parabolă cu axa Oy ca axă de simetrie, prezentînd concavitatea înspre valorile negative ale axei Oy și cu vîrful situat la distanța

$$h = \frac{v^{0^2}}{2g} = h_{max} \tag{9.100}$$

de origine (fig. 9.4); această parabolă, care delimitează, în planul mișcării, zona țintelor posibile de atins sub două unghiuri de aruncare — situată în interiorul parabolei — de zona inaccesibilă proiectilului — situată în exteriorul parabolei — este numită, din motive ușor de înțeles, *parabola de siguranță*.

Cazul II: *mișcarea în prezența rezistenței mediului*. Alegînd reperul cartezian ca și în cazul precedent (fig. 9.5) și proiectînd pe axele acestui reper ecuațiile vectoriale (9.76) și (9.77), se obțin ecuațiile parametrice ale traiectoriei

$$x = \frac{1}{\mu}(v^0 \cos\alpha)\,(1 - e^{-\mu t}); \quad y = \frac{1}{\mu}\left(v^0 \sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)(1 - e^{-\mu t}) - \frac{g}{\mu}t \tag{9.101}$$

și proiecțiile pe axe ale vitezei punctului B, corespunzătoare acestei situații

$$v_x = (v^0 \cos\alpha)\cdot e^{-\mu t}; \quad v_y = \left(v^0 \sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} - \frac{g}{\mu}. \tag{9.102}$$

Eliminarea timpului între ecuațiile (9.101) conduce la următoarea ecuație analitică directă a traiectoriei punctului B:

$$\boxed{y = \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{\mu\, v^0 \cos\alpha}\right)x + \frac{g}{\mu^2}\ln\left(1 - \frac{\mu}{v^0 \cos\alpha}x\right)}. \tag{9.103}$$

Scanned with CamScanner

Unele concluzii în legătură cu forma acestei traiectorii pot fi trase observîndu-se că pentru $t \to \infty$, abscisa x, dată de prima dintre ecuațiile (9.101), tinde spre valoarea limită

$$x_{lim} = \frac{v^0 \cos \alpha}{\mu} \tag{9.104}$$

și că tangenta unghiului φ, format de axa Ox cu tangenta geometrică dusă într-un punct curent la traiectorie, a cărei expresie se obține cu ajutorul relațiilor (9.102), adică scriindu-se

$$tg\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{v_y}{v_x} = tg\alpha + \frac{g}{\mu v^0 \cos \alpha} - \frac{g}{\mu v^0 \cos \alpha} e^{\mu t} \tag{9.105}$$

tinde și ea, pentru $t \to \infty$, către valoarea $-\infty$), ceea ce înseamnă că unghiul φ tinde spre valoarea $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (rad).

Se poate trage deci concluzia că efectul rezistenței aerului asupra mișcării mobilului se manifestă prin coborîrea progresivă a traiectoriei față de parabola corespunzătoare mișcării cu rezistența aerului neglijabilă (fig. 9.5), coborîrea fiind foarte accentuată în ramura descendentă a traiectoriei, care se aproprie asimptotic de dreapta determinată prin ecuația (9.104).

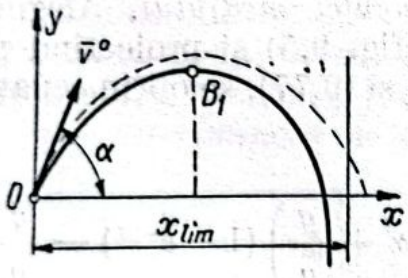


Fig. 9.5.

2.° **Mișcarea punctului material pe linia de cea mai mare pantă a unui plan înclinat aspru.** Se consideră un punct material lansat, dintr-o poziție inițială B_0, aflată pe una din liniile de cea mai mare pantă a unui plan înclinat de unghiul α față de orizontală, cu viteza inițială $\bar{v}^0$ orientată în lungul acelei linii, fie în sus — în cazul *mișcări ascendente* (fig. 9.6 *a*) — , fie în jos — în cazul *mișcării descendente* (fig. 9.6, *b*).

Forțele active sînt reprezentate, în ambele situații, numai prin greutatea punctului material

$$\overline{\mathcal{F}}_a = \bar{P} = m\bar{g}, \tag{9.106}$$

iar cele pasive numai prin reacțiunea totală a planului

$$\overline{\mathcal{F}}_p = \bar{R} = \bar{N} + \bar{\Phi}, \tag{9.107}$$

Scanned with CamScanner

cu

$$|\bar{\Phi}| = \mu |\bar{N}|, \tag{9.108}$$

singura deosebire în distribuția acestor forțe în cele două situații prezentate în fig. 9.6 a și b constînd doar în sensurile inversate ale forței de frecare la alunecare.

Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii punctului material corespunzătoare acestei situații, adică

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{N} + \bar{\Phi} \tag{9.109}$$

pe axele intrinseci, cu sensurile precizate în fig. 9.6, a și b, se obțin următoarele ecuații scalare ale mișcării punctului considerat, valabile atît pentru mișcarea ascendentă, cît și pentru cea descendentă:

$$m\dot{v} = m\ddot{s} = P_\tau - |\bar{\Phi}| = P_\tau - \mu |\bar{N}|; \quad 0 = P_\nu + N, \tag{9.110}$$

N fiind valoarea scalară, raportată la versorul $\bar{\nu}$, a reacțiunii normale $\bar{N}$.

Înlocuind în prima dintre ecuațiile (9.110) pe $|\bar{N}|$ cu valoarea dedusă din cea de-a doua ecuație

$$|\bar{N}| = |N| = |-P_\nu| = |P_\nu|, \tag{9.111}$$

se obține următoarea ecuație diferențială a mișcării punctului material pe linia de cea mai mare pantă a planului înclinat

$$\ddot{s} = \frac{1}{m}[P_\tau - \mu |P_\nu|], \tag{9.112}$$

cu membrul drept constant, cu integrala primă

$$\dot{s} = \frac{1}{m}[P_\tau - \mu |P_\nu|]t + C_1 \tag{9.113}$$

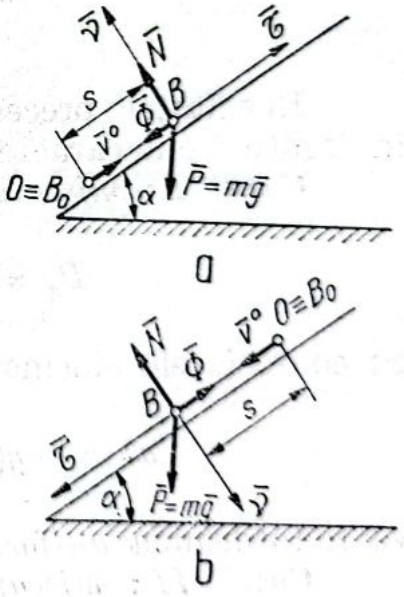


Fig. 9.6.

și cu soluția generală

$$s = \frac{1}{m}[P_\tau - \mu |P_\nu|]\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \tag{9.114}$$

Scanned with CamScanner

Introducerea, în relațiile (9.113) și (9.114), a condițiilor inițiale

$$t = 0\{s(0) = 0\,; \quad \dot{s}(0) = v^0 > 0\}, \tag{9.115}$$

permite să se determine cele două constante de integrare, C_1 și C_2:

$$C_1 = v^0\,; \quad C_2 = 0 \tag{9.116}$$

și să se scrie, în consecință, ecuația finită a mișcării punctului material considerat:

$$\boxed{s = v^0 t + \frac{1}{2m}[P_\tau - \mu|P_\nu|]t^2}, \tag{9.117}$$

care corespunde unei mișcări rectilinii uniforme variate, efectuate cu accelerația

$$a = a^0 = \frac{1}{m}(P_\tau - \mu|P_\nu|). \tag{9.118}$$

Rezultatele precedente permit să se tragă următoarele concluzii în legătură cu caracterul celor două mișcări posibile:

Cazul I: *mișcarea ascendentă*, căreia îi corespund condițiile

$$P_\tau = -mg\sin\alpha\,; \quad |P_\nu| = mg\cos\alpha, \tag{9.119}$$

cu consecințele cinematice

$$a^0 = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) < 0\,; \quad a^0 v^0 < 0, \tag{9.120}$$

va fi totdeauna *uniform încetinită*.

Cazul II: *mișcarea descendentă*, corespunzătoare condiiților

$$P_\tau = mg\sin\alpha\,; \quad |P_\nu| = mg\cos\alpha, \tag{9.121}$$

cu consecința

$$a^0 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = \frac{g}{\cos\varphi_{al}}\sin(\alpha - \varphi_{al}), \tag{9.122}$$

Scanned with CamScanner

φ_{al} fiind unghiul de frecare la alunecare, ($\operatorname{tg}\varphi_{al} = \mu$), va fi :

— *uniform accelerată* în cazul

$$\alpha > \varphi_{al}; \tag{9.123}$$

— *uniform încetinită* în cazul

$$\alpha < \varphi_{al}; \tag{9.124}$$

— *uniformă*, pentru

$$\alpha = \varphi_{al}. \tag{9.125}$$

3° **Pendulul matematic.** Se numește *pendul matematic* un punct material reținut, cu frecare neglijabilă și în mediu cu rezistență neglijabilă, pe un cerc situat în plan vertical, în mișcare numai sub acțiunea greutății lui (fig. 9.7).

Indiferent de modul de realizare practică a unui asemenea pendul — sferă mică legată la extremitatea unui fir sau tije, cu cealaltă extremitate fixată, sferă mică introdusă într-un jghiab circular vertical etc — , în toate situațiile forța activă va fi reprezentată numai prin greutatea punctului material

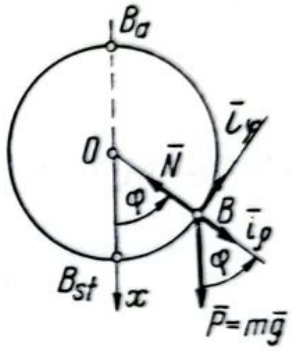


Fig. 9.7.

$$\overline{\mathcal{F}}_a = \bar{P} = m\bar{g}, \tag{9.126}$$

iar forța pasivă numai prin reacțiunea legăturii, orientată totdeauna, prin neglijarea frecării, după normala la cerc :

$$\overline{\mathcal{F}}_p = \bar{N}. \tag{9.127}$$

Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii punctului material, avînd în acest caz forma

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N}, \tag{9.128}$$

pe axele de coordonate polare ca în fig. 9.7, ($\rho = l$; $\dot{\rho} \equiv 0, \ddot{\rho} \equiv 0$) rezultă următoarele ecuații scalare de mișcare ale pendulului matematic :

$$-ml\dot{\varphi}^2 = mg\cos\varphi - |\bar{N}|; \quad l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi, \tag{9.129}$$

ultima reprezentînd chiar ecuația diferențială a mișcării lui.

Scanned with CamScanner

Prin introducerea notației

$$\frac{g}{l} = k^2, \tag{9.130}$$

această ecuație diferențială este adusă la forma

$$\ddot{\varphi} = -k^2 \sin\varphi, \tag{9.131}$$

identică deci celeia găsite în cazul pendulului fizic.

Prin înmulțire cu $2\dot{\varphi}$ și integrare, se obține și acum integrala primă

$$\dot{\varphi}^2 = 2k^2 \cos\varphi + C_1, \tag{9.132}$$

cu constanta de integrare C_1 având, în baza condițiilor inițiale

$$t = 0 \left\{ \varphi(0) = \varphi^0; \quad \dot{\varphi}(0) = \frac{v_\varphi^0}{l} = \frac{v^0}{l} \right\}, \tag{9.133}$$

valoarea

$$C_1 = 2k^2\left(\frac{v^{0^2}}{2l^2k^2} - \cos\varphi^0\right) = 2k^2\left(\frac{v^{0^2}}{2lg} - \cos\varphi^0\right), \tag{9.134}$$

putându-se scrie, în consecință, următoarea expresie determinată a vitezei unghiulare a pendulului matematic:

$$\omega = \dot{\varphi} = \pm\sqrt{2}k\sqrt{\cos\varphi + \frac{v^{0^2}}{2lg} - \cos\varphi^0}. \tag{9.135}$$

Vor putea fi deosebite și aici, ca și în cazul pendulului fizic, următoarele trei situații distincte:

Cazul I: mișcarea circulară în sens unic a pendulului matematic, corespunzătoare condiției

$$\frac{v^{0^2}}{2lg} - \cos\varphi^0 > 1; \tag{9.136}$$

71, 43, 34

Cazul II : *mișcarea asimptotică spre poziția Ba* (fig. 9.7), corespunzătoare condiției

$$\frac{v^{0^2}}{2lg} - \cos\varphi^0 = 1\,; \tag{9.137}$$

Cazul III : *mișcarea oscilatorie a pendulului matematic*, corespunzătoare condițiilor

$$-1 < \frac{v^{0^2}}{2lg} - \cos\varphi^0 = -\cos\Phi < 1, \tag{9.138}$$

pentru perioada mișcării putînd fi stabilită și acum expresia

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\Phi^2}{16}\right). \tag{9.139}$$

Rezultă de aici că un pendul fizic cu lungimea redusă de $l_r = \frac{J'_{zz}}{Ma}$ va oscila cu acceeași perioadă ca și un pendul matematic de lungime

$$l = l_r = \frac{J'_{zz}}{Ma}$$

și cu amplitudinea egală tot cu Φ; se spune, în acest caz, că *pendulul matematic este sincron cu pendulul fizic.*

De asemenea, în cazul micilor oscialații, ($\sin\varphi \approx \varphi$), se va obține aceeași ecuație finită a mișcării pendulului matematic ca și în cazul pendulului fizic, adică

$$\varphi = \Phi\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \beta\right), \tag{9.140}$$

Φ și β fiind constante de integrare, care vor fi determinate cu ajutorul condițiilor inițiale (9.133).

Perioada acestor din urmă oscilații va avea valoarea

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{9.141}$$

Scanned with CamScanner

relaţia precedentă exprimînd cele patru legi ale pendulului matematic, cunoscute de la cursurile de fizică generală:

— *legea izocronismului oscilaţiilor*: perioada nu depinde de amplitudine şi de faza iniţială;

— *legea maselor*: perioada nu depinde de masa pendulului matematic.

— *legea lungimilor*: perioada este direct proporţională cu rădăcina pătrată a lungimii pendulului matematic;

— *legea variaţiei perioadei cu acceleraţia greutăţii*: perioada variază invers proporţional cu rădăcina pătrată a acceleraţiei greutăţii.

Revenind la prima dintre ecuaţiile (9.129), se obţine, după înlocuirea lui $\dot{\varphi}$ cu expresia (9.135), următoarea valoare pentru reacţiunea $\bar{N}$ a legăturii:

$$\boxed{|\bar{N}| = mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi^0) + \frac{mv^{0^2}}{l}}, \tag{9.142}$$

cu valoarea maximă

$$\boxed{|\bar{N}|_{max} = mg(3 - \cos\varphi^0) + \frac{mv^{0^2}}{l} > mg} \tag{9.143}$$

pentru $\varphi = 0$, inegalitatea menţinîndu-se şi în cazul $v^0 = 0$.

Condiţia $|\bar{N}| = 0$ va exprima desfiinţarea legăturii, deci părăsirea de către punctul material a cercului de sprijin.

9.3.2. Mişcarea rectilinie pe verticală a punctului material sub acţiunea forţei elastice liniare

Se consideră un punct material de masă m (kg), suspendat la extremitatea unui arc elicoidal (Ae), de constantă elastică k_e (N/m) şi costantă de amortizare C(Ns/m); extremitatea opusă, E, a arcului, legată cu exteriorul, se deplasează periodic în timp pe axa verticală (Δ), pe care se deplasează şi punctul material, (fig. 9.8). (Eventualele mici deviaţii ale axei arcului de la poziţia sa verticală iniţială sînt neglijate).

Scanned with CamScanner

Asupra punctului material considerat acționează următoarele forțe, orientate toate în lungul axei (Δ), aleasă ca axă Ox (fig. 9.9)

— *greutatea sa*, $\bar{P}$:

$$\bar{P} = m\bar{g} = mg\bar{i}; \tag{9.144}$$

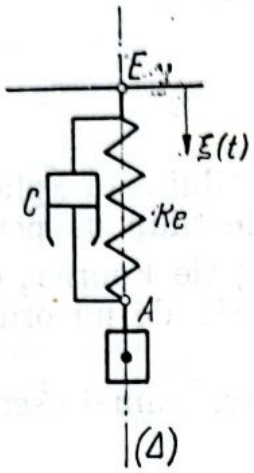


Fig. 9.8.

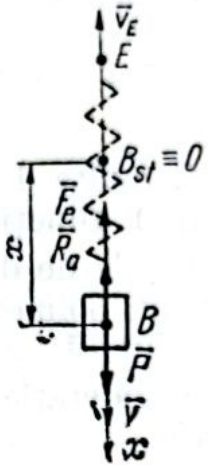


Fig. 9.9.

— *forța elastică*, $\bar{F}_e$:

$$\bar{F}_e = -k_e(\bar{r} - \bar{r}_{st}) + \bar{F}_{e_{st}} + k_e(\bar{r}_E - \bar{r}_{E_{st}}) = [-k_e(x - x_{st}) + F_{e_{st}} + k_e(x_E - x_{E_{st}})]\bar{i}. \tag{9.145}$$

— *rezistența de amortizare a arcului*, $\bar{R}_a$:

$$\bar{R}_a = -C(\bar{v} - \bar{v}_E) = -C\dot{\bar{r}} + C\dot{\bar{r}}_E = [-C\dot{x} + C\dot{x}_E]\bar{i}. \tag{9.146}$$

Ecuația fundamentală a dinamicii punctului material va avea, în condițiile acestei probleme, forma

$$m\ddot{\bar{r}} = (\bar{P} + \bar{F}_{e_{st}}) - k_e(\bar{r} - \bar{r}_{st}) - C\dot{\bar{r}} + [k_e(\bar{r}_E - \bar{r}_{E_{st}}) + C\dot{\bar{r}}_E]. \tag{9.147}$$

sau încă, ținînd seama și de ecuația

$$\bar{P} + \bar{F}_{e_{st}} = 0, \tag{9.148}$$

Scanned with CamScanner

corespunzătoare poziției de echilibru static a punctului material considerat și luînd această poziție de echilibru ca origine pe axa Ox ($\bar{r}_{st} = 0$), se mai poate scrie

$$m\ddot{\bar{r}} + C\dot{\bar{r}} + k_e\bar{r} = k_e(\bar{r}_E - \bar{r}_{E_{st}}) + C\dot{\bar{r}}_E, \tag{9.149}$$

cu următoarea ecuație de proiecție pe axa Ox:

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + k_e x = k_e(x_E - x_{E_{st}}) + C\dot{x}_E. \tag{9.150}$$

În cele mai multe din situațiile întîlnite în aplicațiile tehnice, diferența $(x_E - x_{E_{st}})$, funcție periodică de timp de perioadă egală cu T, satisface condițiile de dezvoltare în serie Fourier, cu dezvoltarea aproximabilă cu un polinom trigonometric de un ordin oarecare L, (cel mai adesea $L = 1$, sau $L = 2$).

Luînd în considerație, în continuare, numai asemenea situații, se va putea scrie

$$x_E - x_{E_{st}} = G_0 + \sum_{\lambda=1}^{L} [G_\lambda \cos(\lambda pt) + H_\lambda \sin(\lambda pt)] \tag{9.151}$$

și

$$\dot{x}_E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x_E - x_{E_{st}}] = \sum_{\lambda=1}^{L} \lambda p[-G_\lambda \sin(\lambda pt) + H_\lambda \cos(\lambda pt)], \tag{9.152}$$

cu

$$p = \frac{2\pi}{T} \tag{9.153}$$

și cu coeficienții G_0, G_λ și H_λ determinați cu ajutorul formulelor cunoscute din analiza armonică.

În consecință, grupul de termeni perturbatori din expresiile forței elastice și rezistenței de amortizare, reprezentînd forța totală de excitație, va putea fi scris sub forma

$$k_e(x_E - x_{E_{st}}), + C\dot{x}_E = A_0 + \sum_{\lambda=1}^{L} [A_\lambda \cos(\lambda pt) + B_\lambda \sin(\lambda pt)], \tag{9.154}$$

cu

$$A_0 = k_e G_0; \quad A_\lambda = k_e G_\lambda + \lambda pCH_\lambda; \quad B_\lambda = k_e H_\lambda - \lambda pCG_\lambda, \tag{9.155}$$

Scanned with CamScanner

iar ecuaţia (9.150) va lua şi ea forma corespunzătoare:

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + k_e x = A_0 + \sum_{\lambda=1}^{L} [A_\lambda \cos(\lambda pt) + B_\lambda \sin(\lambda pt)] \quad (9.156)$$

Împărţind ultima ecuaţie prin masa m şi introducînd notaţiile

$$\frac{C}{m} = 2\mu; \quad \frac{k_e}{m} = k^2; \quad \frac{A_0}{m} = a_0; \quad \frac{A_\lambda}{m} = a_\lambda; \quad \frac{B_\lambda}{m} = b_\lambda, \ (\lambda=1, 2, \ldots, L) \quad (9.157)$$

ecuaţia (9.156) va mai putea fi scrisă sub următoarea formă finală, reprezentînd ecuaţia diferenţială a mişcării punctului material considerat:

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + k^2 x = a_0 + \sum_{\lambda=1}^{L} [a_\lambda \cos(\lambda pt) + b_\lambda \sin(\lambda pt)]. \quad (9.158)$$

Acestei ecuaţii i se vor asocia condiţiile iniţiale

$$t = 0\{x(0) = x^0; \quad \dot{x}(0) = v^0\}, \quad (9.159)$$

x^0 fiind abscisa punctului material în momentul cînd începe mişcarea sa, iar v^0 fiind viteza, orientată în lungul axei Ox, a punctului în acelaşi moment.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (9.158) are forma

$$x = x_{(1)} + x_{(2)}, \quad (9.160)$$

unde $x_{(1)}$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + k^2 x = 0, \quad (9.161)$$

iar $x_{(2)}$ este o soluţie particulară a ecuaţiei complete (9.158), în cazul de faţă de aceeaşi formă ca şi membrul drept al ei.

Rezolvînd ecuaţia caracteristică corespunzătoare ecuaţiei diferenţiale (9.158), adică

$$\zeta^2 + 2\mu\zeta + k^2 = 0 \quad (9.162$$

Scanned with CamScanner

şi luînd în consideraţie numai cazul mişcărilor cu amortizări slabe ($k > \mu$), care interesează în mod deosebit aplicaţiile tehnice, vor rezulta rădăcinile

$$\zeta_{1,2} = -\mu \pm k^* i, \tag{9.163}$$

($i = \sqrt{-1}$), cu

$$k^* = \sqrt{k^2 - \mu^2} = \sqrt{\frac{k_e}{m} - \left(\frac{C}{2m}\right)^2} \tag{9.164}$$

şi deci următoarele forme pentru soluţia $x_{(1)}$:

$$x_{(1)} = e^{-\mu t}[A^* \cos(k^* t) + B^* \sin(k^* t)] = e^{-\mu t} \mathcal{A} \sin(k^* t + \alpha), \tag{9.165}$$

A^* şi B^*, respectiv $\mathcal{A}$ şi α, fiind constante de integrare.

Soluţia particulară a ecuaţiei complete (9.158) va avea forma

$$x_{(2)} = M_0 + \sum_{\lambda=1}^{L} [M_\lambda \cos(\lambda p t) + N_\lambda \sin(\lambda p t)] =$$

$$= M_0 + \sum_{\lambda=1}^{L} \mathcal{A}_\lambda \sin(\lambda p t + \alpha_\lambda), \tag{9.166}$$

cu constantele M_0, M_λ şi N_λ. respectiv

$$\mathcal{A}_\lambda = \sqrt{M_\lambda^2 + N_\lambda^2} \quad \text{şi} \quad \alpha_\lambda = arctg \frac{M_\lambda}{N_\lambda}, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, L) \tag{9.167}$$

determinate impunîndu-se condiţia ca soluţia (9.166) să verifice ecuaţia (9.158), rezultînd astfel valorile

$$M_0 = \frac{a_0}{k^2}; \quad M_\lambda = \frac{(k^2 - \lambda^2 p^2) a_\lambda - 2\mu\lambda p b_\lambda}{(k^2 - \lambda^2 p^2)^2 + 4\mu^2 \lambda^2 p^2}; \quad N_\lambda = \frac{2\mu\lambda p a_\lambda + (k^2 - \lambda^2 p^2) b_\lambda}{(k^2 - \lambda^2 p^2)^2 + 4\mu^2 \lambda^2 p^2}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, L) \tag{9.168}$$

respectiv

$$\mathcal{A}_\lambda = \frac{\sqrt{a_\lambda^2 + b_\lambda^2}}{\sqrt{(k^2 - \lambda^2 p^2)^2 + 4\mu^2 \lambda^2 p^2}}; \quad \alpha_\lambda = arctg \frac{(k^2 - \lambda^2 p^2) a_\lambda - 2\mu\lambda p b_\lambda}{2\mu\lambda p a_\lambda + (k^2 - \lambda^2 p^2) b_\lambda}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, L). \tag{9.169}$$

Scanned with CamScanner

Soluţia particulară $x_{(2)}$ va lua astfel forma determinată

$$x_{(2)} = \frac{a_0}{k^2} + \sum_{\lambda=1}^{L} \frac{\sqrt{a_\lambda^2 + b_\lambda^2}}{\sqrt{(k^2 - \lambda^2 p^2) + 4\mu\lambda^2 p^2}} \sin(\lambda p t + \alpha_\lambda), \quad (9.170)$$

iar soluţia generală (9.160) va putea fi scrisă acum sub forma

$$\boxed{x = e^{-\mu t} \mathcal{A} \sin(k^* t + \alpha) + \frac{a_0}{k^2} + \sum_{\lambda=1}^{L} \frac{\sqrt{a_\lambda^2 + b_\lambda^2}}{\sqrt{(k^2 - \lambda^2 p^2)^2 + 4\mu^2\lambda^2 p^2}} \sin(\lambda p t + \alpha_\lambda)} \quad (9.171)$$

Introducerea condiţiilor iniţiale (9.159) în soluţia generală (9.171) şi în expresia derivatei ei în raport cu timpul va permite să se determine cele două constante de integrare, $\mathcal{A}$ şi α, iar înlocuirea lor, cu valorile găsite, în relaţia (9.171) va furniza ecuaţia finită a mişcării punctului material considerat.

Înainte de a se trece la examinarea mişcării generale, determinate prin ecuaţia (9.171), este util să se analizeze următoarele cazuri particulare de mişcări ale punctului material sub acţiunea forţei elastice, corespunzătoare situaţiilor în care fie forţa de excitaţie, fie forţa de amortizare, fie ambele, devin naglijabile.

1°. **Mişcarea punctului material sub acţiunea forţei elastice, cu amortizare neglijabilă şi în absenţa excitaţiei,** caz caracterizat prin condiţiile :

$$\mu = 0; \quad a_0 = a_\lambda = b_\lambda = 0, \qquad (\lambda = 1,2,\ldots, L), \quad (9.171)$$

din prima rezultînd consecinţa

$$k^* = k = \sqrt{\frac{k_e}{m}}. \quad (9.172)$$

În această situaţie ecuaţiile (9.158) şi (9.171) iau formele :

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (9.173)$$

respectiv

$$\boxed{x = \mathcal{A} \sin(kt + \alpha)}, \quad (9.174)$$

Scanned with CamScanner

cu

$$\dot{x} = k\mathscr{A}\cos(kt + \alpha). \tag{9.175}$$

Introducerea condițiilor inițiale (9.159) în ultimele două relații conduce la următoarele valori ale constantelor de integrare $\mathscr{A}$ și α :

$$\mathscr{A} = \sqrt{x^{0^2} + \frac{v^{0^2}}{k^2}} \; : \quad \alpha = arctg\left(\frac{kx^0}{v^0}\right). \tag{9.176}$$

Se poate trage deci concluzia că mișcarea punctului material efectuată în condițiile (9.171) este o *mișcare rectilinie oscilatorie armonică*, cu amplitudinea și faza inițială determinate prin relațiile (9.176) și cu perioada mișcării avînd valoarea

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}}, \tag{9.177}$$

graficul acestei mișcări — curba $x = x(t)$ — fiind reprezentat în fig. 9.10.

2°. **Mișcarea punctului material sub acțiunea forței elastice cu amortizare și în absența excitației,** caz caracterizat prin condițiile :

$$a_0 = a_\lambda = b_\lambda = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, L), \tag{9.178}$$

în baza cărora ecuațiile (9.158) și (9.171) iau formele

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + k^2x = 0, \tag{9.179}$$

respectiv

$$\boxed{x = e^{-\mu t}\mathscr{A}\sin(k^*t + \alpha)}, \tag{9.180}$$

cu

$$\dot{x} = -\mu e^{-\mu t}\mathscr{A}\sin(k^*t + \alpha) + k^*e^{-\mu t}\mathscr{A}\cos(k^*t + \alpha) \tag{9.181}$$

Impunînd din nou condițiile inițiale (9.159) în ultimele două relații rezultă următoarele valori pentru constantele de integrare

Scanned with CamScanner

$\mathscr{A}$ și α:

$$\mathscr{A} = \sqrt{x^{0^2} + \left(\frac{v^0 + \mu x^0}{k^*}\right)^2}; \quad \alpha = arctg\left(\frac{kx^0}{v^0 + \mu x^0}\right). \tag{9.182}$$

În absența factorului exponențial $e^{-\mu t}$, mișcarea punctului material ar fi o mișcare rectilinie oscilatorie armonică, determinată prin ecuația

$$x^* = \mathscr{A} \sin(k^* t + \alpha), \tag{9.183}$$

de perioadă

$$T_p = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \mu^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k_e}{m} - \left(\frac{C}{2m}\right)^2}}, \tag{9.184}$$

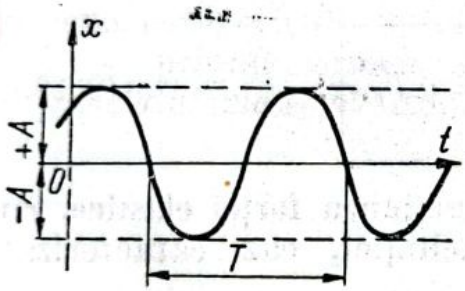


Fig. 9.10.

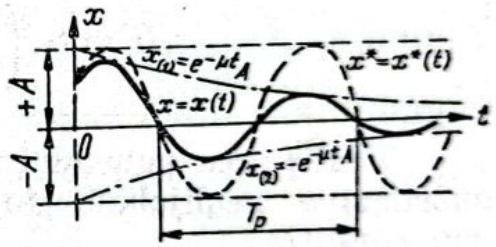


Fig. 9.11.

cu funcția $x^*(t)$, reprezentată prin linie întreruptă în graficul din fig. 9.11, satisfăcînd condiția

$$x^*(t + T_p) = x^*(t). \tag{9.185}$$

Prezența factorului $e^{-\mu t}$ în mișcarea reală, determinată prin ecuația

$$x = e^{-\mu t} x^*, \tag{9.186}$$

face ca amplitudinea mișcării oscilatorii reale să scadă exponențial cu timpul, graficul $x = x(t)$ al mișcării avînd forma trasată prin linie neîntrerpută în fig. 9.11, cu extremele situate pe curbele exponențiale

$$x_{(1)} = + e^{-\mu t} \mathscr{A} \quad \text{și:} \quad x_{(2)} = - e^{-\mu t} \mathscr{A} \tag{9.187}$$

Scanned with CamScanner

Raportul dintre două elongaţii care se succed după un interval de timp egal cu T_p, are, în baza condiţiei (9.185), valoarea

$$\frac{x(t)}{x(t+T_p)} = \frac{e^{-\mu t}x^*(t)}{e^{-\mu(t+T_p)}x^*(t+T_p)} = e^{\mu T_p}. \tag{9.188}$$

Această mişcare a punctului material este numită *mişcare rectilinie oscilatorie amortizată*, factorul $e^{-\mu t}$ purtînd şi el numele de *factor de amortizare*, iar μ fiind numit *coeficient de amortizare*; timpul T_p dat de relaţia (9.184), reprezentînd acum intervalul de periodicitate în ceea ce priveşte numai trecerea prin valorile zero a funcţiei $x(t)$, este numit *pseudo-perioadă* a mişcării oscilatorii amortizate, iar logaritmul natural al raportului (9.188) — acesta fiind, de regulă, raportul dintre două amplitudini succesive de acelaşi semn — poartă numele de *decrement logaritmic* al mişcării oscilatorii amortizate, fiind notate cu simbolul

$$\boxed{D = ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T_p)}\right) = \mu T_p.} \tag{9.189}$$

3° **Mişcarea punctului material sub acţiunea forţei elastice, cu amortizarea neglijabilă, în prezenţa excitaţiei,** caz caracterizat prin condiţia :

$$\mu = 0, \tag{9.190}$$

cu consecinţa

$$k^* = k, \tag{9.191}$$

în baza căreia ecuaţiile (9.158) şi (9.171) iau formele

$$\ddot{x} + k^2x = a_0 + \sum_{\lambda=1}^{L}[a_\lambda cos(\lambda pt) + b_\lambda sin(\lambda pt)] \tag{9.192}$$

respectiv

$$\boxed{x = \mathcal{A} sin(kt+\alpha) + \frac{a_0}{k^2} + \sum_{\lambda=1}^{L}\frac{\sqrt{a_\lambda^2+b_\lambda^2}}{k^2-\lambda^2p^2} sin(\lambda pt+\alpha_\lambda)}, \tag{9.193}$$

cu

$$\dot{x} = k\mathcal{A} cos(kt+\alpha) + \sum_{\lambda=1}^{L}\frac{\lambda p\sqrt{a_\lambda^2+k_\lambda^2}}{k^2-\lambda^2p^2} cos(\lambda pt+\alpha_\lambda). \tag{9.194}$$

Scanned with CamScanner

Introducînd şi acum condiţiile iniţiale (9.159) în ultimele două relaţii, rezultă următoarele valori pentru constantele de integrare $\mathscr{A}$ şi α:

$$\mathscr{A} = \sqrt{\left(x^0 - \frac{a_0}{k^1} - \sum_{\lambda=1}^{L} \frac{\sqrt{a_\lambda^2 + b_\lambda^2}}{k^2 - \lambda^2 p^2} \sin \alpha_\lambda\right)^2 + \left(\frac{v^0}{k} - \sum_{\lambda=1}^{L} \frac{\lambda p \sqrt{a_\lambda^2 + b_\lambda^2}}{k(k^2 - \lambda^2 p^2)} \cos \alpha_\lambda\right)^2}, \tag{9.195}$$

respectiv

$$\alpha = arctg \frac{x^0 - \frac{a^0}{k^2} - \sum_{\lambda=1}^{L} \frac{\sqrt{a_\lambda^2 + b_\lambda^2}}{k^2 - \lambda^2 p^2} \sin \alpha_\lambda}{\frac{1}{k}\left(v^0 - \sum_{\lambda=1}^{L} \frac{\lambda p \sqrt{a_\lambda^2 + b_\lambda^2}}{k^2 - \lambda^2 p^2} \cos \alpha_\lambda\right)}. \tag{9.196}$$

Examinînd structura ecuaţiei (9.193), se constată prezenţa a două categorii de termeni periodici:

— primul termen, determinînd aşa numita *mişcare proprie a punctului material*, efectuată cu perioada

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_e}} \tag{9.197}$$

depinzînd numai de elementele specifice ansamblului mecanic punct material — arc elicoidal;

— grupul de termeni periodici determinînd *mişcările perturbatorii de ordinul* λ, $(\lambda = 1,2,\ldots L)$, de perioade

$$T_\lambda = \frac{2\pi}{p_\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda p}, \quad (\lambda = 1,2,\ L) \tag{9.198}$$

depinzînd numai de *pulsaţia fundamentală* p *a excitaţiei*.

Se poate trage deci concluzia că mişcarea punctului material determinată prin ecuaţia (9.193) rezultă din suprapunerea, peste o oscilaţie armonică proprie, a unui număr de L oscilaţii armonice perturbatoare, această mişcare rezultantă purtînd numele de *mişcare oscilatorie forţată cu amortizare neglijabilă*.

În cazul cînd una din pulsaţiile $p_\lambda = \lambda p$ ale mişcărilor perturbatoare, de ex., pulsaţia $p_n > np$ a mişcării perturbatoare de ordinul $n \leqslant L$, are valoarea a pulsaţiei proprii, termenii din ecuaţia finită a

Scanned with CamScanner

mișcării care conțin diferența $(k^2-n^2p^2)$ la numitori încep să crească nelimitat cu timpul și fenomenul poartă numele de *rezonanță de ordinul n*.

Pentru a justifica afirmația făcută se va considera mai întîi că diferența $(k^2-n^2p^2)$ este foarte mică, dar diferită de zero și ecuația (9.193) va fi retranscrisă sub forma

$$x = A^* \cos(kt) + B^* \sin(kt) + \frac{a_0}{k^2} + \sum_{\lambda=1}^{L} [M_\lambda \cos(\lambda pt) + N_\lambda \sin(\lambda pt)],$$

sau încă, particularizînd expresiile (9.168) ale constantelor M_λ și N_λ la condițiile acestui caz, se va mai scrie

$$x = A^* \cos(kt) + B^* \sin(kt) + \frac{a_0}{k^2} + \sum_{\lambda=1}^{L} \frac{1}{k^2 - \lambda^2 p^2} [a_\lambda \cos(\lambda pt) + b_\lambda \sin(\lambda pt)], \qquad (9.199)$$

cu

$$\dot{x} = k[-A^* \sin(kt) + B^* \cos(kt)] + \sum_{\lambda=1}^{L} \frac{\lambda p}{k^2 - \lambda^2 p^2} [-a_\lambda \sin(\lambda pt) + b_\lambda \cos(\lambda pt)]. \qquad (9.200)$$

cu următoarele valori ale constantelor de integrare A^* și B^*, determinate prin utilizarea condițiilor inițiale (9.159):

$$A^* x^0 - \frac{a_0}{k^2} - \sum_{\lambda=1}^{L} \frac{a_\lambda}{k^2 - \lambda^2 p^2}; \quad B^* = \frac{1}{k}\left[v^0 - \sum_{\lambda=1}^{L} \frac{\lambda p b_\lambda}{k_2 - \lambda^2 p^2}\right]. \qquad (9.201)$$

Notînd cu $x^*(t)$ suma tuturor termenilor din ecuația (9.199) care nu conțin diferența $(k^2-n^2p^2)$ la numitor, ecuația (9.199) va mai putea fi scrisă, după adăugarea și scăderea termenului $\frac{b_n}{k^2 - n^2p^2} \times$ $\times \sin(kt)$ și după ordonarea convenabilă a termenilor, sub forma

$$x = \left[x^*(t) + \frac{b_n}{k(k + np)} \sin(kt)\right] - \frac{1}{(k^2 - n^2p^2)} \{a_n[\cos(kt) - \cos(npt)] + b_n[\sin(kt) - \sin(npt)]\},$$

Scanned with CamScanner

sau încă, înlocuind diferențele de cosinusuri și sinusuri prin expresiile logaritmabile corespunzătoare, se mai poate scrie

$$x=\left[x^*(t)+\frac{b_n}{k(k+np)}\sin(kt)\right]+2\frac{\sin\left(\frac{k-np}{2}t\right)}{k^2-n^2p^2}\times$$

$$\times\left[a_n\sin\left(\frac{k+np}{2}t\right)-b_n\cos\left(\frac{k+np}{2}t\right)\right]. \qquad (9.202)$$

Observînd că în condițiile precizate se mai poate accepta aproximarea

$$2\frac{\sin\left(\frac{k-np}{2}t\right)}{k^2-n^2p^2}\approx 2\frac{\frac{k-np}{2}t}{k^2-n^2p^2}=\frac{t}{k+np}$$

și trecînd și la condițiile de rezonanță de ordinul n ($np=k$), rezultă următoarea formă finală a ecuației (9.202)

$$x=\left[x^*(t)+\frac{b_n}{2k^2}\sin(kt)\right]+\frac{t}{2k}\left[a_n\sin(kt)-b_n\cos(kt)\right], \qquad (9.203)$$

care justifică afirmația făcută.

Avînd în vedere semnificația expresiei $x^*(t)$, rezultă următoarea ecuație finită concretă a mișcării oscilatorii forțate cu amortizare neglijabilă, în condițiile rezonanței de ordinul n :

$$x=\left[x^0-\frac{a_0}{k^2}-\sum_{\lambda=1}^{L}{}^{(-n)}\frac{a_\lambda}{k^2-\lambda^2p^2}\right]\cos(kt)+\frac{1}{k}\left[v^0-\sum_{\lambda=1}^{L}{}^{(-n)}\frac{\lambda pb_\lambda}{k^2-\lambda^2p^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{b_n}{2k}\right]\sin(kt)+\sum_{\lambda=1}^{L}{}^{(-n)}\frac{1}{k^2-\lambda^2p^2}\left[a_\lambda\cos(\lambda pt)+b_\lambda\sin(\lambda pt)\right]+$$

$$+\frac{t}{2k}\left[a_n\sin(kt)-b_n\cos(kt)\right]. \qquad (9.204)$$

Scanned with CamScanner

simbolul $\left(\sum_{\lambda=1}^{L}{}^{(-n)}\right)$ desemnînd suma extinsă la toate valorile precizate pentru indicele λ, cu excepția valorii $\lambda = n$.

4°. **Mișcarea punctului material sub acțiunea forței elastice, cu amortizare și în prezența excitației,** caz caracterizat prin condiția

$$\mu \neq 0, \tag{9.205}$$

precum și prin condiția ca cel puțin unul din coeficienții a_λ și b_λ să fie diferiți de zero.

Ecuația diferențială și ecuația finită a mișcării au, în această situație, formele generale (9.158), respectiv (9.171).

Constatările înregistrate cu prilejul analizei primelor trei cazuri particulare, permit să se tragă concluzia că în aceste condiții generale mișcarea punctului material are două etape distincte și anume :

— *etapa mișcării în regim tranzitoriu*, durînd atît timp cît factorul de amortizare nu face neglijabil primul termen al ecuației (9.171) și în care mișcarea rezultă din suprapunerea peste o *mișcare oscilatorie amortizată proprie*, de pseudo-perioadă

$$T_p = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \mu^2}}, \tag{9.206}$$

a unui număr de L mișcări oscilatorii armonice perturbatorii, mișcarea rezultantă purtînd numele de *mișcare oscilatorie forțată în regim tranzitoriu* ;

— *etapa mișcării în regim permanent*, începînd din momentul în care, datorită valorii practic egale cu zero a factorului de amortizare, termenul corespunzător mișcării proprii devine neglijabil și în care mișcarea, în ansamblul ei, numită acum *mișcare oscilatorie forțată în regim permanent*, sau încă *mișcare oscilatorie întreținută*, rezultă numai din suprapunerea celor L mișcări oscilatorii armonice perturbatoare.

În continuare, se va arăta că și în cazul acestei mișcări oscilatorii forțate este posibilă apariția fenomenului de rezonanță de ordinul n, manifestat de astă dată, printr-o valoare foarte mare a amplitudinii mișcării perturbatorii de ordinul n în cazul cînd pulsația $p_n = np$ a acestei mișcări ia o anumită valoare critică, $p_{n_{cr}}$, purtînd numele de *pulsație de rezonanță*.

Scanned with CamScanner

Într-adevăr, pentru un sistem punct material – arc elicoidal dat – deci pentru valori date ale pulsației proprii k și coeficientului de amortizare μ – , precum și pentru un sistem de excitație determinat constructiv – deci pentru valori date ale coeficienților dezvoltării în serie Fourier, între ei figurînd, evident, și coeficienții a_n și b_n – amplitudinea oscilației armonice perturbatoare de ordinul n, adică

$$\mathcal{A}_n = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{(k^2 - p_n^2)^2 + 4\mu^2 p_n^2}} = \mathcal{A}_n(p_n), \tag{9.207}$$

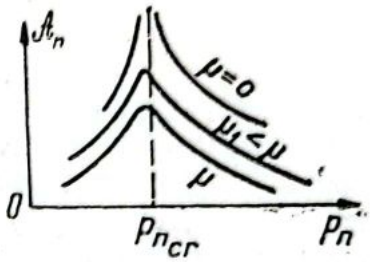


Fig. 9.12.

depinde numai de pulsația $p_n = np$, deci numai de condițiile de funcționalitate a sistemului de excitație.

Graficul variației amplitudinii $\mathcal{A}_n$ cu pulsația p_n, prezentat, pentru diverse valori ale coeficientului de amortizare μ, în fig. 9.12, permite să se tragă concluzia că maximumul amplitudinii, corespunzător pulsației de rezonanță $p_{n_{cr}}$, crește atunci cînd coeficientul de amortizare scade, devenind infinit pentru $\mu = 0$.

Examinînd expresia (9.207) a amplitudinii, se observă că maximumul funcției $\mathcal{A}_n$ implică un minimum pentru funcția

$$f(p_n) = (k^2 - p_n^2)^2 + 4\mu^2 p_n^2 \tag{9.208}$$

pentru valoarea $p_n = p_{n_{cr}}$ a argumentului, deci satisfacerea condiției

$$\left(\frac{df}{dp_n}\right)_{p_n = p_{n_{cr}}} = p_{n_{cr}}(k^2 - p_{n_{cr}}^2 - 2\mu^2) = 0, \tag{9.209}$$

cu singura rădăcină a acestei ecuații acceptabilă din punct de vedere fizic avînd valoarea

$$p_{n_{cr}} = \sqrt{k^2 - 2\mu^2} \tag{9.210}$$

Valoarea maximă a amplitudinii, corespunzătoare acestei pulsații de rezonanță va fi dată deci de relația

$$\mathcal{A}_{n_{max}} = \mathcal{A}_n(p_{n_{cr}}) = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2\mu k\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{k^2}}} \approx \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2\mu k}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{k^2}\right), \tag{9.211}$$

Scanned with CamScanner

iar ecuaţia finită a mişcării oscilatorii forţate în regim permanent, în condiţiile rezonanţei de ordinul n, va avea forma

$$\boxed{\begin{aligned} x = \frac{a_0}{k^2} + \sum_{\lambda=1}^{L}{}^{(-n)} \frac{\sqrt{a_\lambda^2 + b_\lambda^2}}{\sqrt{(k^2 - \lambda^2 p^2)^2 + 4\mu^2 \lambda^2 p^2}} \sin(\lambda p t + \alpha_\lambda) + \\ + \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{k^2}\right) \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2\mu k} \sin(\sqrt{k^2 - 2\mu^2}\, t + \alpha_n) \end{aligned}}, \quad (9.212)$$

simbolul $\left(\sum_{\lambda=1}^{L}{}^{(-n)}\right)$ desemnînd, ca şi în celelalte cazuri cînd a fost utilizat, suma extinsă la toate valorile precizate ale indicelui de sumare λ, cu excepţia valorii $\lambda = n$.

Fenomenul de rezonanţă se manifestă, în aplicaţiile tehnice, sub un dublu aspect:

— sub aspectul util practicii umane, el constituind fenomenul fundamental pe care se bazează o serie de ramuri de construcţii mecanice (construcţia maşinilor şi utilajelor vibratoare, construcţia unor aparate de măsură etc.):

— sub aspectul dăunător, el putînd provoca distrugeri — uneori cu caracter chiar catastrofal — al construcţiilor mecanice supuse la vibraţii.

Scanned with CamScanner

Capitolul V

DINAMICA MIŞCĂRII RELATIVE A RIGIDULUI

În acest ultim capitol al dinamicii rigidului vor fi stabilite ecuaţiile care descriu din punct de vedere dinamic mişcarea relativă a unui rigid, efectuată în raport cu un reper $Wx''y''z''$ aflat la rîndul său în mişcare în raport cu reperul fix $Oxyz$, luîndu-se şi aici în consideraţie mai întîi cazul rigidului ca atare şi apoi cazul rigidului asimilabil cu un punct material.

§10. Dinamica mişcării relative a rigidului şi a punctului material

10.1. *Relaţii generale în dinamica mişcării relative a rigidului*

10.1.1. Relaţii între derivatele în raport cu timpul a momentelor cinetice în centrul de masă corespunzătoare mişcărilor absolute, relative şi de transport

Înlocuind în expresia

$$\bar{\mathcal{K}}_{Ga} = \int_{(M)} \bar{r}' \times (\bar{\omega}_a \times \bar{r}')\, dm \tag{10.1}$$

a momentului cinetic al rigidului; corespunzător rotaţiei lui instantanee absolute în jurul centrului său de masă, viteza unghiulară absolută cu suma celor două componente ale ei — relativă şi de transport —, adică

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_t, \tag{10.2}$$

se obţine egalitatea

$$\bar{\mathcal{K}}_{Ga} = \int_{(M)} \bar{r}' \times (\bar{\omega}_r \times \bar{r}')\, dm + \int_{(M)} \bar{r}' \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}')\, dm,$$

Scanned with CamScanner

sau, încă, observînd că cei doi termeni din membrul drept reprezintă momentele cinetice în centrul de masă al rigidului corespunzătoare rotațiilor relative și de transport, se mai poate scrie

$$\bar{\mathcal{K}}_{Ga} = \bar{\mathcal{K}}_{Gr} + \bar{\mathcal{K}}_{Gt}, \tag{10.3}$$

cu consecință

$$\dot{\bar{\mathcal{K}}}_{Ga} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{\mathcal{K}}_{Gr}]_r + \bar{\omega}_a \times \bar{\mathcal{K}}_{Gr} + \dot{\bar{\mathcal{K}}}_{Gt}. \tag{10.4}$$

$$\boxed{\dot{\bar{\mathcal{K}}}_{Ga} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{\mathcal{K}}_{Gr}]_r + \bar{\omega}_r \times \bar{\mathcal{K}}_{Gr} + [\dot{\bar{\mathcal{K}}}_{Gt} + \bar{\omega}_t \times \bar{\mathcal{K}}_{Gr}]}. \tag{10.5}$$

10.1.2. Relații de calcul al componentelor torsorilor, în centrul de masă al unui rigid în mișcare compusă, ai solicitărilor de inerție de transport și complementare

1°. Componentele torsorului forțelor de inerție de transport. Solicitările de inerție de transport corespunzătoare polului G vor fi definite prin relațiile

$$\bar{F}_t^i = -\int_{(M)} dm\bar{a}_t\,;\ \bar{\mathcal{M}}_{Gt}^i = -\int_{(M)} \bar{r}' \times dm\bar{a}_t, \tag{10.6}$$

cu accelerația de transport avînd una din expresiile echivalente

$$\bar{a}_t = \bar{a}_W + \bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}'' + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}'') = \bar{a}_W + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{\omega}_t \times \bar{r}'') - \bar{\omega}_t \times \bar{v}_r, \tag{10.7}$$

ultima expresie fiind justificată de relația evidentă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{\omega}_t \times \bar{r}'') = \dot{\bar{\omega}}_t \times \bar{r}'' + \bar{\omega}_t \times \dot{\bar{r}}'' = \bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}'' + \bar{\omega}_t \times (\bar{v}_r + \bar{\omega}_t \times \bar{r}''),$$

unde $\bar{r}'' = \overrightarrow{WB}$ este vectorul de poziție al masei elementare dm în raport cu polul W.

Introducînd prima dintre expresiile (10.7) în relația (10.6) de definiție a forței rezultante de inerție de transport, descompunîn

Scanned with CamScanner

apoi integrala într-o sumă de trei integrale, asociind în fiecare integrală masa elementară vectorului $\bar{r}''$ și scoțînd apoi în afara semnelor de integrare vectorii $\bar{a}_w$, $\bar{\omega}_t$ și $\bar{\varepsilon}_t$ — aceiași pentru toate masele elementare asupra cărora sînt extinse operațiile de integrare — rezultă, ținînd seama și de semnificațiile integralelor rămase $\left(\int_{(M)} \bar{r}''dm = M\bar{r}''_G\right)$, următoarea expresie finală a forței de inerție de transport :

$$\bar{F}_i^t = -M\left[\bar{a}_w + \bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}''_G + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}''_G)\right] = -M\bar{a}_{G_t}. \qquad (10.8)$$

De asemenea, introducînd cea de-a doua dintre expresiile (10.7) ale accelerației de transport în relația (10.6) de definiție a momentului $\overline{\mathfrak{M}}^i_{G_t}$, descompunînd și acum integrala într-o sumă de trei integrale și avînd în vedere și condiția

$$\int_{(M)} \bar{r}' \times dm\bar{a}_W = M\bar{r}_G' \times \bar{a}_W = 0,$$

justificată de alegerea polului legat de rigid în centrul său de masă, rezultă egalitatea

$$\overline{\mathfrak{M}}^i_{G_t} = -\int_{(M)} \bar{r}' \times dm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{\omega}_t \times \bar{r}') + \int_{(M)} \bar{r}' \times dm\,(\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r). \qquad (10.9)$$

Efectuînd înlocuirea $\bar{r}'' = \bar{r}''_G + \bar{r}'$ și adăugînd termenul egal cu zero

$$\int_{(M)} \left[\frac{\mathrm{d}\bar{r}'}{\mathrm{d}t} - \bar{\omega}_r \times \bar{r}'\right] \times [dm(\bar{\omega}_t \times \bar{r}')] = 0. \qquad (10.10)$$

— ca urmare a coliniarității vectorilor din cele două paranteze pătrate, $\left(\frac{\mathrm{d}\bar{r}'}{\mathrm{d}t} = \bar{\omega}_a \times \bar{r}' = (\bar{\omega}_r + \bar{\omega}_t) \times \bar{r}'\right)$ —, prima integrală din membrul drept al relației (10.9) poate fi adusă la forma

$$\int_{(M)} \bar{r}' \times dm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{\omega}_t \times \bar{r}'') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{(M)} \bar{r}' \times dm(\bar{\omega}_t \times \bar{r}')\right] - \qquad (10.11)$$

$$-\int_{(M)} [(\bar{\omega}_r \times \bar{r}') \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}')]\,dm$$

Scanned with CamScanner

Semnificația primului termen din membrul drept al ultimei egalități poate fi stabilită imediat:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{(M)} \bar{r}' \times dm\,(\bar{\omega}_t \times \bar{r}')\right] = \dot{\bar{\mathscr{K}}}_{G_t}. \tag{10.12}$$

În ceea ce privește semnificația celui de-al doilea termen din membrul drept al relației (10.11), ea va putea fi stabilită observîndu-se mai întîi că expresia vectorială de sub semnul de integrare, adică

$$(\bar{\omega}_r \times \bar{r}') \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}') = [\underbrace{(\bar{\omega}_r \times \bar{r}')\bar{r}'}_{0}]\bar{\omega}_t - [\bar{\omega}_t(\bar{\omega}_r \times \bar{r}')]\bar{r}',$$

poate fi adusă, prin adăugarea și scăderea termenului

$$\bar{\omega}_r \times (\bar{\omega}_t\bar{r}')\bar{r}' = (\bar{\omega}_t\bar{r}')(\bar{\omega}_r \times \bar{r}') = \bar{\omega}_r \times [\bar{\omega}_t\bar{r}'^2 - \bar{r}' \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}')],$$

la forma

$$(\bar{\omega}_r \times \bar{r}') \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}') = -[\bar{\omega}_t(\bar{\omega}_r \times \bar{r}')]\bar{r}' + (\bar{\omega}_t\bar{r}')(\bar{\omega}_r \times \bar{r}') - \bar{\omega}_r \times [\bar{\omega}_t\bar{r}'^2 -$$

$$-\bar{r}' \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}')] = -\{\bar{\omega}_t \times [\bar{r}' \times (\bar{\omega}_r \times \bar{r}')\} - \bar{\omega}_r \times [\bar{r}'^2\bar{\omega}_t - \bar{r}' \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}')]$$

putîndu-se scrie deci

$$\int_{(M)} [(\bar{\omega}_r \times \bar{r}') \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}')]dm = -\bar{\omega}_t \times \int_{(M)} \bar{r}' \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')dm -$$

$$-\bar{\omega}_r \times \left[\bar{\omega}_t \int_{(M)} \bar{r}'^2 dm - \int_{(M)} \bar{r}' \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}')dm\right],$$

sau încă

$$\int_{(M)} [(\bar{\omega}_r \times \bar{r}') \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}')]dm = -\bar{\omega}_t \times \bar{\mathscr{K}}_{G_r} - \bar{\omega}_r \times [J'_G\bar{\omega}_t - \bar{\mathscr{K}}_{G_t}]. \tag{10.13}$$

În baza relațiilor (10.12) și (10.13), prima integrală din membrul drept al relației (10.9) va căpăta semnificația

$$\int_{(M)} \bar{r}' \times dm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{\omega}_t \times \bar{r}'') = \dot{\bar{\mathscr{K}}}_{G_t} + \bar{\omega}_t \times \bar{\mathscr{K}}_{G_r} + \bar{\omega}_r \times [J_G\bar{\omega}_t - \bar{\mathscr{K}}_{G_t}]. \tag{10.14}$$

Scanned with CamScanner

Trecînd şi la cea de-a doua integrală din membrul drept al relaţiei (10.9) se va putea scrie şirul de relaţii uşor de verificat

$$\int_{(M)} \bar{r}' \times dm\,(\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r) = \int_{(M)} \bar{r}' \times dm[\bar{\omega}_t \times (\bar{v}_{G_r} + \bar{\omega}_r \times \bar{r}')] =$$

$$= \int_{(M)} \bar{r}' \times dm[\bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_r \times \bar{r}')] = -\int_{(M)} [(\bar{r}'\bar{\omega}_t)\,(\bar{\omega}_r \times \bar{r}')]\,dm =$$

$$= -\bar{\omega}_r \times \int_{(M)} (\bar{r}'\bar{\omega}_t)\,\bar{r}'\,dm = -\bar{\omega}_r \times \left\{ \int_{(M)} [\bar{r}'^2 \bar{\omega}_t - \bar{r}' \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}')]\,dm \right\},$$

adică

$$\int_{(M)} \bar{r}' \times dm(\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r) = -\bar{\omega}_r \times [J_G'\bar{\omega}_t - \overline{\mathcal{K}}_{G_t}]. \tag{10.15}$$

Introducînd expresiile (10.14) şi (10.15) în relaţia (10.9) va rezulta următoarea expresie a momentului rezultant $\mathfrak{M}'_{G_t}$:

$$\overline{\mathfrak{M}}^i_{G_t} = -\dot{\overline{\mathcal{K}}}_{G_t} - \bar{\omega}_t \times \overline{\mathcal{K}}_{G_t} - 2\bar{\omega}_r \times [J_G'\bar{\omega}_t - \overline{\mathcal{K}}_{G_t}]. \tag{10.16}$$

În baza rezultatelor (10.8) şi (10.16) rezultă acum următoarea formă finală a torsorului rezultant în centrul de masă al forţelor de inerţie de transport ale unui rigid în mişcare compusă:

$$\boxed{\overline{\mathcal{J}}_G(\overline{F}^i_t) = \begin{Bmatrix} \overline{F}^i_t = -M\bar{a}_{G_t} \\ \overline{\mathfrak{M}}^i_{G_t} = -\dot{\overline{\mathcal{K}}}_{G_t} - \bar{\omega}_t \times \overline{\mathcal{K}}_{G_r} - 2\bar{\omega}_r \times [J_G'\bar{\omega}_t - \overline{\mathcal{K}}_{G_t}] \end{Bmatrix}} \tag{10.17}$$

2°. Componentele torsorului forţelor de inerţie complementare (Coriolis). Solicitările de inerţie complementare vor fi definite în polul G prin relaţiile

$$\overline{F}^i_c = -\int_{(M)} dm\bar{a}_c = -2\,\bar{\omega}_t \times \int_{(M)} dm\bar{v}_r\,;\ \overline{\mathfrak{M}}^i_{G_c} = -\int_{(M)} \bar{r}' \times dm\bar{a}_c =$$

$$= -2\int_{(M)} \bar{r}' \times dm(\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r). \tag{10.18}$$

Scanned with CamScanner

Efectuînd și acum înlocuirea $\bar{v}_r = \bar{v}_{Gr} + \bar{\omega}_r \times r'$ în relația de definiție a forței de inerție complementare rezultante, se obține următoarea expresie a acestei forțe:

$$\bar{F}_c^i = -2M\bar{\omega}_t \times \bar{v}_{Gr} = -M\bar{a}_{Gc}, \tag{10.19}$$

$\bar{a}_{Gc}$ fiind accelerația complementară a centrului de masă al rigidului.

În ceea ce privește expresia momentului rezultant în centrul de masă al forțelor de inerție complementare, ea va putea fi scrisă direct, în baza relației (10.15), adică

$$\overline{\mathfrak{M}}_{Gc}^i = 2\bar{\omega}_r \times [J'_G\bar{\omega}_t - \overline{\mathcal{K}}_{Gt}]. \tag{10.20}$$

Torsorul în polul G al forțelor de inerție complementare ale unui rigid în mișcare compusă va avea deci forma

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_G(\bar{F}_C^i) = \begin{Bmatrix} \bar{F}_C^i = -M\bar{a}_{GC} \\ \overline{\mathfrak{M}}_{GC}^i = 2\bar{\omega}_r \times [J'_G\bar{\omega}_t - \overline{\mathcal{K}}_{Gt}]. \end{Bmatrix}} \tag{10.21}$$

3.° Componentele torsorului rezultant în centrul de masă ale solicitărilor de inerție de transport și complementare ale rigidului în mișcare compusă.

În baza rezultatelor (10.17) și (10.21) se va putea scrie următoarea formă finală a torsorului rezultant în centrul de masă al solicitărilor de inerție de transport și complementare ale unui rigid în mișcare compusă:

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_G(\bar{F}_t^i + \bar{F}_c^i) = \begin{Bmatrix} \bar{F}_t^i + \bar{F}_c^i = -M(\bar{a}_{Gt} + \bar{a}_{Gc}) \\ \overline{\mathfrak{M}}_{Gt}^i + \overline{\mathfrak{M}}_{Gc}^i = -\overline{\mathcal{K}}_{Gt} - \bar{\omega}_t \times \overline{\mathcal{K}}_{Gr} \end{Bmatrix}} \tag{10.22}$$

Expresiile precedente vor fi folosite, în continuare, la stabilirea ecuațiilor mișcării relative a rigidului.

10.2. *Problemele și ecuațiile dinamicii mișcării relative a rigidului*

10.2.1. Problemele dinamicii mișcării relative a rigidului

Problemele de dinamica mișcării relative a rigidului pot căpăta următoarea formulare generală: fiind date ecuațiile finite ale mișcării

Scanned with CamScanner

de transport a reperului $Wx''y''z''$ în raport cu reperul fix $Oxyz$:

$$\begin{aligned} &x_w = x_w(t); \quad y_w = y_w(t); \quad z_w = z_w(t); \\ &\psi_t = \psi_t(t); \quad \varphi_t = \varphi_t(t); \quad \theta_t = \theta_t(t), \end{aligned} \tag{10.23}$$

caracteristicile inerțiale ale rigidului care execută mișcarea compusă — reprezentate prin masa M și momentele centrale de inerție J'_z, J'_y și J'_z —, legăturile pasive aplicate rigidului — care introduc un număr de l ecuații de legătură între parametrii de poziție ai mișcării relative și, în general, un număr de $r = l$ de elemente scalare necunoscute în torsorul rezultant al reacțiunilor corespunzătoare acelor legături—, precum și solicitările active aplicate rigidului, — în torsorul rezultant al cărora pot intra și un număr de f elemente scalare necunoscute —, se cere să se determine elementele necunoscute ale problemei, al căror număr va fi dat și acum de relația

$$s = p + r + f, \tag{10.24}$$

cu singura deosebire că numărul p va indica de astă dată numărul parametrilor de poziție ai mișcării relative, rămași independenți în urma aplicării legăturilor pasive.

Ca și în dinamica mișcării absolute, și în dinamica mișcării relative a rigidului este posibilă următoarea clasificare a problemelor:

— *probleme de tip direct*, caracterizate prin condițiile

$$p = 0; \quad s = r + f, \tag{10.25}$$

adică în care sînt date și ecuațiile finite ale mișcării relative, urmînd să se determine reacțiunile necunoscute ale legăturilor aplicate, precum și elementele scalare necunoscute din torsorul solicitărilor active;

— *probleme de tip fundamental*, corespunzătoare condițiilor

$$f = 0; \quad s = p + r, \tag{10.26}$$

adică probleme în care sînt precizate toate solicitările active aplicate rigidului și se cere să se determine parametrii de poziție inde-

Scanned with CamScanner

pendenți ai mișcării relative, precum și reacțiunile necunoscute ale legăturilor pasive aplicate rigidului.

10.2.2. Ecuațiile dinamicii mișcării relative a rigidului

Pentru stabilirea, mai întîi, a ecuațiilor vectoriale ale dinamicii mișcării relative a rigidului, se va pleca de la forma a treia a ecuațiilor vectoriale ale dinamicii mișcării absolute, adică

$$M\bar{a}_{G_a} = \overline{\mathscr{F}}_a + \overline{\mathscr{F}}_p\,;\quad \dot{\overline{\mathscr{K}}}_{G_a} = \overline{\mathfrak{M}}_{aG} + \overline{\mathfrak{M}}_{pG}, \tag{10.27}$$

în care se va ține seama, pe de o parte, de relația ce exprimă teorema lui Coriolis

$$\bar{a}_{G_a} = \bar{a}_{G_r} + \bar{a}_{G_t} + \bar{a}_{G_c} \tag{10.28}$$

și, pe de altă parte, de relația (10.5); reținînd în membrul stîng al ecuațiilor (10.27) numai termenii care se referă la mișcarea relativă, rezultă următoarele două relații derivate din ecuațiile (10.27):

$$\begin{cases} M\bar{a}_{G_r} = \overline{\mathscr{F}}_a + \overline{\mathscr{F}}_p + (-M\bar{a}_{G_t}) + (-M\bar{a}_{G_c})\,; \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{\overline{\mathscr{K}}}_{G_r}]_r + \bar{\omega}_r \times \overline{\mathscr{K}}_{G_r} = \overline{\mathfrak{M}}_{aG} + \overline{\mathfrak{M}}_{pG} - [\dot{\overline{\mathscr{K}}}_{G_t} + \bar{\omega}_t \times \overline{\mathscr{K}}_{G_r}]. \end{cases} \tag{10.29}$$

Este suficient să se țină seama acum de semnificațiile (10.22) ale termenilor trecuți în membrul drept, pentru a se obține astfel următoarele *ecuații vectoriale ale dinamicii mișcării relative a rigidului:*

$$\boxed{\begin{aligned} &M\bar{a}_{G_r} = \overline{\mathscr{F}}_a + \overline{\mathscr{F}}_p + \overline{F}^i_t + \overline{F}^i_c\,; \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\overline{\mathscr{K}}_{G_r}]_r + \bar{\omega}_r \times \overline{\mathscr{K}}_{G_r} = \overline{\mathfrak{M}}_{aG} + \overline{\mathfrak{M}}_{pG} + \overline{\mathfrak{M}}^i_{G_t} + \overline{\mathfrak{M}}^i_{G_c} \end{aligned}} \tag{10.30}$$

Prin proiectarea primei dintre ecuațiile (10.30) pe axele reperului mobil $Wx''y''z''$ și a celei de-a doua ecuații vectoriale pe axele reperului legat de rigid, se obține și *sistemul de ecuații scalare ale*

Scanned with CamScanner

dinamicii mișcării relative a rigidului, având forma:

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad M\ddot{x}''_G = \mathcal{F}''_{a_x} + \mathcal{F}''_{p_x} + F''^{i}_{t_x} + F''^{i}_{c_x};\\
&(2)\quad M\ddot{y}''_G = \mathcal{F}''_{a_y} + \mathcal{F}''_{p_y} + F''^{i}_{t_y} + F''^{i}_{c_y};\\
&(3)\quad M\ddot{z}''_G = \mathcal{F}''_{a_z} + \mathcal{F}''_{p_z} + F''^{i}_{t_z} + F''^{i}_{c_z};\\
&(4)\quad J'_x\dot{\omega}'_{rx} + (J'_z - J'_y)\,\omega'_{ry}\,\omega'_{rz} = \mathfrak{M}'_{a_{G_x}} + \mathfrak{M}'_{p_{G_x}} + \mathfrak{M}''^{i}_{G_{t_x}} + \mathfrak{M}''^{i}_{G_{c_x}};\\
&(5)\quad J'_y\dot{\omega}'_{ry} + (J'_x - J'_z)\omega'_{rx}\omega'_{rz} = \mathfrak{M}'_{a_{G_y}} + \mathfrak{M}'_{p_{G_y}} + \mathfrak{M}''^{i}_{G_{t_y}} + \mathfrak{M}''^{i}_{G_{c_y}};\\
&(6)\quad J'_z\dot{\omega}'_{rz} + (J'_y - J'_x)\,\omega'_{rx}\omega'_{ry} = \mathfrak{M}'_{a_{G_z}} + \mathfrak{M}'_{p_{G_z}} + \mathfrak{M}''^{i}_{G_{r_z}} + \mathfrak{M}''^{i}_{G_{c_z}}
\end{aligned}
\tag{10.31}
$$

După cum se vede, pentru mișcarea relativă generală rezultă un număr total de

$$\boxed{e = 6} \tag{10.32}$$

ecuații scalare de mișcare.

10.2.3. Rezolvarea problemelor de dinamica mișcării relative a rigidului

Și în dinamica mișcării relative a rigidului, pentru rezolvarea completă a unei probleme va trebui să fie satisfăcută condiția necesară, întîlnită și în dinamica mișcării absolute:

$$e = s = p + r + f, \tag{10.33}$$

respectiv condiția

$$e = s = p + r \tag{10.34}$$

pentru problemele de tip fundamental, care prezintă cea mai mare importanță pentru aplicațiile tehnice.

În ceea ce privește metodologia de rezolvare a problemelor de dinamica mișcării relative, ea este aceeași ca și în dinamica mișcării absolute a rigidului și, în consecință, nu se va mai insista asupra ei.

Un aspect strîns legat de rezolvarea problemelor de dinamica mișcării relative a rigidului, asupra căruia este absolut necesar să

Scanned with CamScanner

se atragă atenţia, este însă acela al condiţiilor de utilizare a ecuaţiilor stabilite în cadrul subpunctului precedent.

După cum s-a putut observa, la stabilirea ecuaţiilor dinamicii mişcării relative a rigidului s-a plecat de la ipoteza, subînţeleasă, că mişcarea de transport a reperului $(\mathcal{R}'') \equiv Wx''y''z''$ este independentă de mişcarea relativă a rigidului considerat. În realitate însă, reperul $(\mathcal{R}'') \equiv Wx''y''z''$ este totdeauna ataşat unui alt rigid — sau unui ansamblu rigid de corpuri din mediul înconjurător faţă de care se execută mişcarea relativă studiată, ansamblu cu care rigidul considerat se găseşte în interacţiune prin intermediul legăturilor pasive aplicate rigidului.

Se înţelege că în asemenea condiţii nu numai mişcarea relativă a rigidului va fi influenţată de mişcarea de transport a ansamblului rigid de care este ataşat reperul $Wx''y''z''$, ci şi mişcarea de transport a acestui ansamblu va fi influenţată de mişcarea relativă a rigidului considerat, cele două elemenete mobile — rigidul şi ansamblul rigid faţă de care se execută mişcarea relativă a primului — formînd un *sistem mecanic*, a cărui modalitate de studiere va fi prezentată în cel de-al doilea volum al lucrării.

În cazurile, însă, cînd caracteristicile inerţiale — masă şi momente de inerţie — ale ansamblului rigid căruia îi este ataşat reperul $Wx''y''z''$ au valori suficient de mari încît mişcarea, comandată, a acestui ansamblu să nu fie influenţată, practic, de mişcarea relativă a rigidului considerat, atunci utilizarea ecuaţiilor dinamicii mişcării relative, stabilite în cadrul acestui paragraf, este pe deplin justificată, iar concluziile rezultînd din folosirea lor pot fi apreciate ca fiind absolut corecte.

Rezultă de aici necesitatea verificării, în prealabil, pentru o problemă concretă dată, a valabilităţii ipotezei care a stat la baza stabilirii ecuaţiilor dinamicii mişcării relative a rigidului.

10.3. *Echilibrul relativ al rigidului*

10.3.1. Ecuaţiile de echilibru relativ al rigidului

Se spune că un rigid (S) se află în *stare de echilibru relativ* atunci cînd nu mai execută mişcarea relativă faţă de reperul $Wx''y''z''$, ci numai mişcarea de transport, odată cu acest din urmă reper, în raport cu sistemul de referinţă fix.

Scanned with CamScanner

Starea de echilibru relativ se va traduce deci prin condițiile cinematice

$$\begin{aligned} &\bar{v}_{G_r} \equiv 0\,; \qquad \bar{a}_{G_r} \equiv 0\,; \\ &\bar{\omega}_r \equiv 0\,; \qquad \bar{\varepsilon}_r \equiv 0\,; \end{aligned} \tag{10.35}$$

cu consecințele dinamice directe

$$F_c^i = -2M\bar{\omega}_t \times \bar{v}_{G_r} \equiv 0\,; \tag{10.36}$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_{G_c}^i = 2\bar{\omega}_r \times (J'_G\bar{\omega}_t - \overline{\mathcal{K}}_{G_t}) \equiv 0\,; \tag{10.37}$$

$$\overline{\mathcal{K}}_{G_r} = J'_x\omega'_{r_x}\bar{i}' + J'_y\omega'_{r_y}\bar{j}' + J'_z\omega'_{r_z}\bar{k}' \equiv 0 \tag{10.38}$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_{G_t}^i = -\dot{\overline{\mathcal{K}}}_{G_t} - \bar{\omega}_t \times \overline{\mathcal{K}}_{G_r} - 2\bar{\omega}_r \times (J'_G\bar{\omega}_t - \overline{\mathcal{K}}_{G_t}) \equiv -\dot{\overline{\mathcal{K}}}_{G_t}. \tag{10.39}$$

În baza acestor condiții, ecuațiile vectoriale (10.30) ale dinamicii mișcării relative a rigidului vor lua formele particulare

$$\boxed{\begin{aligned} &\overline{\mathcal{F}}_a + \overline{\mathcal{F}}_p + \bar{F}_t^i = 0\,; \\ &\overline{\mathfrak{M}}_{aG} + \overline{\mathfrak{M}}_{pG} + \mathfrak{M}_{G_t}^i = 0 \end{aligned}}\,, \tag{10.40}$$

ele reprezentînd *ecuațiile vectoriale de echilibru relativ al rigidului.*

Prin proiectare — de regulă, pe axele reperului legat de rigid — a ecuațiilor vectoriale (10.40), se obține și *sistemul de ecuații scalare de echilibru relativ al rigidului*, pe baza cărora pot fi rezolvate diversele probleme de echilibru relativ ce pot fi întîlnite în aplicațiile tehnice.

10.3.2. Sisteme de referință inerțiale și neinerțiale

În cazul cînd mișcarea de transport rezultă numai dintr-o translație rectilinie și uniformă, adică se efectuează în condițiile

$$\bar{\omega}_t \equiv 0\,; \quad \bar{\varepsilon}_t \equiv 0\,; \quad \bar{a}_W \equiv 0, \tag{10.41}$$

Scanned with CamScanner

rezultă consecințele

$$\bar{F}_t^i = -M\bar{a}_{G_t} = -M[\bar{a}_W + \bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}_G'' + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}_G'')] \equiv 0; \quad (10.42)$$

$$\bar{F}_c^i = -M\bar{a}_{G_c} = -2M\bar{\omega}_t \times \bar{v}_{G_r} \equiv 0; \quad (10.43)$$

$$\bar{\mathcal{K}}_{G_t} = J_x'\omega_{t_x}'\bar{i}' + J_y'\omega_{t_y}'\bar{i}' + J_z'\omega_{t_z}'\bar{k}' \equiv 0 \quad (10.44)$$

și

$$\bar{\mathfrak{M}}_{G_t}^i + \bar{\mathfrak{M}}_{G_c}^i = -\dot{\bar{\mathcal{K}}}_{G_t} - \bar{\omega}_t \times \bar{\mathcal{K}}_{G_r} \equiv 0. \quad (10.45)$$

În această situație, ecuațiile vectoriale (10.30) ale dinamicii mișcării relative a rigidului capătă formele particulare

$$M\bar{a}_{G_r} = \bar{\mathcal{F}}_a + \bar{\mathcal{F}}_p; \quad (10.46)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{\mathcal{K}}_{G_r}]_r + \bar{\omega}_r \times \bar{\mathcal{K}}_{G_r} = \bar{\mathfrak{M}}_{aG} + \bar{\mathfrak{M}}_{pG},$$

ele coincizînd, după cum se poate observa ($\bar{a}_{G_r} \equiv \bar{a}_{G_a}$; $\bar{\omega}_r \equiv \bar{\omega}_a$; $\bar{\mathcal{K}}_{G_r} \equiv \bar{\mathcal{K}}_{G_a}$), cu cele ale dinamicii mișcării absolute a rigidului.

Se poate trage deci concluzia că ecuațiile vectoriale ale dinamicii rigidului se scriu la fel, fie că mișcarea lui este raportată la un reper fix, fie că este raportată la un reper $(\mathcal{R}'') \equiv Wx''y''z''$ în mișcare de translație rectilinie uniformă în raport cu reperul fix.

Toate reperele care execută mișcări de translație rectilinii uniforme în raport cu reperul considerat fix și față de care ecuațiile vectoriale ale dinamicii mișcării relative a unui rigid se scriu la fel ca și în raport cu reperul fix, poartă numele de sisteme de *referință inerțiale*, sau *repere inerțiale*, această denumire fiind justificată de faptul că toate translațiile rectilinii uniforme se efectuează în virtutea legii inerției; se înțelege că toate celelalte repere mobile, cu alte mișcări față de reperul considerat fix decît translația rectilinie uniformă, se vor numi *repere neinerțiale*, sau *sisteme de referință neinerțiale.*

10.4. *Dinamica unor cazuri particulare de mișcări relative ale rigidului*

10.4.1. Dinamica mișcării relative plan-paralele a rigidului

Ca și în cinematica mișcării compuse a rigidului, se va considera și aici deplasarea secțiunii plane (Σ_s) a unui rigid (S) în planul

Scanned with CamScanner

de coordonate $Wx''y''$ (fig. 10.1), aflat la rîndul său în mișcare în planul de coordonate fix Oxy.

În această situație parametrii de poziție ai mișcărilor relative și de transport se reduc, după cum se știe, numai la mărimile x''_G, y''_G și φ_r, respectiv x_W, y_W și φ_t, cu consecințele cinematice:

$$\bar{\omega}_r = \dot{\varphi}_r \bar{k}' = \dot{\varphi}_r \bar{k}\,;\ \bar{\omega}_t = \dot{\varphi}_t \bar{k}'' = \dot{\varphi}_t \bar{k}\,;\ \bar{\omega}_r \times \bar{\omega}_t \equiv 0. \tag{10.47}$$

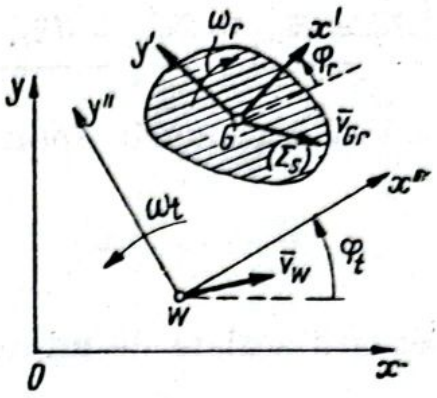


Fig. 10.1.

Luînd în considerație și de astă dată numai situațiile cele mai des întîlnite în aplicațiile practice, cînd planul de coordonate $Gx'y'$, invariabil atașat secțiunii (Σ_s), este plan de simetrie în repartiția masei, $(J'_{xz} = J'_{yz} = 0\,;\ J'_z = J)$, vor rezulta următoarele expresii simplificate pentru vectorii $\bar{\mathcal{K}}_{G_r}$ și $\bar{\mathcal{K}}_{G_t}$;

$$\dot{\bar{\mathcal{K}}}_{G_r} = J\bar{\omega}_r, \tag{10.48}$$

respectiv

$$\bar{\mathcal{K}}_{G_t} = J\bar{\omega}_t. \tag{10.49}$$

În baza ultimelor trei relații, expresiile (10.16) și (10.20) ale momentelor rezultante în centrul de masă ale forțelor de inerție de transport, și complementare vor căpăta valorile

$$\bar{\mathfrak{M}}^i_{G_t} = -\dot{\bar{\mathcal{K}}}_{tG} = -J\bar{\varepsilon}_t \tag{10.50}$$

respectiv

$$\bar{\mathfrak{M}}^i_{G_c} \equiv 0. \tag{10.51}$$

În consecință, ecuațiile vectoriale (10.30) ale dinamicii mișcării relative a rigidului vor lua următoarele forme particulare, corespunzătoare cazului plan:

$$\boxed{\begin{aligned} M\bar{a}_{G_r} &= \bar{\mathcal{F}}_a + \bar{\mathcal{F}}_p + \bar{F}^i_t + \bar{F}^i_c\,; \\ J\bar{\varepsilon}_r &= \bar{\mathfrak{M}}_{aG} + \bar{\mathfrak{M}}_{pG} + \bar{\mathfrak{M}}^i_{G_t} \end{aligned}} \tag{10.52}$$

lor corespunzîndu-le următorul sistem de ecuații scalare ale dinamicii mișcării relative plane a rigidului:

Scanned with CamScanner

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_G'' &= \mathcal{F}_{ax}'' + \mathcal{F}_{px}'' - Ma_{wx}'' + M\varepsilon_t y_G'' + M\omega_t^2 x_G'' + 2M\omega_t y_G'' ; \\ M\ddot{y}_G'' &= \mathcal{F}_{ay}'' + \mathcal{F}_{py}'' - Ma_{wy}'' - M\varepsilon_t x_G'' + M\omega_t^2 y_G'' - 2M\omega_t x_G'' ; \\ J\ddot{\varphi}_r &= \mathfrak{M}_{aG}' + \mathfrak{M}_{pG}' - J\ddot{\varphi}_t, \end{aligned} \tag{10.53}$$

adică un număr total de

$$\boxed{e = 3} \tag{10.54}$$

ecuații scalare de mișcare.

10.4.2. Dinamica mișcării relative a punctului material

1.° Ecuațiile scalare ale dinamicii mișcării relative a punctului material.

Ca și în cazul mișcării absolute, și dinamica mișcării relative a punctului material va constitui o aproximare a dinamicii mișcării relative a rigidului, corespunzătoare condițiilor

$$\frac{J_x'}{M} \approx \frac{J_y'}{M} \approx \frac{J_z'}{M} \approx 0 ; \qquad \frac{\omega_r}{v_G} \approx 0, \tag{10.55}$$

care vor permite neglijarea tuturor termenilor datorați rotațiilor relative în expresiile caracteristicilor cinetice și dinamice corespunzătoare acestei mișcări.

Notațiile introduse pentru a distinge cazul cînd corpul este asimilat cu un punct material de cazul cînd trebuie considerat rigid ca atare sînt aceleași din dinamica mișcării absolute a rigidului, extinse însă și la mișcarea relativă, adică

$$\bar{r}_G'' = \bar{r}'' ; \quad \bar{v}_{G_r} = \bar{v}_r ; \quad \bar{a}_{G_r} = \bar{a}_r. \tag{10.56}$$

Din aceleași rațiuni, ca și în dinamica mișcării absolute a punctului material, nici în dinamica mișcării relative a acestui model mecanic simplificat nu va mai avea sens introducerea reperului $(\mathcal{R}')$ legat invariabil de corp, singurele repere ce vor trebui legate în considerație fiind reperul fix $(\mathcal{R}) \equiv Oxyz$ și reperul $(\mathcal{R}'') = Wx''y''z$ în mișcare de transport (fig. 10.2); de asemenea, torsorii, în punctul reprezentativ al punctului material — centrul său de masă —, ai impulsurilor și solicitărilor aplicate corpului în mișcare relativă asi-

Scanned with CamScanner

milat cu un punct material se vor reduce, evident, numai la vectorii rezultanți : impulsul punctului material, respectiv forța rezultantă.

Mișcarea de transport va continua să fie determinată, ca și în dinamica mișcării relative a rigidului, prin ecuațiile generale (10.23) — evident, cu simplificările corespunzătoare diverselor mișcări particulare de transport — , aceste ecuații permițînd să se calculeze parametrii cinematici de ordinul întîi și doi ai mișcării reperului $Wx''y''z''$.

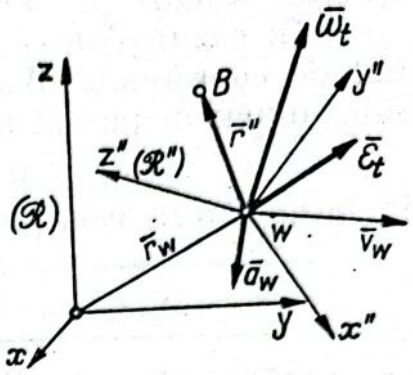


Fig. 10.2.

În aceste condiții, ecuațiile (10.30) ale dinamicii mișcării relative a rigidului se vor reduce numai la prima, care, transcrisă cu notațiile adoptate pentru această situație, adică

$$\boxed{m\bar{a}_r = \bar{\mathcal{F}}_a + \bar{\mathcal{F}}_p + \bar{F}_t^i + \bar{F}_c^i}, \tag{10.56}$$

va reprezenta *ecuația vectorială fundamentală a dinamicii mișcării relative a punctului material.*

Se înțelege că toți termenii care figurează în ecuația precedentă vor trebui exprimați cu convenția de notare adoptată în dinamica punctului, material, adică

$$\bar{a}_r = \ddot{x}''\bar{i}'' + \ddot{y}''\bar{j}'' + \ddot{z}''k''\,; \tag{10.57}$$

$$\bar{F}_t^i = \bar{F}_{trans}^i + \bar{F}_{rot}^i + \bar{F}_{cf} = (-m\bar{a}_W) + [-m(\bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}'')] + [-m\bar{\omega}_t \times [\omega_t \times \bar{r}'']] \tag{10.58}$$

și

$$\bar{F}_c^i = -2m\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r. \tag{10.59}$$

Introducînd aceste expresii concrete în ecuația vectorială (10.56) și descompunînd produsul dublu vectorial din expresia forței centrifuge, va mai rezulta următoarea formă pentru ecuația fundamentală a dinamicii mișcării relative a punctului material :

$$\boxed{m\bar{a}_r = \bar{\mathcal{F}}_a + \bar{\mathcal{F}}_p - m\bar{a}_W - m\bar{\varepsilon}_r \times \bar{r}'' - m(\bar{\omega}_t\bar{r}'')\bar{\omega}_t + m\bar{\omega}_t^2\bar{r}'' - 2m\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r} \tag{10.60}$$

ei corespunzîndu-i un număr de

$$\boxed{e = 3} \tag{10.61}$$

Scanned with CamScanner

ecuații scalare de proiecții pe axele reperului $Wx''y''z''$, reprezentînd *ecuațiile scalare ale dinamicii mișcării relative a punctului material.*

În cazul plan — punctul material se deplasează numai în planul de coordonate $Wx''y''$, iar acest plan se deplasează, la rîndul său, numai în planul fix Oxy, (fig. 10.3)—, vor fi valabile condițiile

$$\bar{\omega}_t = \dot{\varphi}_t \bar{k}'' = \omega_t \bar{k}\,;\ \bar{\omega}_t \bar{r}'' \equiv 0, \tag{10.62}$$

în baza cărora ecuația vectorială (10.60) va lua forma

$$\boxed{m\bar{a}_r = \bar{\mathcal{F}}_a + \bar{\mathcal{F}}_p - m\bar{a}_W - m\bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}'' + m\bar{\omega}_t^2 \bar{r}'' - 2m\bar{\omega} \times \bar{v}_r}, \tag{10.63}$$

cu următoarele ecuații de proiecții pe axele reperului $Wx''y''$:

$$\left|\begin{array}{l} m\ddot{x}'' = \mathcal{F}''_{a_x} + \mathcal{F}''_{p_x} - ma_{W_x} + m\varepsilon_t y'' + m\omega_t^2 x'' + 2m\omega_t \dot{y}'' \\ m\ddot{y}'' = \mathcal{F}''_{a_y} + \mathcal{F}''_{p_y} - ma_{W_y} - m\varepsilon_t x'' + m\omega_t^2 y'' - 2m\omega_t \dot{x}''\,; \end{array}\right| \tag{10.64}$$

considerîndu-se că toate forțele, active și pasive, aplicate punctului material sînt situate în planul secțiunii (Σ_y) ; se înțelege însă că vor putea fi realizate mișcări compuse plane și în condițiile solicitării punctului material de către forțe active și pasive cu orientări oarecare în spațiu, în care caz la ecuațiile scalare precedente se va adăuga și ecuația de proiecții pe axa Wz'', reprezentînd o condiție necesară pentru aceste forțe în vederea asigurării caracterului plan al mișcării compuse.

10.4.2. Echilibrul relativ al punctului material

Condițiile cinematice (10.35) de echilibru relativ al rigidului se vor reduce, în cazul punctului material, numai la condiția unică

$$\bar{v}_r \equiv 0, \tag{10.65}$$

cu consecințele directe

$$\bar{a}_r \equiv 0 \tag{10.66}$$

și

$$\bar{F}_c^i = -2m\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r \equiv 0, \tag{10.67}$$

în baza cărora ecuația fundamentală (10.56) a dinamicii mișcării relative a punctului material va lua forma particulară

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}}_a + \bar{\mathcal{F}}_p + \bar{F}_i^i = 0}, \tag{10.68}$$

reprezentînd *ecuația vectorială de echilibru relativ al punctului material.*

Scanned with CamScanner

Prin proiectarea acestei ecuații pe axele unui reper cartezian triortogonal auxiliar $B\xi\eta\zeta$, ales, de regulă, cu originea chiar în punctul material B și orientat convenabil, astfel încît cît mai multe din forțele ce acționează asupra punctului material considerat să aibă proiecții diferite de zero numai pe cîte o singură axă, se obține și *sistemul de ecuații scalare de echiliru relativ al punctului material*:

$$\boxed{\mathcal{F}_{a_\xi}+\mathcal{F}_{f_\xi}+F^i_{t_\xi}=0;\ \mathcal{F}_{a_\eta}+\mathcal{F}_{f_\eta}+F^i_{t_\eta}=0;\ \mathcal{F}_{a_\zeta}+\mathcal{F}_{f_\zeta}+F^i_{t_\zeta}=0}, \tag{10.69}$$

aceste ecuații reducîndu-se numai la primele două în cazul plan.

3°. Aplicație: mișcarea relativă liberă a punctului material la suprafața Pămîntului, cu rezistența aerului neglijabilă.

Neglijîndu-se și acum mișcarea de translație a Pămîntului, dar ținîndu-se seama de mișcare sa de rotație, efectuată cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_t = \bar{\omega}$ de modul

$$|\bar{\omega}| = \omega = \frac{2\pi}{24.3600} \approx 0{,}000079\ (s^{-1}) \tag{10.70}$$

și orientată după axa SN (fig. 10.3) se pune problema să se studieze mișcarea relativă față de un reper $Wx''y''z''$, legat de Pămînt și deci în rotație odată cu el, a unui punct material aruncat cu viteza relativă inițială $\bar{v}_r^0$, dintr-o poziție inițială B_0 de la suprafața Pămîntului, determinată prin latitudinea geografică ψ, (unghiul format de verticala ce trece prin B_0 cu planul ecuatorial al Pămîntului).

Întrucît în această situație singura forță activă la care este supus punctul material este forța gravitațională terestră, $\bar{F}_g$, ecuația vectorială (10.56) a dinamicii mișcării relative a punctului material va lua forma

$$m\bar{a}_r = \bar{F}_g + \bar{F}^i_t + \bar{F}^i_c, \tag{10.71}$$

în care forța de inerție de transport va avea numai componentele

$$\bar{F}^i_t = \bar{F}^i_{trans} + \bar{F}_{c_f} = -m\bar{a}_W - m[\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}'')], \tag{10.72}$$

deoarece mișcarea de rotație a Pămîntului poate fi considerată practic uniformă, ($\bar{\varepsilon}_t = \bar{\varepsilon} \equiv 0$).

Observînd că în ipoteza de lucru acceptată — neglijarea mișcării de translație a Pămîntului, deci durată mică de mișcare a punctului material — accelerația polului W, în mișcarea sa față de reperul fix considerat cu originea în centrul Pămîntului, este dată de relația

$$\bar{a}_W = \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_W) \tag{10.73}$$

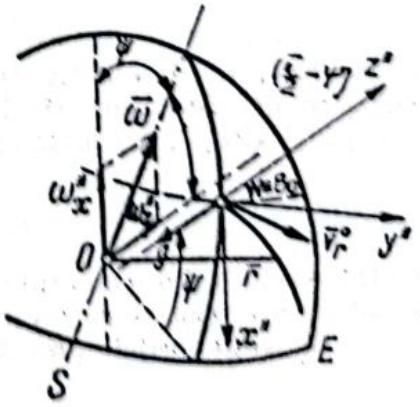


Fig. 10.3.

punctul $W(r_w)$ fiind fixat pe Pămînt)— , rezultă următoarea expresie pentru forța de inerție de transport a punctului material:

$$\bar{F}_t^i = -m\{\bar{\omega}\times[\bar{\omega}\times(\bar{r}_w+\bar{r}'')]\} = -m[\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})] = \bar{F}_{cf}^*, \tag{10—74}$$

adică identică cu cea corespunzătoare numai forței centrifuge a punctului material în cazul cînd s-ar lua originea reperului ($\mathscr{R}''$) în centrul Pămîntului, ($O \equiv W$).

S-a văzut însă că rezultanta acestei din urmă forțe și a forței gravitaționale terestre reprezintă greutatea corpului, adică se poate scrie

$$\bar{F}_g + \bar{F}_{c_f}^* = \bar{F}_g + \bar{F}_t^i = \bar{P} = m\bar{g}. \tag{10.75}$$

În consecință, introducînd această valoare în ecuația (10.71), înlocuind și forța de inerție complementară cu expresia ei (10.59) și simplificînd ecuația prim masa m a punctului material, se obține următoarea ecuație diferențială vectorială a mișcării relative a punctului material considerat:

$$\bar{a}_r = \bar{g} - 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r, \tag{10.76}$$

sau încă, ținînd seama și de relațiile de definiție a vectorilor $\bar{v}_r$ și $\bar{a}_r$, precum și de faptul că vectorii $\bar{g}$ și $\bar{\omega}$ sînt constanți, se mai poate scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{v}_r]_r = \bar{g} - 2\bar{\omega}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{r}'']_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{g}t - 2\bar{\omega}\times\bar{r}'']_r, \tag{10.77}$$

rezultînd de aici relația

$$\bar{v}_r = \bar{g}t - 2\bar{\omega}\times\bar{r}'' + \bar{C}_1, \tag{10.78}$$

$\bar{C}_1$ fiind un vector constant de integrare.

Impunînd în ultima relație condițiile inițiale

$$t = 0\{\bar{r}''(0) = 0\,; \quad \bar{v}_r(0) = \bar{v}_r^0\}, \tag{10.79}$$

prima implicînd alegerea originii W a reperului $Wx''y''z''$ chiar în poziția inițială a punctului material aruncat — , rezultă următoarea valoare pentru vectorul $\bar{C}_1$:

$$\bar{C}_1 = \bar{v}_r \tag{10.80}$$

și deci următoarea expresie determinată a vitezei relative:

$$\bar{v}_r = \bar{v}_r^0 + \bar{g}t - 2\bar{\omega}\times\bar{r}''. \tag{10.81}$$

Revenind la ecuația (10.76), înlocuind în ea viteza relativă cu expresia (10.81) și neglijînd, datorită valorii (10.70) foarte mici a lui ω, produsul dublu vectorial $[\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}'') = -\bar{\omega}^2\bar{r}_n']$, se capătă următoarea expresie aproximativă a acceleraței relative

$$\bar{a}_r = (\bar{g} - 2\,\bar{\omega}\times\bar{v}_r^0) - 2\,(\bar{\omega}\times\bar{g})t, \tag{10.82}$$

cu toți vectorii din membrul drept deveniți acum constanți, fapt care face ca derivările și integrările relative succesive ale acestei relații să coincidă cu cele absolute.

Se obțin astfel, prin integrări succesive, relațiile

$$\bar{v}_r = (\bar{g} - 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r^0)t - (\bar{\omega}\times\bar{g})t^2 + \bar{C}_1' \tag{10.83}$$

Scanned with CamScanner

și

$$\bar{r}'' = \frac{1}{2}(\bar{g} - 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r^0)t^2 - \frac{1}{3}(\bar{\omega} \times \bar{g})t^3 + \bar{C}_1' t + \bar{C}_2. \tag{10.84}$$

Impunînd în aceste două relații condițiile inițiale (10.79), rezultă următoarele valori pentru cei doi vectori constanți de integrare, $\bar{C}_1'$ și $\bar{C}_2$:

$$\bar{C}_1' = \bar{v}_r^0; \qquad \bar{C}_2 = 0 \tag{10.85}$$

și deci următoarea ecuație vectorială finită a mișcării relative a punctului material considerat:

$$\boxed{\bar{r}'' = \bar{v}_r^0 t + \frac{1}{2}(\bar{g} - 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r^0)t^2 - \frac{1}{3}(\bar{\omega} \times \bar{g})t^3.} \tag{10.86}$$

Alegînd axa Wz'' după verticala corespunzătoare poziției inițiale B_0 a punctului material și cu sensul pozitiv în sus ($\bar{g} = -g\bar{k}''$), axa Wy'' după tangenta la cercul paralel al locului și cu sensul pozitiv spre est și axa Wx'' astfel încît să completeze reperul triortogonal drept, (fig. 10.3), va rezulta următoarea expresie analitică a vectorului $\bar{\omega}$:

$$\bar{\omega} = -\omega \cos\psi \bar{i}'' + \omega \sin\psi \bar{k}''. \tag{10.87}$$

În consecință, notînd cu α^0, β^0 și γ^0 cosinusurile directoare, în raport cu reperul $(\mathscr{R}'')$, ale vitezei relative inițiale, ecuației vectoriale (10.86) îi vor corespunde următoarele ecuații de proiecții pe axele reperului $Wx''y''z''$.

$$\boxed{\begin{aligned} x'' &= v_r^0\alpha^0 t + (v_r^0\beta^0\omega \sin\psi)\, t^2; \\ y'' &= v_r^0\beta^0 t - v_r^0\omega\,[\alpha^0 \sin\psi + \beta^0 \cos\psi]t^2 + \frac{1}{3}(\omega g \cos\psi)t^3; \\ z'' &= v_r^0\gamma^0 t - \frac{1}{2}[g - v_r^0\beta^0\omega \cos\psi]t^2, \end{aligned}} \tag{10.88}$$

din ultima rezultînd concluzia

$$\ddot{z}'' = -[g - 2v_r^0\beta^0\omega \cos\psi] \tag{10.89}$$

adică proiecția pe verticală a accelerației punctului material depinde, în această situație, de condițiile inițiale.

În continuare, vor fi analizate următoarele două situații distincte:

Cazul I: *căderea liberă a punctului material*, corespunzător condiției

$$v_r^0 = 0, \tag{10.90}$$

pentru care ecuațiile (10.88) iau formele particulare

$$\boxed{x'' \equiv 0; \quad y'' = \frac{1}{3}(\omega g \cos\psi)\, t^3; \quad z'' = -\frac{1}{2} g t^2,} \tag{10.91}$$

Scanned with CamScanner

care scot în evidență faptul că în această situație traiectoria este o curbă plană, situată în planul normal la planul meridian corespunzător poziției inițiale B_0 și că mobilul capătă o abatere de la verticală spre est, ($y'' > 0$).

Cazul II : *Aruncarea pe verticală în sus a punctului material*, corespunzător condițiilor

$$\alpha^0 = \beta^0 = 0\,; \quad \gamma^0 = 1, \tag{10.92}$$

pentru care ecuațiile (10.88) capătă formele

$$\boxed{x'' \equiv 0\,; \quad y'' = -(v_r^0 \omega \cos\psi)t^2 + \frac{1}{3}(\omega g \cos\psi)t^3\,; \quad z'' = v_r^0 t - \frac{1}{2} g t^2,} \tag{10.93}$$

care arată că și în această situație traiectoria este o curbă plană.

Mobilul atinge înălțimea maximă la momentul

$$t_1 = \frac{v_r^0}{g} \tag{10.94}$$

care anulează proiecția pe axa Wz'' a vitezei relative ($z''(t_1) = 0$), pentru această valoare a lui t rezultînd condiția

$$y''(t_1) = -\frac{2}{3}\omega \frac{v_r^{0\,3} \cos\psi}{g^2} < 0, \tag{10.95}$$

care scoate în evidență faptul că de această dată mobilul capătă o abatere de la verticală spre vest.

De asemenea, se va remarca că mobilul va reveni în planul orizontal din care a fost lansat la momentul

$$t_2 = 2\frac{v_r^0}{g} = 2t_1, \tag{10.96}$$

care anulează cota z'' ($z''(t_2) = 0$), pentru această nouă valoare a lui t rezultînd condiția

$$y''(t_2) = -\frac{4}{3}\omega \frac{v_r^0 \cos\psi}{g^2} = 2y''(t_1) < 0, \tag{10.97}$$

care evidențiază faptul că în cădere mobilul capătă o nouă abatere, egală cu prima, tot spre vest.

BIBL... CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner